SCHAUM'S ouTlines

全美经典 学习指导系列

3000物理习题精解

〔美〕A. 哈尔彭 著

解希顺　张勇　朱艳梅　章宁 译

- 3000物理习题精解
- 大学生物理习题库
- 按步就班解题，易于教与学
- 可与各类教科书配套使用



科学出版社



麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1367.0101)
责任编辑：张邦固

SCHAUM'S ouT*lines*

全球销量超越3000万的

“全美经典学习指导系列”

是您的最佳

学习伴侣！



40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导、全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

[illegible]	[illegible]	电气工程基础
[illegible]	[illegible]	工程电磁场基础
[illegible]	[illegible]	数字信号处理
[illegible]	流体动力学	数字系统导论
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	电机与机电学
[illegible]	[illegible]	基本电路分析
[illegible]	[illegible]	信号与系统
[illegible]	数值分析	[illegible]
[illegible]	量子力学	生物化学
[illegible]	有机化学习题精解	生物学
[illegible]	[illegible]	分子和细胞生物学
[illegible]	大学化学习题精解	人体解剖与生理学
[illegible]	电路	

[illegible]

ISBN 7-03-009393-3



9 787030 093936 >

McGraw Hill

ISBN 7-03-009393-3/O·1367
定价：50.00 元

全美经典学习指导系列

3000物理习题精解

〔美〕A. 哈尔彭 著

解希顺 张 勇 朱艳梅 章 宁 译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书收录了3000多道普通物理习题,给出了详细的分析和解答。内容涵盖普通物理学的各个部分,选题面广,数据详实,注重原理,适于自学。在美国,本书与多种大学物理教材配套使用,既可供理工科大学非物理专业学生使用,也可供物理专业的教师、学生和参加奥林匹克竞赛的青少年参考。

Alvin Halpern:3000 Solved Problems in Physics

ISBN:0-07-099180-4

图字:01-2001-1776号

图书在版编目(CIP)数据

3000物理习题精解/(美)A.哈尔彭(Halpern)著;解希顺等译.-北京:科学出版社,2002
(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009393-3

Ⅰ.3… Ⅱ.①哈… ②解… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第032789号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2002年1月第 一 版 开本:A4(890×1240)
2002年1月第一次印刷 印张:39 1/4
印数:1—5 000 字数:1 141 000

定价: 50.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

目　录

第一章　数学简介

1.1　平面矢量;科学符号和单位

1.1　什么是标量?

解　☞ 标量只有大小,是一纯数.加减时按普通数字运算.

1.2　什么是矢量?

解　☞ 矢量既有大小,又有方向.例如,每小时向南开 40 km 的汽车的速度矢量为 40 km/h,向南.

1.3　什么是合矢量?

解　☞ 合矢量是多个相似的矢量(例如,力矢量)的和,仍为一矢量,它与各分矢量共同作用效果相同.

1.4　叙述矢量相加的图解法

解　☞ 从任一点开始,依次画出每个矢量的大小和方向,使它们首尾相连,从起始点至最后一个矢量的端点的矢量即为合矢量.

1.5　叙述两个矢量相加的平行四边形法.

解　☞ 两任意矢量的和可用平行四边形的对角线表示.如图 1-1.两矢量为平行四边形的邻边,对角线就是合矢量,其方向总是背离二矢量的起点.

1.6　矢量如何相减?

解　☞ 矢量 $\boldsymbol{A}$ 减去矢量 $\boldsymbol{B}$,只要将矢量 $\boldsymbol{B}$ 改变到相反的方向再与 $\boldsymbol{A}$ 相加,即可.因为,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

1.7　简述三角函数.

解　☞ 对如图 1-2 所示的直角三角形,定义

$$\sin\theta=\frac{o}{h},\cos\theta=\frac{a}{h},\tan\theta=\frac{o}{a}$$

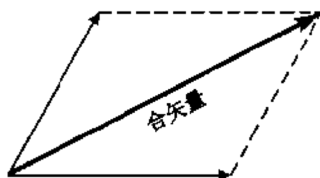


图 1-1

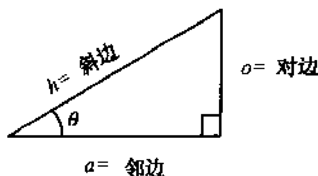


图 1-2

1.8　将下列数用 10 的幂次表示:
(a)627.4,(b)0.000365,(c)20001,(d)1.0067,(e)0.0067

解　☞ (a)6.274×10^{2},(b)3.65×10^{-4},(c)2.0001×10^{4},(d)1.0067×10^{0},(e)6.7×10^{-3}

1.9　将下列数用 10^{0} 次幂表示:
(a)31.65×10^{-3},(b)0.415×10^{6},(c)$1/(2.05\times10^{-3})$,(d)$1/(43\times10^{3})$

解　☞ (a)0.03165,(b)415000,(c)488,(d)0.0000233

1.10　地球的直径大约为 1.27×10^{7} m,将其表示为(a)mm,(b)Mm,(c)mi.

解　☞ (a)$(1.27\times10^{7}\text{ m})(1000\text{mm}/1\text{m})=1.27\times10^{10}\text{mm}$

(b)1Mm = 10^6m,所以,结果为 12.7Mm

(c)1mi = 1.61 km,所以为 7.89×10^3mi

1.11 在周长为 200 m 的圆形跑道上举行 100 m 赛.运动员开始向东然后向南跑.从起点到终点的位移是多少?

解 ☞ 如图 1-3 所示,比赛路径为半个圆周,因此位移沿直径,大小为 $200/\pi$ = 63.7 m,正南.图 1-3.

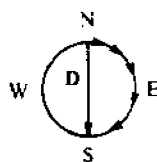


图 1-3

1.12 什么是矢量的分量?

解 ☞ 矢量的分量是它在一给定方向的轴上的投影.

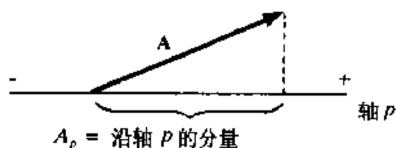


图 1-4

例如:一个位移的 p 分量是它沿 p 轴的距离.分量是标量,可正可负,分别对应于与给定轴的正向相同或相反的情况.在图 1-4 中,A_p 是正的.(有时矢量的分量也定义为矢量,其大小与标量定义的相同,方向沿给定的轴.若标量分量为负,则表明沿该轴的负向).通常,分解矢量时沿互相垂直的方向分解(直角分量).

1.13 什么是矢量相加的分量加法?

解 ☞ 将每个矢量分解成 x、y、z 分量,指向负轴方向的分量为负值,合矢量的 x 分量等于所有 x 分量的代数和,同样可求得合矢量的 y 分量和 z 分量.

1.14 定义矢量与标量的乘法?

解 ☞ 定义 $b\boldsymbol{F}$ 仍为一矢量,其大小为 $|b|F$(b 的绝对值乘以 $\boldsymbol{F}$ 的大小,其方向为)$\boldsymbol{F}$ 或 $-\boldsymbol{F}$ 的方向,b 大于零时方向与 $\boldsymbol{F}$ 相同,反之则相反.

1.15 用作图法求下列两位移的合矢量:
大小为 2m,与 x 轴正向成 40°;大小为 4 m,与 x 轴正向成 127°.

解 ☞ 如图 1-5 所示,从原点开始画两个矢量,注意角度是与 $+x$ 轴之间的夹角.合矢量 $\boldsymbol{R}$ 如图.在图上测得其大小为 4.6 m,θ = 101°.

1.16 一位移大小为 25 m,与 x 轴成 210°角,求其 x 和 y 分量.

解 ☞ 位移矢量及其分量如图 1-6 所示,分量为

x 分量 = $-25\cos30°$ = -21.7 m y 分量 = $-25\sin30°$ = -12.5 m

注意:两分量均指向负轴方向,所以为负.

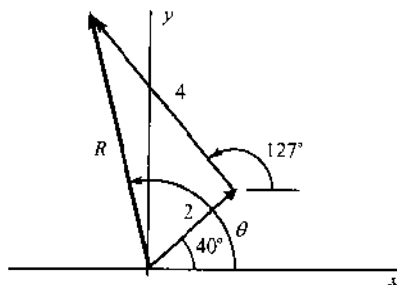


图 1-5

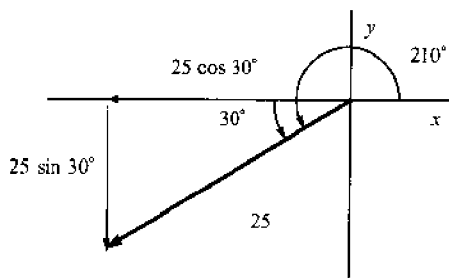


图 1-6

1.17 用直角分量法求解题 1.15

解 ☞ 每个矢量的直角分量如图 1-7(a),(b)所示,(画有交叉影线的是原矢量).合矢量的分量大小为

$$R_x = 1.53 - 2.40 = -0.87\ \text{m} \quad R_y = 1.29 + 3.20 = 4.49\ \text{m}$$

注意:指向负轴方向的分量一定为负值.

合矢量如图 1-7 (c)所示,由图可知 $R=\sqrt{(0.87)^2+(4.49)^2}=4.57$ m $\tan\phi=\frac{4.49}{0.87}$

$\phi=79°$　而 $\theta=180°-\phi=101°$

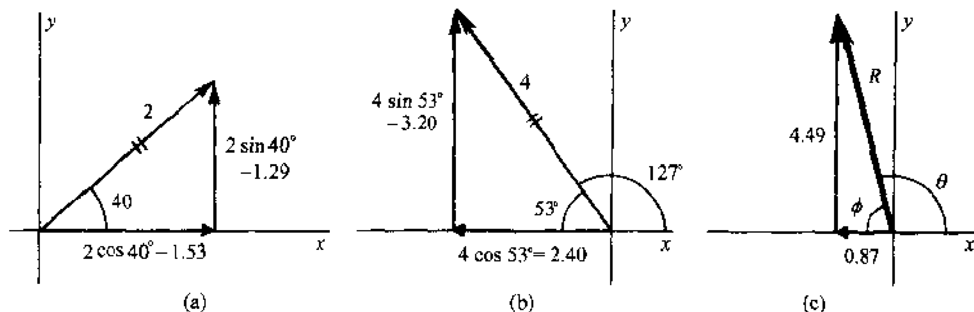


图 1-7

1.18　将下列两力矢量用平行四边形法相加:

30 lb(磅),与 x 轴正向成 30°;20 lb(磅),与 x 轴正向成 140°(1 kg 物体重 2.21lb,一 lb 等于 4.45 N 的力)

解　☞ 力矢量如图 1-8 所示,画如图 1-9 所示的平行四边形,对角线为合矢量 **R**,其大小为 30 lb, $\theta=72°$.

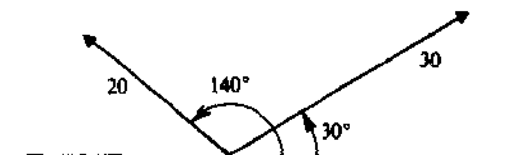


图 1-8



图 1-9

1.19　求图 1-10 中矢量 $\boldsymbol{F}$ 在 x 和 y 轴方向的分量.

解　☞ 在图 1-10 中,从 P 点到 X 和 Y 的垂线(虚线)确定了矢量 $\boldsymbol{F}$ 的两个分量 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 的大小及方向. 由图可见, $F_x=F\cos\theta$, $F_y=F\sin\theta$

1.20　(a) $\boldsymbol{F}$ 的大小为 300 N,与 x 方向之间的夹角 $\theta=30°$,求 F_x 和 F_y,(b)若 $F=300$ N, $\theta=145°$($\boldsymbol{F}$ 在第二象限内),重求 F_x 和 F_y.

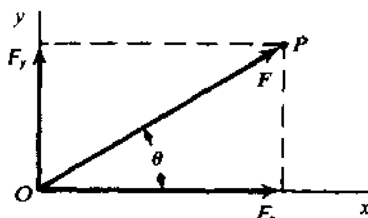


图 1-10

解　☞ (a) $F_x=300\cos30°=259.8$N,

$F_y=300\sin30°=150$ N

(b) $F_x=300\cos145°=(300)(-0.8192)=-245.75$N(在 x 轴负向)

$F_y=300\sin145°=(300)(+0.5736)=172.07$ N

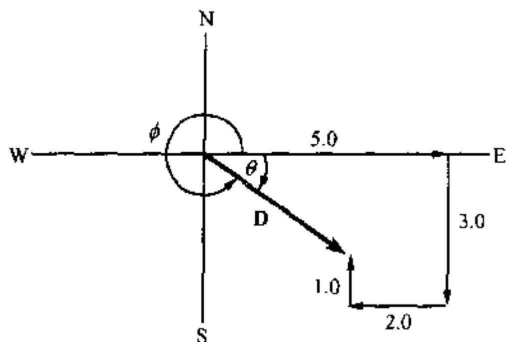


图 1-11

1.21　一轿车先向东开 5.0 km,再向南 3.0 km,然后向西 2.0 km,最后向北 1 km. (a)求轿车向北向东各开了多远? (b)分别用几何法和代数法求位移矢量.

解　☞ (a)矢量相加次序可任意. 向南 3.0 km,向北 1 km 产生 2.0 km 向南的净位移. 同样,向东 5.0 km,向西 2.0 km 产生 3 km 向东的净位移. 而向

东的位移在南北方向无分量，向南的位移在东西方向无分量，所以小轿车位于起点以北 2.0 km，以东 3 km 处.

(b)用头尾相连的方法，容易得到合位移矢量 $\boldsymbol{D}$(见图 1-11). 用代数方法则有

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.6\ \text{km}$$

$$\tan\phi = -\frac{2}{3},\quad \text{或}\ \tan\theta = \frac{2}{3}, \theta = 34°(\text{偏东南方向})$$

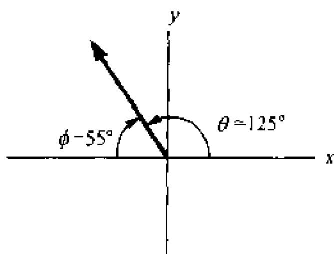


图 1-12

1.22 一力大小为 400 N，与 x 轴成 125°角，求其 x 和 y 分量.

解 ☞ 用正规方法(取与 x 轴正向的夹角)

$$F_x = (400\ \text{N})\cos125° = -229\text{N},$$

$$F_y = (400\text{N})\sin125° = 327\text{N}$$

用直观方法(取与 x 轴正向或负向之间的锐角)

$$|F_x| = F\cos\phi = 400\cos55° = 229(\text{N})$$

$$|F_y| = F\sin\phi = 400\sin55° = 327(\text{N})$$

1.23 求下列位于同一平面内的两个力的合力：

30 N 与 x 轴正向成 37°，50 N 与 x 轴正向成 180°

解 ☞ 先求分量，再求合力

$$R_x = 24 - 50 = -26(\text{N}), R_y = 18 + 0 = 18(\text{N})$$

所以 $R = 31.6\text{N}$, $\tan\theta = 18/(-26)$，　$\theta = 145°$

1.24 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 矢量如图 1-13 所示，求(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，(b) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，(c) $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$

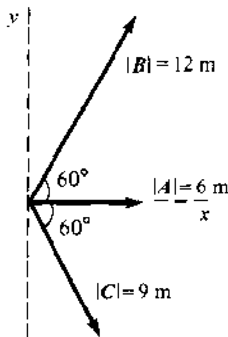


图 1-13

解 ☞ $A_x = 6$ m, $A_y = 0$, $B_x = 12\cos60° = 10.4$(m)

(a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_x = 12$m, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_y = 10.4$m,　$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = 15.9$m，在 40.9°方向.

(b) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})_x = 0$, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})_y = -10.4$m,　$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = 10.4$ m，在 −90°方向.

(c) $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})_x = 0$, $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})_y = 10.4$m,　$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}| = 10.4$ m，在 90°方向.

1.25 对图 1-13 中的矢量，求(a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，(b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

解 ☞ $\boldsymbol{C}$ 的 x、y 分量分别为 4.5m 和 −7.8m.

(a) x 分量为 $A_x + B_x + C_x = 16.5$，而 y 分量为 2.6，所以合矢量大小为 16.7m，在 9.0°(与 x 轴正向的夹角，下同)方向.

(b) $A_x + B_x - C_x = 7.5$，而 y 方向的分量为 $0 + 10.4 - (-7.8) = 18.2$. 所求矢量大小为 19.7 m，在 68°方向.

1.26 对图 1-13 中的矢量，求(a) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{C}$，(b) $\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

解 ☞ (a) x 分量为 $A_x - 2C_x = -3$，y 分量为 $-2(-7.8) = 15.6$，所求矢量大小为 15.9 m，在 101°方向.

(b) x 分量 $= 6-(6+4.5) = -4.5$，y 分量 $= 10.4-[0+(-7.8)] = 18.2$. 因此，$(4.5^2 + 18.2^2)^{1/2} = 18.7$ m，在 104°方向.

(c)所求是题 1.25(a)的矢量的负值，所以大小为 16.7 m，在 9.0° + 180° = 189° = −171°方向.

1.27 一位移矢量大小为 20m，在 xy 平面内，与 x 轴正向成 70°(即在沿 x 轴逆时针转 70°的方向)，求其 x 和 y 分量. 又：若成 120°；250°；重新计算此问题.

解 ☞ 任一种情况下，均有 $S_x = S\cos\theta$, $S_y = S\sin\theta$，所以结果分别为 6.8m, 18.8m；−10.0m, 173m；−6.8m，−18.8m.

1.28 一物体受到 x 方向 20 N 的力和 y 方向 −30 N 的力，求受到的合力.

解 ☞ 合力的分量为 $R_x=20$ N, $R_y=-30$ N,

$$R=(400+900)^{1/2}=36\text{N},\ \tan\theta=-30/20,\quad \theta=303.7°=-56.3°$$

θ 是与 x 轴正向之间的夹角.

1.29 一力 x 分量为 -40 N, y 分量为 -60 N,求该力的大小和方向.

解 ☞ 大小为 $R=(1600+3600)^{1/2}=72$ (N)

方向角 $\theta=180°+\arctan(6/4)=236.3°$

1.30 求下列共面位移矢量的合矢量的大小和方向:

20m,与 x 轴成 0°角;10m,与 x 轴成 120°角.

解 ☞ $R_x=20-5=15$(m), $R_y=0+8.7=8.7$(m),所以

$$R=17.3(\text{m}),\ \tan\theta=8.7/15,\ \theta=30°$$

1.31 四力共面,作用于点 O,如图 1-14(a).用几何法求合力.

解 ☞ 四矢量画于图 1-14(b)中,首尾相接,起点在原点,则从原点指向最后一个矢量的端点的箭头(虚线)即为所求矢量.

由图 1-14(b)测得,合矢量大小为 119 N. α 为 37°,即合矢量与 x 轴正向夹角 $\theta=180°-37°=143°$.

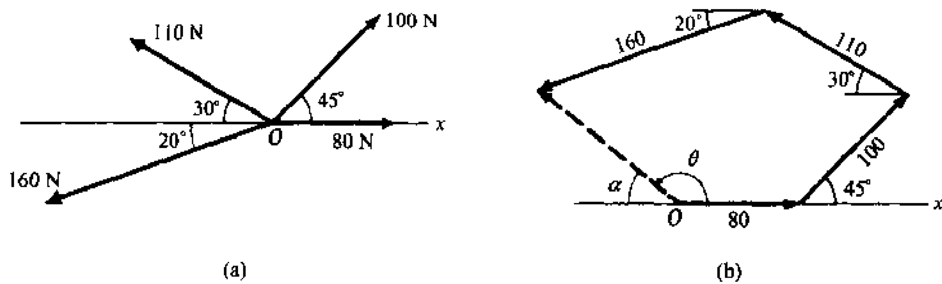


图 1-14

1.32 用直角分量法解题 1.31.

解 ☞ 矢量及其分量如下:

大小/ N	x 分量/ N	y 分量/ N
80	80	0
100	100cos45° = 71	100sin45° = 71
110	−100cos30° = −95	110sin30° = 55
160	−160cos20° = −150	−160sin20° = −55

注意各分量的符号.容易求得

$$R_x=80+71-95-150=-94(\text{N}),$$

$$R_y=0+71+55-55=71(\text{N})$$

合矢量如图 1-15 所示.由图知, $R=\sqrt{(94)^2+(71)^2}=118\text{N}$.

$\tan\alpha=71/94$, $\alpha=37°$.所以合矢量大小为 118 N,在 $180°-37°=143°$的方向上.

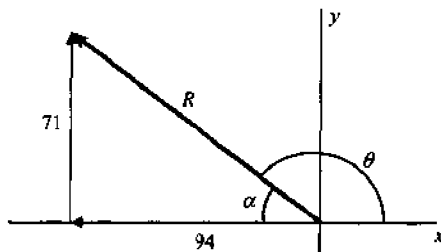


图 1-15

1.33 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 见图 1-16,用作图法求矢量的和或差.

(a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,(b)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,(c)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,(d)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

解 ☞ 见图 1-16(a)→(d).

在(c)中，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，即改变 $\boldsymbol{B}$ 的方向再与 $\boldsymbol{A}$ 相加.
同样，在(d)中，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{C})$，$-\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 大小相等，方向相反.

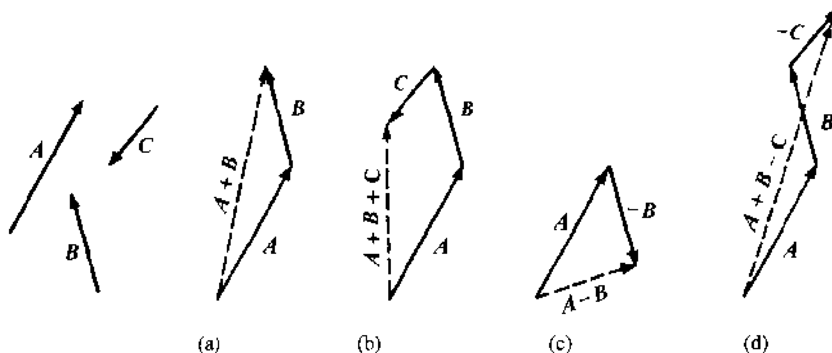


图 1-16

1.34 求下列作用于同一点的力的合力：
30 lbf，东北方向；70 lbf，正南；50 lbf，西偏北 20°.

解 选取正东为 x 轴正向(见图 1-17)

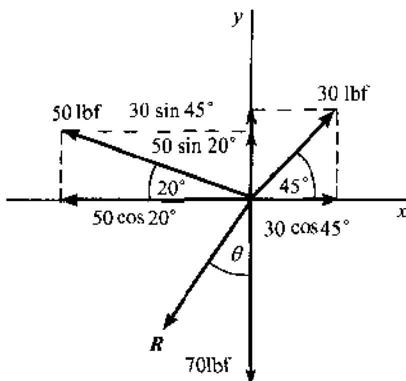


图 1-17

x 分量/lbf	y 分量/lbf
$30\cos45°=21.2$	$30\sin45°=21.2$
$-50\cos20°=-47.0$	$50\sin20°=17.1$
	$70=-70$
和 $=-25.816$	和 $=-31.7$lbf

$$R=\sqrt{(-25.8)^2+(-31.7)^2}$$
$$=\sqrt{665.8+1004.9}=40.9\ (\text{lbf})$$
$$\tan\theta=\frac{-25.8}{-31.7}=0.8139°,$$
$$\theta=39°(\text{偏西南方向})$$

1.35 两力矢量大小相等，合力等于每个分力大小的$\frac{1}{3}$，求两力之间的夹角.

解 ☞ 在矢量图 1-18 中，菱形对角线两部分相等.

因此 $\cos\theta=\frac{F/6}{F}=\frac{1}{6}=0.1667$，$\theta=80.4°$，$2\theta=160.8°$，两力之间的夹角为 160.8°

1.36 求地图上下列四位移的矢量和：
60mm 正北；30mm 正西；40mm，北偏西 60°；50mm，南偏西 30°.(a)用作图法，(b)用代数法.

解 ☞ (a)四矢量头尾相连如图 1-19 所示. 测得合矢量大小为 97 mm，与正北方向成 67.7°，偏西.
(b)令 $\boldsymbol{D}$ = 合矢量，则

$$D_x=-30-40\sin60°-50\sin30°=-89.6(\text{mm})$$
$$D_y=60+40\cos60°-50\cos30°=+36.76(\text{mm})$$
$$D=\sqrt{D_x^2+D_y^2}=96.8\ \text{mm},\quad \tan\phi=\left|\frac{D_y}{D_x}\right|\Rightarrow\phi=22.3°\ \text{在负}\ x\ \text{轴上方}.$$

1.37 两力大小分别为 80 N 和 100 N，夹角为 60°，作用在一物体上，什么力可代替此两力？什么力可与此平衡？用代数法求解.

解 ☞ 选取 x 轴沿 80 N 力的方向，则 100 N 力在正 x 轴上方 60°的方向，其 y 分量为正. 可代替

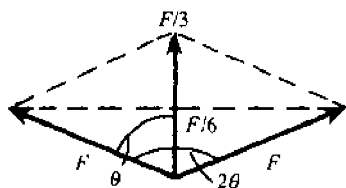


图 1-18

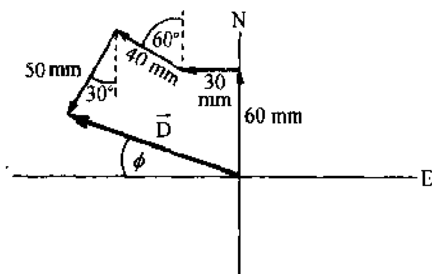


图 1-19

的力 $\boldsymbol{R}$ 为两力的矢量和

$$R_x = 80 + 100\cos60° = 130(\mathrm{N}), R_y = 100\sin60° = 87(\mathrm{N})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 156(\mathrm{N}), \theta = \arctan\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = 34°, \text{在正 } x \text{ 轴上方}.$$

平衡力为 $-\boldsymbol{R}$,大小 156 N,与 $\boldsymbol{R}$ 方向相反,在负 x 轴下方 34°方向(即与正 x 轴成 214°的夹角).

1.38 作用于一质点上的两力如下:100 N, 170°;100 N, 50°,求它们的合力.

解 ☞ $F_1 = 100$ N,在 x 轴上方 170°,100 N,50°,求它们的合力.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2, R_x = 100\cos170° + 100\cos50° = -34.2(\mathrm{N})$$

$$R_y = 100\sin170° + 100\sin50° = 94.0(\mathrm{N})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 100\mathrm{N}, \theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

θ 有两个解:290°或 110°.按题意知 $\boldsymbol{R}$ 应在第二象限,所以答案是 110°(或在负 x 上方 70°).也可用下列方法:$\phi = \arctan|R_y/R_x|$,由此得到一小于 90°的解,这里为 70°,它总是表示矢量与 x 轴(正向或负向)之间的夹角,在轴的上方或下方.而我们总能判断出 $\boldsymbol{R}$ 位于哪一象限,所以就能确定方向.这里 70°是在负 x 轴上方.

1.39 100 N 的力与 x 轴成 θ 角,其 y 方向的分量为 30 N,求力的 x 方向的分量及其方位角 θ.

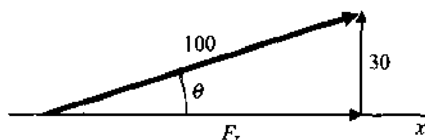


图 1-20

解 ☞ 如图 1-20 所示,要求 F_x 和 θ,因为

$$\sin\theta = \frac{a}{h} = \frac{30}{100} = 0.30$$

所以 $\theta = 17.5°$,又 $a = h\cos\theta$,所以

$$F_x = 100\cos17.5° = 95.4(\mathrm{N})$$

1.40 小船在静止的湖水中速度为 8 km/h,在流动的溪水中它相对溪水的速度为 8 km/h,而溪水的流速为 3 km/h.问船相对于岸上的树的速度是多少?(a)逆流,(b)顺流.

解 ☞ (a)若水静止,船相对树的速度为 8 km/h,而溪水使船向相反方向运动 3 km/h,所以这时船相对于树的速度为 8 − 3 = 5 (km/h)

(b)此时船速水速方向相同,所求速度为 8 + 3 = 11 (km/h)

1.41 一飞机向东飞行的速度为 500km/h,向南的风速为 90km/h,求飞机相对于地面的速度大小和方向.

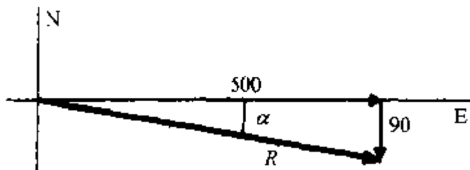


图 1-21

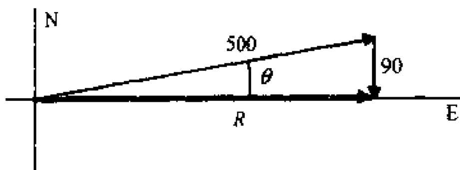


图 1-22

解 ☞ 飞机的合速度是两速度之和. 如图 1-21 所示, $R_F = 500\text{km/h}$, $R_s = 90\text{km/h}$, 合速度为

$$R = \sqrt{(500)^2 + (90)^2} = 508(\text{km/h})$$

$$\tan\alpha = \frac{90}{500} = 0.180$$

$\alpha = 10.2^\circ$. 所以飞机相对地面的速度为 508km/h, 东偏南 10.2°.

1.42 飞机速率与题 1.41 相同, 要使飞机向正东飞, 机头应保持在什么方向?

解 ☞ 据题意, 飞机相对于空气的速度与风速的矢量和必须在正东方向, 矢量图示见图 1-22. 由图可见

$$\sin\theta = 90/500, \theta = 10.4^\circ$$

飞机头应保持在东偏北 10.4°的方向.

若要求飞机向东的速度, 由图 1-22 可知 $R = 500\cos\theta = 492$ (km/h)

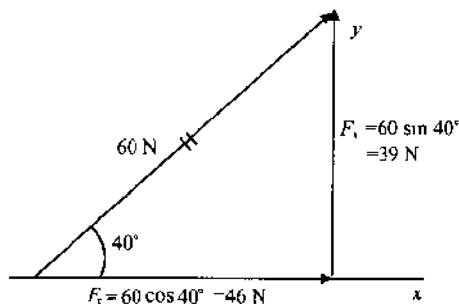


图 1-23

1.43 一小孩用 60 N 的力拉系在雪撬上的绳, 绳与地面成 40°角. (a)求使雪撬沿地面运动的分力, (b)求垂直分力.

解 ☞ 如图 1-23 所示, 60 N 力的两分量分别为 39 N 和 46 N. 所以(a)水平分力为 46 N, (b)垂直分力为 39 N.

1.44 求图 1-24 中共面力系的合力.

解 ☞ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$

$$R_x = -40 + 80\cos30^\circ + 0 = 29.3(\text{lbf})$$

$$R_y = 0 - 80\sin30^\circ + 60 = 20(\text{lbf})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 35.4(\text{lbf}), \theta = \arctan\frac{R_y}{R_x} = 34.3^\circ \text{ 在 } +x \text{ 轴上方.}$$

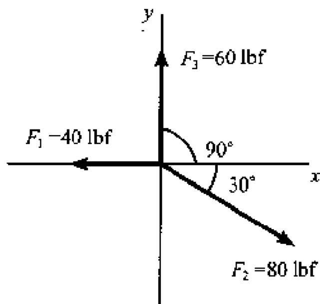


图 1-24

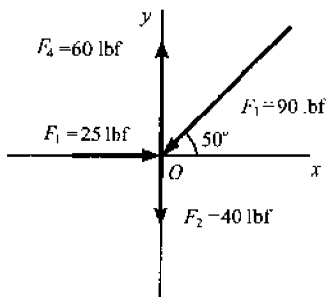


图 1-25

1.45 对图 1-25 中的力, 重解题 1.44

解 ☞ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$

$$R_x = 25 - 90\cos50^\circ + 0 = -32.8(\text{lbf})$$

$$R_y = 0 - 40 - 90\sin50^\circ + 60 = 19.2(\text{lbf})$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 38.0(\text{lbf})$$

$$\phi = \arctan\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = 30.3^\circ \text{ 在 } -x \text{ 轴上方.}$$

1.46 对图 1-26 中的力, 重解题 1.44

解 ☞ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{R}_4$

$$R_x = -125\cos25^\circ + 0 + 180\cos23^\circ + 150\cos62^\circ$$

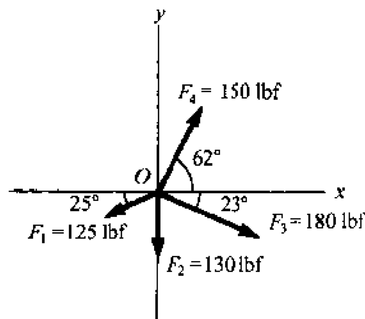


图 1-26

$$= 122.8(\text{lbf})$$

$$R_y = -125\sin25° - 130 - 180\sin23° + 150\sin62°$$

$$= -120.7(\text{lbf})$$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 172.2\text{lbf}$, $\phi = \arctan\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = 44.5°$在 $+x$ 轴上方.

1.47 用代数方法求下列共面力的合力 $\boldsymbol{R}$ 和平衡力 $\boldsymbol{E}$:100 kN, 30°;141.4 kN, 45°;100 kN, 240°.

解 ☞ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$

$$R_x = 100\cos30° + 141.4\cos45° + 100\cos240° = 136.6(\text{kN})$$

注:$100\cos240° = -100\cos60°$, $100\sin240° = -100\sin60°$

$$R_y = 100\sin30° + 141.4\sin45° + 100\sin240° = 63.4(\text{N})$$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 150.6\text{kN}$, $\phi = \arctan\left|\frac{R_y}{R_x}\right| = 24.9°$在 $+x$ 轴上方.

$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{R} = 150.6\text{kN}$, 在 $24.9° + 180° = 204.9°$方向($+x$ 轴上方).

1.48 用代数方法计算下列位移的合矢量:

20m, 30°;40m, 120°;25m, 180°;42m, 270°;12m, 315°.

解 ☞ $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 + \boldsymbol{d}_4 + \boldsymbol{d}_5$ = 合矢量

$D_x = 20\cos30° + 40\cos120° - 25 + 0 + 12\cos315° = -19.3(\text{m})$

注:180°即沿 $-x$ 轴;270°为沿 $-y$ 轴;$\cos120° = -\cos60°$;$\sin120° = \sin60°$;$\cos315° = \cos45°$;$\sin315° = -\sin45°$;

$D = \sqrt{D_y^2 + D_y^2} = 20.2$ m, $\phi = \arctan\left|\frac{D_y}{D_x}\right| = 16.7°$在 $-x$ 轴下方,或 $\theta = \arctan\frac{D_y}{D_x} - 196.7°$(与 $+x$ 轴的夹角).

1.49 参见图 1-27,用矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示矢量 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{Q}$.

解 ☞ 在平行四边形中,$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{S} - \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$

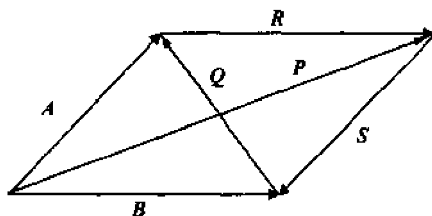


图 1-27

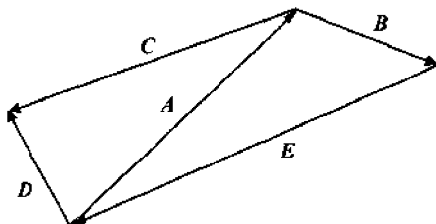


图 1-28

1.50 参见图 1-28,用矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示矢量 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{Q}$.

解 ☞ 显然,$-\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 即:$\boldsymbol{E} = -(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} + (-\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B}$

1.51 一合位移 $\boldsymbol{D}$ 大小为 100m,起点在原点,与 x 轴成 37°.它由下列三位移合成:$\boldsymbol{d}_1$, 100m, 沿 x 轴;$\boldsymbol{d}_2$, 200m, 与 x 轴成 150°;$\boldsymbol{d}_3$ 待求.求 $\boldsymbol{d}_3$.

解 ☞ $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3$

$$D_x = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x}, \text{即 } 100\sin37° = -100 + 200\cos150° + d_{3x}, d_{3x} = 353\text{m}$$

(注:$\cos150° = -\cos30°$)

$D_y = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y}$, 即 $100\sin37° = 0 + 200\sin150° + d_{3y}$, $d_{3y} = -40\text{m}$

(注:$\sin150° = -\sin30°$)

$d_3 = \sqrt{d_{3x}^2 + d_{3y}^2} = 355\text{m}$, $\phi = \arctan\left|\frac{d_{3y}}{d_{3x}}\right| = 6.5°$在 $+x$ 轴下方.

1.52 四作用力的合力 $\boldsymbol{R}$ 大小为 100 N, 沿负 y 轴方向.其中三个力分别为:100 N, 与 x 轴夹

角 60°;200 N,与 x 轴夹角 140°;250 N,与 x 轴夹角 320°.求第四个力.

解 ☞ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$

$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$,即 $0 = 100\cos60° + 200\cos40° + 250\cos320° + F_{4x}$

$F_{4x} = -88.3\text{N}$

$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$,即 $100\sin60° - 200\sin40° + 250\sin320° + F_{4y}$

$F_{4y} = -154.4\text{N}$

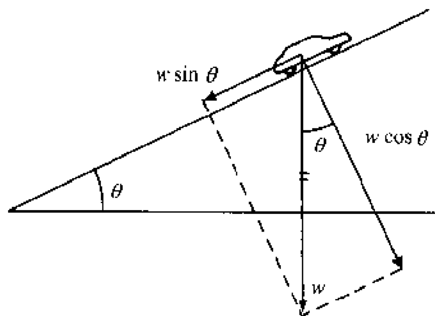


图 1-29

1.53 一轿车重 w,位于倾角为 θ 的斜面上,斜面支撑轿车的正压力应为多大才能承受住轿车的重量?

解 ☞ 如图 1-29 所示,轿车的重力 w 可分解为沿斜面和垂直斜面的两个分量.斜面的正压力应与垂直斜面的分量 $w\cos\theta$ 平衡.

1.54 图 1-30(a)所示为作用于一物体上的五个共面力.求它们的合力.

解 ☞ (1)求每个力的 x 和 y 分量.

大小/N	x 分量/N	y 分量/N
19	19.0	0
15	$15\cos60° = 7.5$	$15\sin60° = 13.0$
16	$16\cos45° = -11.3$	$16\sin45° = 11.3$
11	$-11\cos30° = -9.5$	$-11\sin30° = -5.5$
22	0	-22.0

注:符号表示方向

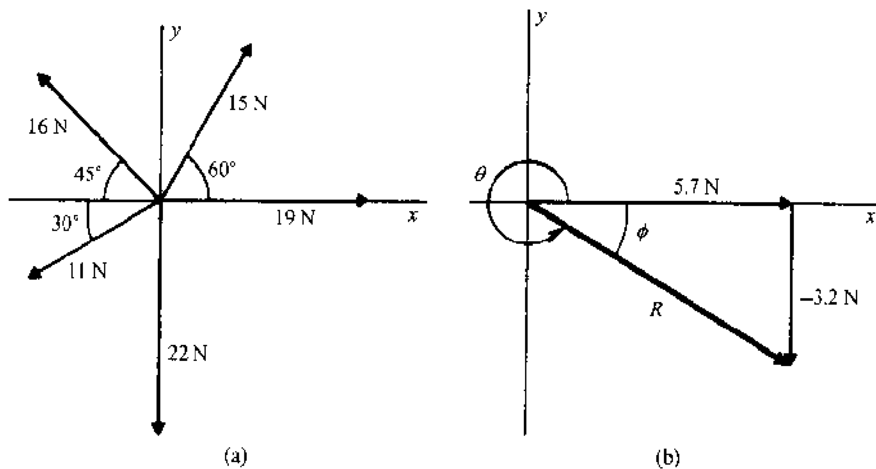


图 1-30

(2)合力 $\boldsymbol{R}$ 的分量为

$$R_x = \sum F_x = 19.0 + 7.5 - 11.3 - 9.5 + 0 = +5.7(\text{N})$$

$$R_y = \sum F_y = 0 + 13.0 + 11.3 - 5.5 - 22.0 = -3.2(\text{N})$$

(3)合力的大小为

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6.5\text{N}$$

(4)合力如图 1-29(b)所示,由图可见

$$\tan\phi=\frac{3.2}{5.7}=0.56,\quad \phi=29^\circ,\quad \theta=360^\circ-29^\circ=331^\circ$$

合力大小为 6.5 N,在 331°(或 -29°)方向.

1.55 用代数方法求下列共面力的合力 $\boldsymbol{R}$ 和平衡力 $\boldsymbol{E}$:300(N),0°;400(N),30°;400(N),150°.

解 ☞ $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$,$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{R}$

$$R_x=300+400\cos30^\circ+400\cos150^\circ=300(\mathrm{N})$$

注:$400\cos150^\circ=-400\cos30^\circ$,$400\sin150^\circ=400\sin30^\circ$

$$R_y=0+400\sin30^\circ+400\sin150^\circ=400(\mathrm{N})$$

$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=500(\mathrm{N})$,$\varphi=\arctan\left|\frac{R_y}{R_x}\right|=53^\circ$在 x 轴上方,而 $E=500\mathrm{N}$,$\varphi_E=53^\circ$在 $+x$ 轴下方.

1.2 三维矢量;标积和矢积

1.56 矢量 $\boldsymbol{A}$(见图 1-31)起点在原点,端点在点(7.0m,4.0m,5.0m)处,求其大小.

解 ☞ 首先,注意到矢量 $\boldsymbol{A}$ 和其分量 A_z 分别是直角三角形的斜边和直角边(该三角形所在平面垂直于 xy 平面),由勾股定理有 $A^2=B^2+A_z^2$,而矢量 $\boldsymbol{B}$ 又是 xy 平面内的直角三角形的斜边,该三角形的二直角边分别是 A_x 和 A_y,由勾股定理又得 $B^2=A_x^2+A_y^2$.两方程联立,得

$A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$ 即 $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

这就是三维情况下的勾股定理.

由已知条件,得

$$A=\sqrt{(7.0\mathrm{m})^2+(4.0\mathrm{m})^2+(5.0\mathrm{m})^2}=9.5\mathrm{m}$$

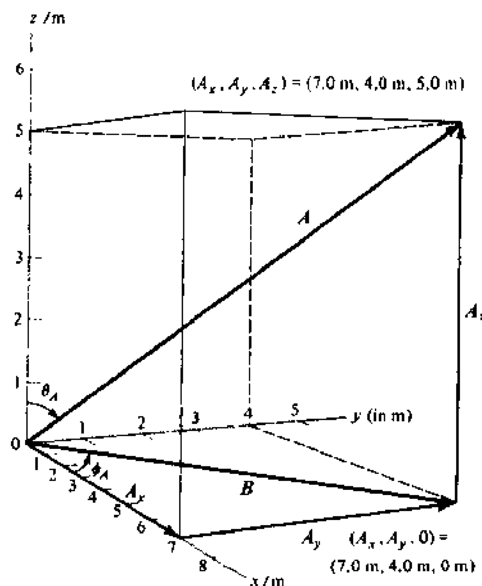


图 1-31

1.57 求图 1-32 中三维矢量 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量的大小.

解 ☞ 在图 1-32 中,$\boldsymbol{F}_x$,$\boldsymbol{F}_y$,$\boldsymbol{F}_z$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的三个互相垂直的分量,其大小 F_x、F_y、F_z 分别为

$$F_x=F\cos\theta_1,\quad F_y=F\cos\theta_2,$$
$$F_z=F\cos\theta_3$$

为方便起见,记 $\cos\theta_1=l$,$\cos\theta_2=m$,$\cos\theta_3=n$,则

$$F_x=Fl,\quad F_y=Fm,\quad F_z=Fn$$

l、m、n 称做 F 的方向余弦.由三维的勾股定理(题 1.56)得,$l^2+m^2+n^2=1$

1.58 在图 1-32 中,设 $\boldsymbol{F}$ 表示一力,其大小为 200(N).令 $\theta_1=60^\circ$,$\theta_2=40^\circ$,求 F_x、F_y 和 F_z.

解 ☞ $l=0.5$,$m=0.766$,$n=(1-l^2-m^2)^{1/2}=0.404$

(已设 F_z 为正,否则 $n=-0.404$)

$\boldsymbol{F}$ 的直角分量为

$$F_x=(200)(0.5)=100(\mathrm{N}),$$
$$F_y=153.2(\mathrm{N}),$$
$$F_z=80.0(\mathrm{N})$$

复查:$(100_2+153.2^2+80.8^2)^{1/2}\approx200$.而 $\theta_3=66.17^\circ$

1.59 求 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 的矢量和 $\boldsymbol{R}$.三矢量在与图 1-32 相同的三维直角坐标系中,起点均位于原点.

解 ☞ 按分量法

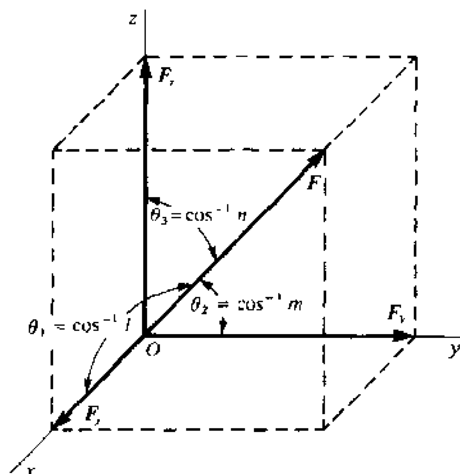


图 1-32

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}$$
$$R_y=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}$$
$$R_z=F_{1z}+F_{2z}+F_{3z}$$

且

$R=[(F_{1x}+F_{2x}+F_{3x})^2+(F_{1y}+F_{2y}+F_{3y})^2+(F_{1z}+F_{2z}+F_{3z})^2]^{1/2}$，式中 F_{1x} 是 $\boldsymbol{F}_1$ 的 x 分量，依此类推．$\boldsymbol{R}$ 的方向余弦如下：

$$l=\frac{F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}}{R}$$
$$m=\frac{F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}}{R}$$
$$n=\frac{F_{1z}+F_{2z}+F_{3z}}{R}$$

起始于原点的任意数目的矢量的合矢量（大小及方向）均可这样求得．

1.60　定义单位矢量

解　任一非零矢量均可写成 $\boldsymbol{F}=F\boldsymbol{e}$，$F$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的大小，而 $\boldsymbol{e}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 方向的单位矢量（大小为 1 的矢量）．也就是说，$\boldsymbol{F}$ 的大小由 F 表示，而方向由 $\boldsymbol{e}$ 表示．$\boldsymbol{F}$ 的单位（如 N，m/s）与 F 相同，因此 $\boldsymbol{e}$ 是无量纲的矢量．

1.61　用沿坐标轴方向的单位矢量表示图 1-32 中的矢量 $\boldsymbol{F}$．

解　☞ 在图 1-32 中，引入 x、y、z 方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则按题 1.60 的定义，$\boldsymbol{F}$ 的三个矢量分量可写成

$\boldsymbol{F}_x=F_x\boldsymbol{i}$，　$\boldsymbol{F}_y=F_y\boldsymbol{j}$，　$\boldsymbol{F}_z=F_z\boldsymbol{k}$

若某一分量大小为负，如 $F_x=-|F_x|=-|\boldsymbol{F}_x|$，则 $\boldsymbol{F}_x=-|\boldsymbol{F}_x|\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{F}_x|(-\boldsymbol{i})$，这也已在题 1.60 中规定过．因为 $\boldsymbol{F}$ 代表合矢量，我们可写出下列重要表达式：

$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$

在此表达式中，$F_x=F\cos\theta_1=Fl$，依此类推．而 $\boldsymbol{F}$ 的大小及其方向（即方向余弦）为

$$F=(F_x^2+F_y^2+F_z^2)^{1/2},\quad l=\frac{F_x}{F},\quad m=\frac{F_y}{F},\quad n=\frac{F_z}{F}$$

1.62　力 $\boldsymbol{F}$ 的分量为 $F_x=100$ N，$F_y=153.2$ N，$F_z=80.8$ N，用单位矢量表示 $\boldsymbol{F}$ 并求其大小和方向．

解　☞ 用单位矢量表示 $\boldsymbol{F}$ 可写成 $\boldsymbol{F}=100\boldsymbol{i}+153.2\boldsymbol{j}+80.8\boldsymbol{k}$

大小：$F=(100^2+153.2^2+81^2)^{1/2}=200$(N)

方向：$l=\frac{100}{200}=0.5$，$m=0.766$，$n=0.404$

所以 $\boldsymbol{F}=(100\text{N})\boldsymbol{i}+(153.2\text{N})\boldsymbol{j}+(80.8\text{N})\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{F}=100\boldsymbol{i}+153.2\boldsymbol{j}+80.8\boldsymbol{k}$(N)

1.63　一力的 x、y 分量分别为 3 N 和 −5 N，与力 $\boldsymbol{A}$ 相加后，合力在负 x 轴方向，大小为 4 N．求 $\boldsymbol{A}$ 的 x、y 分量．

解　☞ 设 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$，则有 $A_x+3=-4$，$A_y-5=0$，因此 $A_x=-7$N，$A_y=5$N．

1.64　用单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示图 1-13 中的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$．

解　☞ $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}=6\boldsymbol{i}$(m)，$\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{i}+10.4\boldsymbol{j}$(m)，$\boldsymbol{C}=4.5\boldsymbol{i}-7.8\boldsymbol{j}$(m)

1.65　一未知位移与位移 $7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 相加后的合位移为 $5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$(m)，求该位移的分量．

解　☞ $A_x+7=5$，$A_y-4=-3$，所以 $A_x=2$m，$A_y=1$m

1.66　求下列三矢量：$2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$；$-9\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$；$4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$ 的矢量和的大小和方向．

解　☞ $(2-9+4)\boldsymbol{i}+(-3-5+8)\boldsymbol{j}=-3\boldsymbol{i}$，所以大小为三个单位，沿负 x 轴方向．

1.67　一矢量与下列两矢量相加后等于 $6\boldsymbol{j}$：$10\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{i}$；$4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}$，该矢量的分量是多少？

解 ☞ 记该矢量为 $\boldsymbol{A}$,则 $A_x-10+4=0$, $A_y-7-2=6$,所以 $A_x=-14$, $A_y=11$.

1.68 一房间地板为 5×6 m,天花板高度为 3 m.写出从房间下角到天花板的对角的矢量.其大小是多少?

解 ☞ x、y、z 方向的位移分别是 5、6、3m,因此,$\boldsymbol{D}=-2+3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$(m), $D=6.2$ m.

1.69 请找出从点(0, 3, −1)(m)到点(−2, 6, 4)(m)的位移矢量.用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示答案.再给出它的大小.

解 ☞ 此位移的分量是 $D_x=-2-0=-2$, $D_y=6-3=3$, $D_z=4-(-1)=5$, 于是

$$\boldsymbol{D}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\qquad D=6.2\text{m}$$

1.70 一物体起始位置为(2, 5, 1)cm,位移为 $8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$(cm),求新位置的坐标.

解 ☞ 新坐标是 $x=2+8=10$; $y=5+(-2)=3$; $z=1+1=2$

所以,物体到达(10, 3, 2)cm 处.

1.71 求下列三位移矢量的和:$2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$; $5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$; $-6\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$(单位为 mm),要求给出其大小及用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的表示式.

解 ☞ $\boldsymbol{R}=(2-6)\boldsymbol{i}+(5+1)\boldsymbol{j}+(-3-2+8)\boldsymbol{k}=-4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$(mm)

所以 $R=61^{1/2}=7.8$mm

1.72 一力与另二个力相加后等于 $7\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,已知另二个力分别为 $2\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{k}$ 和 $3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求该力的 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示式及其大小(这里所有力的单位均为 N).

解 ☞ 记该力为 $\boldsymbol{F}$.则 $F_x+2=7$; $F_y+3=-6$; $F_z-7+2=-1$

因此,$\boldsymbol{F}=5\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$(N), $F=11$N.

1.73 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 在 xy 平面内,$\boldsymbol{A}$ 大小为 70N,与 x 轴成 90°;而 $\boldsymbol{B}$ 大小为 120N,与 x 轴成 210°.求(a)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,(b)满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=0$ 的矢量 $\boldsymbol{C}$

解 ☞ $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}=-120\cos30^\circ\boldsymbol{j}-120\sin30^\circ\boldsymbol{j}=-104\boldsymbol{i}-60\boldsymbol{j}$

(a)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(0+104)\boldsymbol{i}+(70+60)\boldsymbol{j}=166$(N), 51°

(b)$\boldsymbol{C}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=104\boldsymbol{i}-100\boldsymbol{j}=166$(N), 231°

1.74 若 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$(mm), $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$(mm),求(a)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,(b)$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$,(c)满足方程 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=0$ 的矢量 $\boldsymbol{C}$.

解 ☞ (a)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[2-(-1)]\boldsymbol{i}+[-3-(-2)]\boldsymbol{j}+(5-7)\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$(mm)

(b)$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$(mm)

(c)$\boldsymbol{C}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$(mm)

1.75 矢量 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$,矢量 $\boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.求矢量 $\boldsymbol{C}$ 满足 $2\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{C}=0$

解 ☞ 一矢量为零,则其各分量一定为零:$2A_x+7B_x+4C_x=0$,所以,$C_x=-1.5$.而 C_y,解 $2(5)+7(-3)+4C_y=0$,得 $C_y=2.75$.类上,得 $C_z=-9.5$.所以 $\boldsymbol{C}=-15\boldsymbol{i}+2.75\boldsymbol{j}-9.5\boldsymbol{k}$

1.76 一矢量为 $3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$,求它与 z 轴的夹角

解 ☞ 先求矢量在 xy 平面上的投影:$(3^2+4^2)^{1/2}=5$.矢量的大小为$(7^2+5^2)^{1/2}=8.6$,它与 z 轴的夹角为 $\arctan(5/7)=35.5°$.或由题 1.61

$$\cos\theta_3=\frac{7}{\sqrt{3^2+4^2+7^2}}=0.814,\ \theta_3=35.5°$$

1.77 设下列条件成立:

$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=-3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系如何? 若 $\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$(m),$\boldsymbol{B}$ 等于多少?

解 ☞ $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$,所以 $4\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$

将 $\boldsymbol{A}$ 等于 $6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$ 代入,得 $\boldsymbol{B}=-24\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{k}$(m).

1.78 设 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 大小相等,即有

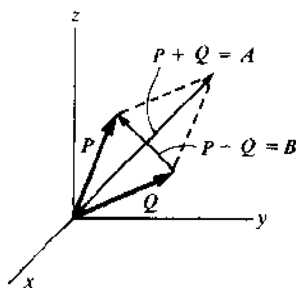


图 1-33

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系如何?

解 ☞ $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 一定互相垂直.为说明这一点,令 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 为大小相等的两矢量(见图 1-33),$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 形成一菱形,其对角线分别为 $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$,它们一定互相垂直.令 $\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$,则得.

1.79 以原点为起点的两位移矢量分别为

$$S_A = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}\,(\text{cm}),\ S_B = -\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\,(\text{cm})$$

求从点 A 到点 B 的矢量的大小及其 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表达式.

解 ☞ 所求矢量分量为 $D_x=-1-3=-4$;$D_y=-5-(-2)=-3$;$D_z=2-5=-3$.所以 $\boldsymbol{D}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$(cm),$d^2=4^2+3^2+3^2$,$D=5.8$(cm).

1.80 加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的直角分量为 $a_x=6$,$a_y=4$,$a_z=9\text{m/s}^2$.求 $\boldsymbol{a}$ 的矢量表达式和它的方向余弦.

解 ☞ $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}\,(\text{m/s}^2)$,$a=(6^2+4^2+9^2)^{1/2}=11.53(\text{m/s}^2)$方向余弦为

$$l=\frac{6}{11.53},\quad m=\frac{4}{11.53},\quad n=\frac{9}{11.53}$$

1.81 求线段的矢量表达式

解 ☞ 图 1-34 中的直线 ab,可由两点 P_1 和 P_2 确定.将 P_1、P_2 之间的线段记为 $\boldsymbol{S}$,可写出 $\boldsymbol{S}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$

其大小为 $S=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$,方向余弦为

$$l=\frac{x_2-x_1}{S},\quad m=\frac{y_2-y_1}{S},\quad n=\frac{z_2-z_1}{S}$$

径矢 $\boldsymbol{r}$ 是其中一特例,它从 O 点指向任意点 $P(x,y,z)$:

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2},\text{且}$$

$$l=\frac{x}{r},\quad m=\frac{y}{r},\quad n=\frac{z}{r}$$

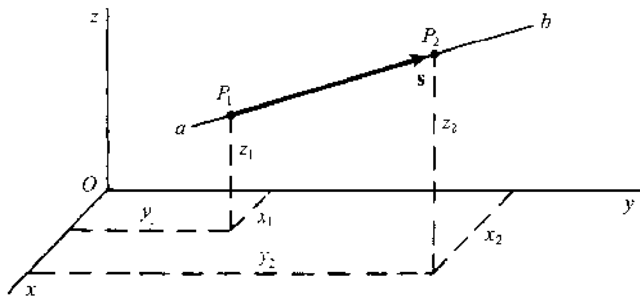


图 1-34

1.82 已知速度矢量 $\boldsymbol{v}=16\boldsymbol{i}+30\boldsymbol{j}+24\boldsymbol{k}$(m/s),$v=(16^2+30^2+24^2)^{1/2}=41.62$(m/s).方向余弦为 $l=16/41.62$ 等.

现将 $\boldsymbol{v}$ 乘以 10:$10\,\boldsymbol{v}=160\boldsymbol{i}+300\boldsymbol{i}+240\boldsymbol{k}\equiv\boldsymbol{v}_1$,求 $\boldsymbol{v}_1$,的大小和方向.

解 ☞ $v_1=[(160)^2+(300)^2+(240)^2]^{1/2}=10(41.62)=10v$

$\boldsymbol{v}_1$ 的方向余弦为

$$l_1=\frac{160}{(10)(41.62)}=\frac{16}{41.62}=l,\quad m_1=m,\quad n_1=n$$

计算表明v_1与v方向相同.

1.83 定义两矢量的标积.

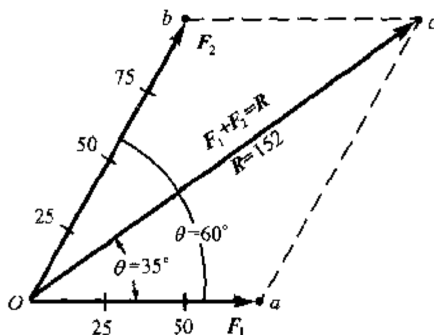


图 1-35

解 ☞ 两矢量F_1、F_2(见图 1-35)的标积写为$F_1\cdot F_2$,定义为它们大小与之间夹角的余弦的乘积.即,$F_1\cdot F_2=F_1\cdot F_2\cos\theta$,这是一标量.在图 1-35 中,$F_1=75$, $F_2=100$, $\theta=60°$,所以 $F_1\cdot F_2=(75)(100)(0.5)=3750$.

1.84 求沿 x、y、z 方向的单位矢量之间的标积.

解 ☞ 因为i、j、k互相垂直,大小均为 1,由定义可得

$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$, $i\cdot j=i\cdot k=j\cdot k=0$

1.85 用直角坐标分量表示两矢量的标积.

解 ☞ 设两矢量为

$$F_1=F_{1x}i+F_{1y}j+F_{1z}k,F_2=F_{2x}i+F_{2y}j+F_{2z}k$$

它们的标积为

$F_1\cdot F_2=(F_{1x}i+F_{1y}j+F_{1z}k)(F_{2x}i+F_{2y}j+F_{2z}k)$上式右式可以化简.设标积满足分配律,又 $i\cdot i=1$ …(见题 1.84),所以

$$F_1\cdot F_2=F_{1x}F_{2x}+F_{1y}F_{2y}+F_{1z}F_{2z}$$

为证明$F_1\cdot F_2$的这一表达式与$F_1F_2\cos\theta$相同(θ为F_1、F_2之间的夹角),上式右边共同乘、除F_1、F_2得

$$\begin{aligned}F_1\cdot F_2&=F_1F_2\left(\frac{F_{1x}}{F_1}\frac{F_{2x}}{F_2}+\frac{F_{1y}}{F_1}\frac{F_{2y}}{F_2}+\frac{F_{1z}}{F_1}\frac{F_{2z}}{F_2}\right)\\&=F_1F_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)\end{aligned}$$

在两维情况下,

$$\cos\theta=\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=l_1l_2+m_1m_2$$

推广到三维,$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$.因此,上面表达式确为$F_1F_2\cos\theta$,所以分量乘法满足标积的定义.

1.86 令 $F_1=10i-15j-20k$, $F_2=6i+8j-12k$,求它们的标积和夹角.

解 ☞ $F_1\cdot F_2=(10)(6)+(-15)(8)+(-20)(-12)=180$

而 $F_1=(10^2+15^2+20^2)^{1/2}=26.93$, $F_2=15.62$,因此,F_1、F_2之间的夹角θ满足

$$\cos\theta=\frac{F_1\cdot F_2}{F_1F_2}=\frac{180}{(26.93)(15.62)}=0.4279,\theta=64.66°$$

当然,也可由 $\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$ 求得

1.87 求任意矢量沿一直线的投影.

解 ☞ 矢量 $A=(A_x,A_y,A_z)$沿矢径 $r=(x,y,z)$决定的直线方向的投影为 $A_r=A\cos\theta$,θ是r与A之间的夹解.由点积的定义,$A\cdot r=Ar\cos\theta=A_rr$.因此,记 $r=(1/r)r=(l,m,n)$-沿r方向的单位矢量,则 $A_r=A\cdot r=A_xl+A_ym+A_zn$,即使直线不经过原点,此式仍然适用.

1.88 求矢量 $A=10i+8j-6k$ 沿 $r=5i+6j+9k$ 方向的投影.

解 ☞ $r=(5^2+6^2+9^2)^{1/2}=11.92$,由题 1.87 知

$$A_r=A_xl+A_ym+A_zn=10\left(\frac{5}{11.92}\right)+8\left(\frac{6}{11.92}\right)-6\left(\frac{9}{11.92}\right)=\frac{44}{11.92}=3.69$$

1.89 定义两矢量的矢积.

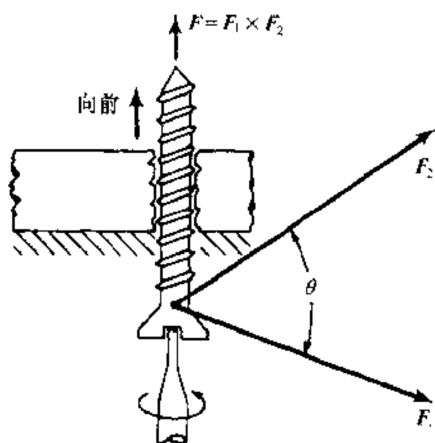


图 1-36

解 ☞ 两矢量 F_1、F_2(见图 1-36)的矢积,写成 $F=F_1\times F_2$. F 定义为一矢量,其大小为 $F=F_1F_2\sin\theta$,方向为从 F_1 转过 θ 角到达 F_2 时右手螺旋前进的方向,螺旋的轴垂直于 F_1 和 F_2 所决定的平面(右手螺旋定则). 即:右手弯曲的四指从 F_1 转至 F_2 时,伸直的拇指所指的方向(右手定则).

注意:根据右手定则, $F_1\times F_2=-(F_2\times F_1)$.

1.90 求坐标轴单位矢量的矢积.

解 ☞ 因为 i、j、k 互相垂直,大小为 1,按矢积定义,得

$i\times i=j\times j=k\times k=0,\quad i\times j=k$

$j\times k=i,\quad k\times i=j,\quad j\times i=-k,$

$k\times j=-i,\quad i\times k=-j$

1.91 给定两个矢量(见图 1-37)

$A=A_xi+A_yj+A_zk$, $B=B_xi+B_yj+B_zk$,求它们在直角坐标系中的矢积.

$C=A\times B=(A_xi+A_yj+B_zk)$,右边运用分配律并利用题 1.90 中得出的 $i\times i$ 等结果,得

$$C=A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

验证如下:展开行列式的第一行, C 的 x、y、z 方向的分量为

$C_x=A_yB_z-A_zB_y,\quad C_y=(A_zB_x-A_xB_z),\quad C_z=A_xB_y-A_yB_x$

因此, C 的大小为 $C=(C_x^2+C_y^2+C_z^2)^{1/2}$,而其方向余弦是

$l=\dfrac{C_x}{C},\quad m=\dfrac{C_y}{C},\quad n=\dfrac{C_z}{C}$

矢量 C 当然垂直于矢量 A、B 组成的平面.

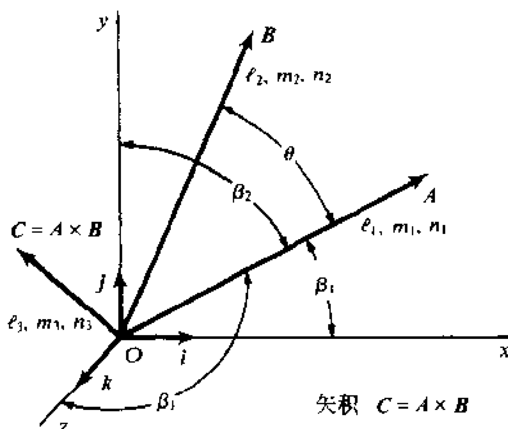


图 1-37

1.92 如图 1-38,设矢量 A、B 在 xy 平面内,求 $C=A\times B$ 的大小和方向.

解 ☞ $C=(200)(100)\sin(55^\circ-15^\circ)=20000\sin40^\circ=12855$

由右手定则, C 的方向为 $+Z$ 方向,可写成 $C=12855k$

1.93 参见图 1-37,设 $A=20i-10j+30k$, $B=-6i+15j-25k$,

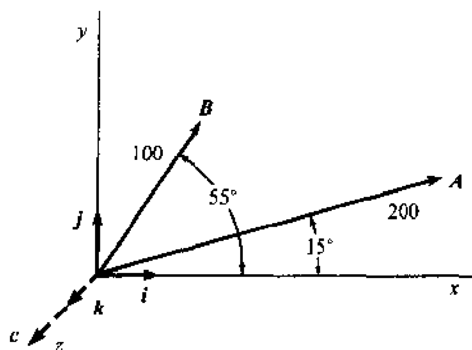


图 1-38

(a)求 **A**、**B** 的大小,(b)求 **A** 的方向余弦,(c)求矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$,(d)求 **C** 的大小和方向,(e)求 **A**、**B** 的夹角,(f)求 **B** 的方向余弦 l_2、m_2、n_2 并求 **B** 与 x、y、z 轴之间的夹角 α_{21}、α_{22}、α_{23}。

解 ☞ (a)$A=(20^2+10^2+30^2)^{1/2}=37.42,\ B=29.77$

(b)$l_1=\dfrac{20}{37.42},\ m_1=\dfrac{-10}{37.42},\ n_1=\dfrac{30}{37.42}$

(c)应用行列式公式

$$\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 20 & -10 & 30 \\ -6 & 15 & -25 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{i}[(-10)(-25)-(15)(30)]-\boldsymbol{j}[(20)(-25)-(30)(-6)] \\ &\quad +\boldsymbol{k}[(20)(15)-(-10)(-6)] \\ &= -200\boldsymbol{i}+320\boldsymbol{j}+240\boldsymbol{k} \\ &= 200(-\boldsymbol{i}+1.6\boldsymbol{j}+1.2\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

(d)**C** 的大小为 $C=200(1^2+1.6^2+1.2^2)^{1/2}=447.21$,方向余弦为

$$l_3=\frac{-200}{447.21},\quad m_3=\frac{320}{447.21},\quad n_3=\frac{240}{447.21}$$

注意:$\boldsymbol{C}=C(l_3\boldsymbol{i}+m_3\boldsymbol{j}+n_3\boldsymbol{k})$

(e)$C=AB\sin\theta$, $447.21=(37.42)(29.7)\sin\theta$, $\sin\theta=0.40145$, $\theta=23.67°$

(f)$\boldsymbol{B}=-6\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}-25\boldsymbol{k}=B(l_2\boldsymbol{i}+m_2\boldsymbol{j}+n_2\boldsymbol{k})$

因此 $Bl_2=-6,\ Bm_2=15,\ Bn_2=-25,\ B=(6^2+15^2+25^2)^{1/2}=29.766$

而 $l_2=-0.2016,\ m_2=0.5039,\ n_2=-0.8399$

$\alpha_{21}=101.63°,\ \alpha_{22}=59.74°,\ \alpha_{23}=147.13°$

第二章　共点力的平衡

2.1　绳子;绳结和不计摩擦的滑轮

2.1　图 2-1(a)中的物体重 50 N 且被一根绳子拉住.求绳上的拉力.

解　☞ 有两个力作用在物体上,向上的绳子拉力和向下的重力.用 T 表示绳子上的拉力和绳中的张力.物体重力 $w=50$ N.这两个力画在图 2-1(b)中的示意图中.

力已经写成分量形式,所以我们可以马上写出平衡的第一个条件

$\sum F_x=0$,　得　$0=0$

$\sum F_y=0$,　得　$T-50\text{N}=0$

从中得 $T=50$N.

2.2　如图 2-2(a)所示水平绳中的张力为 30 N.求物体的重力.

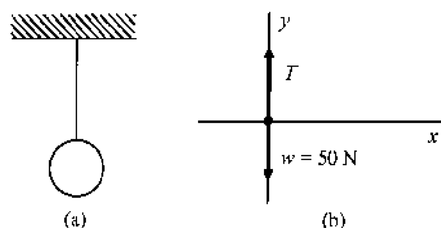


图 2-1

解　☞ 由 2.1 题知,绳 1 中的张力等于挂在上面物体的重力.所以 $T_1=w$,我们要求出 T_1 或 w.

已知未知力 T_1 和已知力 30 N 都作用在 P 点的结上.可把 P 点的结作为研究对象.画出结所受的力如图 2-2(b)所示.同时也画出力的分量.

由图 2-2(b)写出结受力平衡时的第一个条件,

$\sum F_x=0$　得　$30\text{N}-T_2\cos40°=0$

$\sum F_y=0$　得　$T_2\sin40°-w=0$

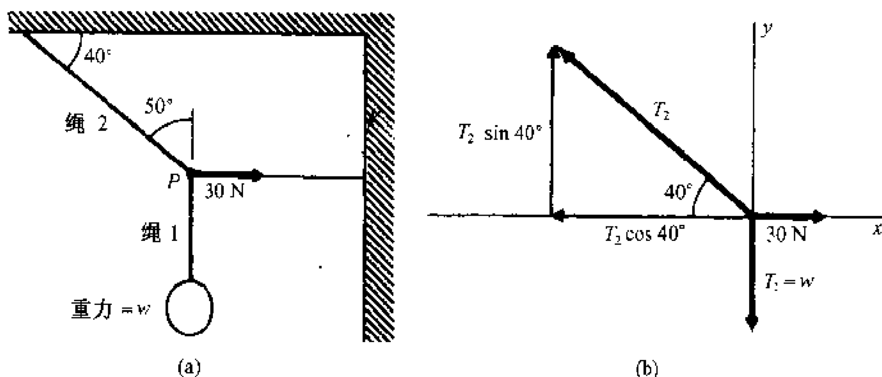


图 2-2

解第一个方程得 $T_2=39.2$N.把该值代入第二个方程得物体的重为 $w=25.2$N.

2.3　对于图 2-3(a)中的系统,如果物体重 600 N,求 T_1 和 T_2 的值.

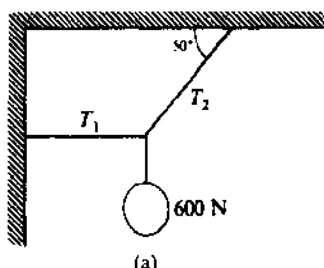
解　☞ 研究在三个力作用下处于平衡的结,如图 2-3(b)所示.

$\sum F_x=0$,　得　$T_2\cos50°-T_1=0$,　　即　$0.643T_2=T_1$

$\sum F_y=0$,　得　$T_2\sin50°-600\text{N}=0$,　即　$0.766T_2=600\text{N}$

解得 $T_2=783$N,代入 $\sum F_x$ 的方程得 $T_1=503$N.

2.4　绳子受到如下共面力:与 x 轴正方向成 30°的力大小为 200 N,成 80°的力大小为 500 N,成 240°的力大小为 300 N,还有一个未知的力.求当绳子处于平衡时未知力的大小和方向.



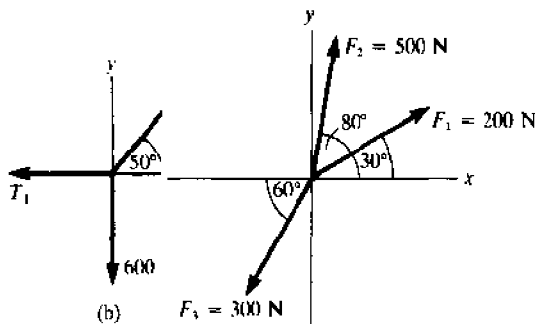


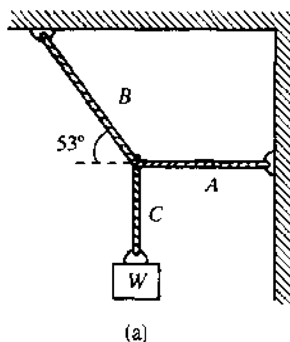
图 2-3　　图 2-4

解 ☞ 以 0°的线为 x 轴,90°的线表示 y 轴.三个已知力如图 2-4 所示.如果 $\boldsymbol{F}_4$ 表示未知的力,则 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4=0$.设 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$,则 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{F}_4=0\Rightarrow\boldsymbol{F}_4=-\boldsymbol{R}$.要求 $\boldsymbol{F}_4$,我们只需求出 $\boldsymbol{R}$.

$$R_x = F_{1x}+F_{2x}+F_{3x} = F_1\cos30° + F_2\cos80° - F_3\cos60°$$
$$R_x = 200(0.866)+500(0.174)-300(0.500) = 110(\mathrm{N})$$
$$R_y = F_1\sin30° + F_2\sin80° - F_3\sin60°$$
$$R_y = 200(0.500)+500(0.985)-300(0.866) = 333(\mathrm{N})$$
$$R = (R_x^2+R_y^2)^{1/2} = 351\mathrm{N},\ \tan\theta_R = \frac{R_y}{R_x}$$
$$\Rightarrow\theta_R = 71.7°,\quad F_4 = R \text{ 和 } \theta_{F_4} = \theta_R + 180° = 252°$$

2.5 在图 2-5(a)中 W 的值为 180 N.求绳 A、B 中的张力.

解 ☞ 根据图 2-5(b)以及 x 和 y 方向的合力为零得 $A=B\cos53°$和 $B\sin53°=W=180$.由后式解得 $B=225\mathrm{N}$,代入前式解得 $A=135\mathrm{N}$.



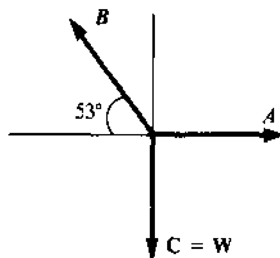


图 2-5

2.6 如果图 2-5(a)中相同的绳子 A 和 B 能承受的力不超过 200 N,则 W 的最大值为多大?当 W 为最大值时另一根绳子中张力为多大?

解 ☞ 由 2.5 题,B 将受到最大拉力 200 N.由竖直方向的力平衡求得 $W=200\sin53°=160(\mathrm{N})$,由水平方向的力平衡求得 $A=200\cos53°=120(\mathrm{N})$.

2.7 一根绳子系在两根杆上.一位重 90 N 的男孩抓住绳子并悬在空中,如图 2-6(a)所示.求绳上两部分的张力.

解 ☞ 设绳上两部分的张力为 T_1 和 T_2,研究男孩手抓住的绳子的部分.该处受力如图 2-6(b)所示.

$$\sum F_x = 0,\quad 得\quad T_2\cos5° - T_1\cos10° = 0$$
$$\sum F_y = 0,\quad 得\quad T_2\sin5° + T_1\sin10° - w = 0$$

代入正弦值与余弦值，方程变为

$$0.996T_2 - 0.985T_1 = 0 \quad 和 \quad 0.087T_2 + 0.174T_1 - 90 = 0$$

由第一个方程得到 $T_2 = 0.990T_1$. 代入第二个方程得

$$0.086T_1 + 0.174T_1 - 90 = 0$$

从中解得 $T_1 = 346\text{N}$. 又因为 $T_2 = 0.990T_1$，解得 $T_2 = 343\text{N}$.

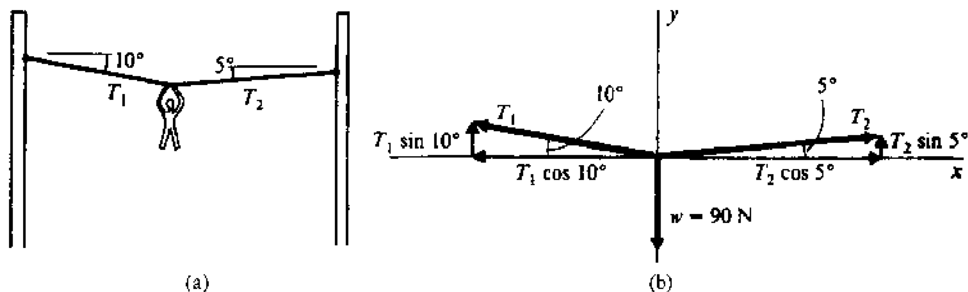


图 2-6

2.8 图 2.7 中绳 A 上的张力为 30 N. 求 B 中的张力和 W 的值.

解 ☞ 以两根绳子的交点为原点建立坐标系；x 和 y 方向的平衡方程分别为 $T_A\cos50° = T_B\cos60°$ 和 $W = T_A\sin50° + T_B\sin60°$，其中 $T_A = 30\text{N}$. 解之得：$T_B = 39\text{N}$ 和 $W = 56\text{N}$.

2.9 在图 2-7 中，如果 $W = 80\text{N}$，求 T_A 和 T_B 的大小.

解 ☞ 平衡方程已由 2.8 题给出. 当 $W = 80\text{N}$ 时，y 方向的平衡方程写成 $80 = T_A[\sin50° + (\tan60°)(\cos50°)]$，其中已经代入了由水平方程求出的 T_B 所以拉力 $T_A = 43\text{N}$ 和 $T_B = 55\text{N}$.

2.10 一个重为 W 的男孩拉住晾衣线的中点使该线与过两端的水平线夹角为 20°. 求晾衣线上的张力.

解 ☞ 由图 2-8，$2T\sin20° = W$. 所以 $T = 1.46W$.

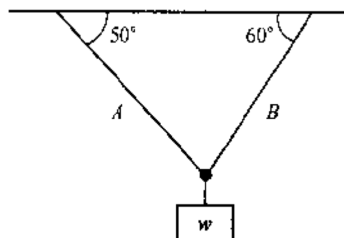


图 2-7

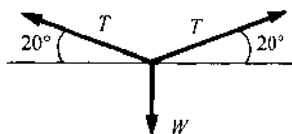


图 2-8

2.11 在用弓射箭时，射手竖直握住弓并用 80 N 的力向后拉箭. 弓弦的两部分与竖直方向成 25°角. 求弦上的张力.

解 ☞ 设射手拉住的弦上一点受到的水平力为零，则有 $80 = 2T\sin25°$，所以 $T = 95\text{N}$.

2.12 在图 2-9(a)中，滑轮没有摩擦且系统处于平衡. 如果 $W_3 = 200\text{N}$，求 W_1 和 W_2 的值.

解 ☞ W_1 上方的结在三个力作用下处于平衡，如图 2-9(b)所示. 因为滑轮没有摩擦，$T_2 = W_2$；$T_3 = W_3$. 又 $T_1 = W_1$，已知 $T_3 = W_3 = 200\text{N}$. 由 $\sum F_x = 0$，$T_3\sin35° - T_2\sin50° = 0$.（注意角度是与 y 轴的夹角，所以 x 分量方程中包括了正弦函数.）所以 $200(0.574) = T_2(0.766) \Rightarrow T_2 = 150\text{N} = W_2$. 由 $\sum F_y = 0$，$T_3\cos35° + T_2\sin35° - T_1 = 0$ 得 $200(0.819) + 150(0.643) = T_1 \Rightarrow T_1 = 260\text{N} = W_1$

2.13 如果图 2-9(a)中 W_1 重 500 N. 求系统平衡时 W_2 和 W_3 的值.

解 ☞ 现在图 2-9(b)中 $T_1 = 500\text{N}$. 由 $\sum F_x = 0 \Rightarrow T_3\sin35° - T_2\sin50° = 0 \Rightarrow 0.574T_3 = 0.766T_2$.

也可写成

$$T_3 = 1.33T_2 \tag{1}$$

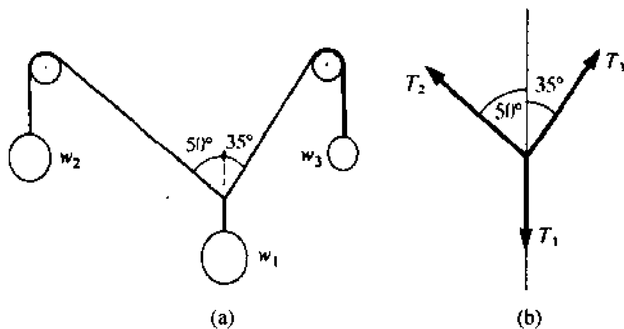


图 2-9

由 $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_3\cos35° + T_2\cos50° - T_1 = 0 \Rightarrow 0.819T_3 + 0.643T_2 = 500\text{N}$. 代入(1)式代入有 $0.819(1.33T_2) + 0.643T_2 = 500\text{N} \Rightarrow 1.73T_2 = 500\text{N}$, $T_2 = 289\text{N}$ 再由(1)式得 $T_3 = 384\text{N}$.

2.14 如果物体重 600 N, 求图 2-10 中绳中的张力.

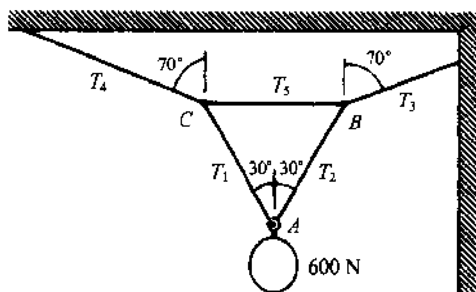


图 2-10

解 选择 A 点的结为研究对象, 因为我们已知作用在上面的重力为 600 N 且指向下方, 结的受力情况如图 2-11(a)所示. 运用平衡的第一

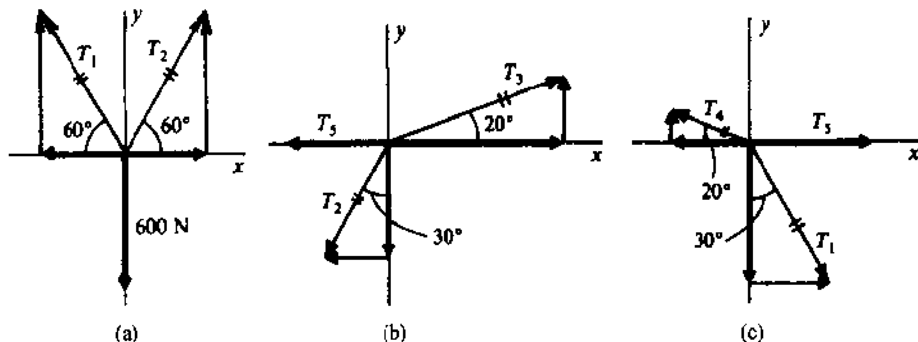


图 2-11

条件有

$$\sum F_x = 0, \quad 即 \quad T_2\cos60° - T_1\cos60° = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad 即 \quad T_1\sin60° + T_2\sin60° - 600 = 0$$

第一个方程解得 $T_1 = T_2$. 代入第二个方程得 $T_1 = T_2 = 346\text{N}$.

现在以结点 B 为研究对象. 它的受力情况如图 2-11(b)所示. 已知 $T_2 = 346\text{N}$, 平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad 即 \quad T_3\cos20° - T_5 - 346\sin30° = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad 即 \quad T_3\sin20° - 346\cos30° = 0$$

最后一个方程为 $T_3 = 877$ N. 把该值代入第一个方程得到 $T_5 = 651N$.

现在我们进一步研究结点 C, 其受力情况如图 2-11(c). 已求出 $T_1 = 346\text{N}$,

$$\sum F_x = 0, \quad 得 \quad T_5 + 346\sin30° - T_4\cos20° = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad 得 \quad T_4\sin20° - 346\cos30° = 0$$

由后一个方程解得 $T_4 = 877\text{N}$.

[注意由系统的对称性也可以推出 $T_1=T_2$ 和 $T_4=T_3$.]

2.15　图 2-12(a)中平衡时 $w=40\text{N}$,求 T_1 和 T_2.

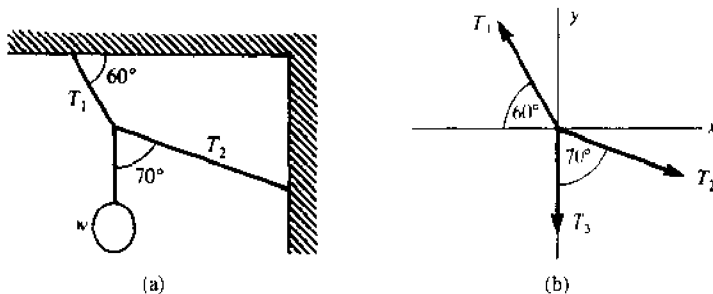


图 2-12

解　☞ 结点在三个力的作用下处于平衡,其受力情况如图 2-12(b)所示. $T_3=w=40\text{N}$.

$\sum F_x=0\Rightarrow T_2\sin70°-T_1\cos60°=0$　即

$(0.940)T_2=(0.500)T_1, T_1=1.88T_2$

$\sum F_y=0\Rightarrow T_1\sin60°-T_2\cos70°-T_3=0, (0.866)T_1-(0.342)T_2=T_3=40\text{N}$

代入 T_1,

$(0.866)(1.88T_2)-(0.342)T_2=40\text{N}, 1.29T_2=40\text{N}, T_2=31.0\text{N}, T_1=(1.88)(31.0)=58.3(\text{N})$

2.16　由图 2-12(a)所示,绳子能承受的最大张力为 80 N.求 w 的最大值.

解　☞ 根据 2.15 题,对于任意 w_1,平衡方程为

$$T_1=1.88T_2 \tag{1}$$

$$0.866T_1-0.342T_2=w \tag{2}$$

由方程(1)易得 $T_1>T_2$,所以 T_1 将首先达到最大值.我们由 $T_1=80$ N 求得相应的 w.由(1),

$$1.88T_2=80\text{N}\Rightarrow T_2=42.6\text{N}$$

由(2), $w=(0.866)(80\text{N})-(0.342)(42.6\text{N})=54.7\text{N}$

2.17　图 2-13(a)中重物 W_1 为 300 N.求 T_1、T_2、T_3 和 W_2.

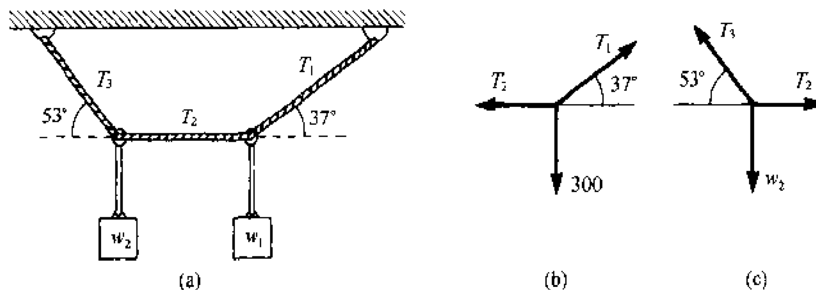


图 2-13

解　☞ 由图 2-13(b): $T_1\sin37°=300$ 得 $T_1=500\text{N}$.又由 $T_2=T_1\cos37°=400\text{N}$.由图 2-13(c), $T_3\cos53°=T_2$,故 $T_3=670\text{N}$.又因 $T_3\sin53°=W_2$,所以 $W_2=530\text{N}$.(注:精确到第 2 位)

2.18　如果图 2-14 中 $\theta_1=\theta_2$,当滑轮摩擦不计时求 T_1、T_2、T_3、W_1 和 W_2 的关系.

解　☞ 在三根绳子的结点处, $T_1\sin\theta_1=T_2\sin\theta_2$,所以 $T_1=T_2$.并且 $T_2=T_3$, $W_2=T_3$.竖直方向的平衡条件为 $W_1=2T_1\cos\theta_1$.所以 $T_1=T_2=T_3=W_2=W_1/(2\cos\theta_1)$.

2.19　如果在图 2-14 中 $\theta_1=53°$, $\theta_2=37°$, W_1 与 W_2 相比为多大?

解 ☞ 因为 $T_2 = T_3 = W_2$, 平衡方程为 $W_2\sin37° = T_1\sin53°$ 和 $T_1\cos53° + W_2\cos37° = W_1$. 把第一个方程中的 T_1 代入第二个方程解得 $W_1 = 1.25W_2$

2.20 如图 2-14 中 $W_1 = W_2$ 且 $\theta_1 = 53°$. 求 θ_2.

解 ☞ 平衡方程为 $W_2\sin\theta_2 = T_1\sin53°$ 和 $T_1\cos53° + W_2\cos\theta_2 = W_2$. 利用第一个方程消去第二个方程中的 T_1 得到

$$\sin\theta_2\cos53° + \cos\theta_2\sin53° = \sin53°$$

即 $\sin(\theta_2 + 53°) = \sin53°$

所以, $\theta_2 = 0$[两重物在同一竖直线上且 $T_1 = 0$]或者$(\theta_2 + 53°) + 53° = 180° \Rightarrow \theta_2 = 74°$["一般"答案].

图 2-14

2.21 在图 2-15(a)中求绳$\overline{AB}$上的张力.

解 ☞ 先由图 2-15(a)中下方结点在竖直方向受力平衡求出绳$\overline{AB}$下方绳中的张力: $2T\cos30° = 70\text{N}$, 所以 $T = 40.4\text{N}$. 结点 B 处的平衡条件[图 2-15(b)]为 $T'\cos40° = T_{AB} + T\sin30°$; $T'\sin40° = T\cos30°$. 代入 T 的值并消去 T' 从而解得 $T_{AB} = 21.5\text{N}$. 根据对称性在 A 点也能得到同样的方程.

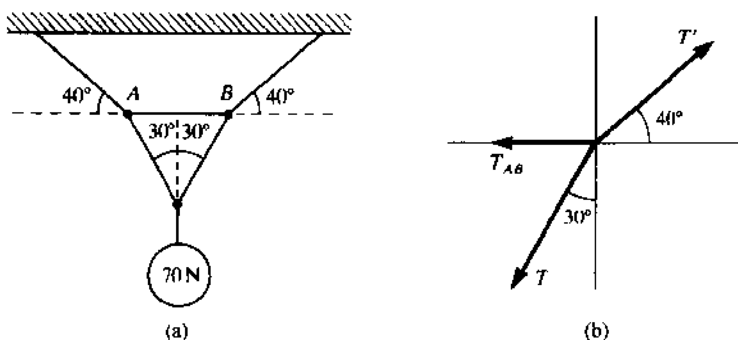


图 2-15

2.22 图 2-16(a)中物体重 w 为 80 N 并处于平衡状态. 求 T_1、T_2、T_3 和 T_4.

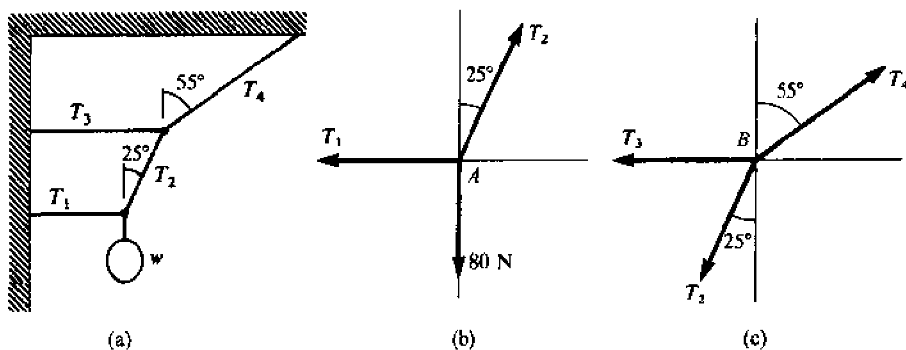


图 2-16

解 ☞ 用 A、B 表示下方和上方的结点, 图 2-16(b)和(c)画出了隔离物体图. 我们先写关于 A 点的平衡方程因为它包含了唯一的已知力.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_2\sin25° - T_1 = 0, T_1 = 0.423T_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_2\cos25° - 80\text{N} = 0, 0.906T_2 = 80\text{N}, T_2 = 88.3\text{N}$$

代入前式得 $T_1 = 37.4\text{N}$.

再研究结点 B, 我们已知 T_2,

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_4\sin55° - T_3 - T_2\sin25° = 0$$

$$0.819T_4 - T_3 - 0.423T_2 = 37.4\text{N} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_4\cos55° - T_2\cos25° = 0 \Rightarrow 0.573T_4 = 80\text{N} \Rightarrow T_4 = 140\text{N}$$

由(1)，$T_3 = 0.819T_4 - 37.4 = 77\text{N}$.

2.23 图 2-17(a)中滑轮的质量和摩擦均可忽略.求图中重 70 N 的重物能拉动的物体 w 的值.

解 ☞ 研究下面处于平衡的滑轮系统(位于重物 w 上方).滑轮质量不计且在 5 个力的作用下处于平衡，如图 2-17(b)所示.T_3、T_4 和 T_1 是绳中张力，绳子绕过正上方的定滑轮，经过动滑轮，再绕过另一定滑轮最后与 70 N 的重物相连.由于滑轮没有摩擦，$T_1 = T_3 = T_4 = 70\text{N}$.对于处于平衡状态的物体，

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1\cos40° - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = (0.766)(70\text{N}) = 53.6\text{N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_3 + T_4 + T_1\sin40° - w = 0$$

$$\Rightarrow w = 70\text{N} + 70\text{N} + (70\text{N})(0.642) = 185\text{N}$$

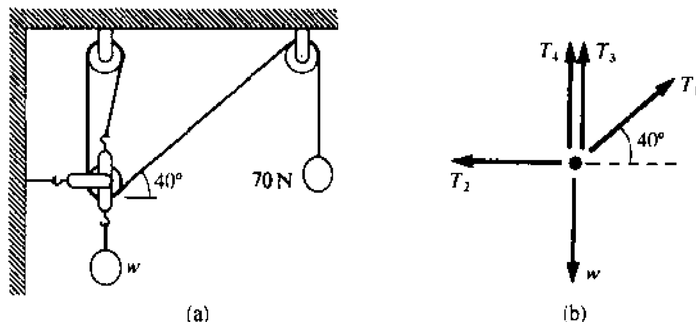


图 2-17

2.24 图 2-18 中拉伸病人腿的水平张力为多大？该装置对腿和脚向上的拉力为多大？不计滑轮的摩擦和质量.

解 ☞ 3 kg 的物体重 30 N.因为滑轮不计摩擦和质量，绳中各处的张力 T 都相等.由于 T 拉住物体，故 $T = 30$ N.装置对腿和脚的拉力来自绳中的张力.水平拉力为 $T + T\cos30° = 56\text{N}$，向上的力为 $T + T\sin30° = 45$ N.

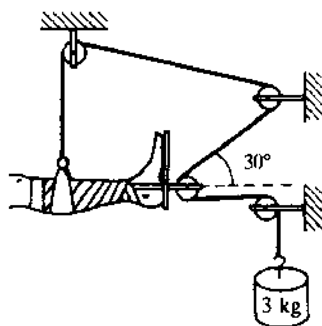


图 2-18

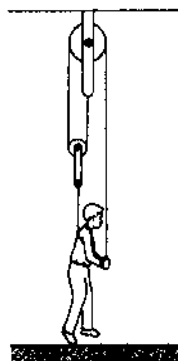


图 2-19

2.25 对于图 2-19 的情形，重 600 N 的人应用多大的力拉动绳子可以使自己离开地面？假设忽略滑轮的摩擦和重力.

解 ☞ 设人拉绳子的力为 T；一根绳子中各处的张力相等.人上方滑轮两边的绳子提供竖直的拉力为 $2T$.竖直方向的合力为 $3T$，与他的重力 600 N 相等.所以人向下的作用力为 200 N.

2.26 在图 2-20 中的装置中，动滑轮和定滑轮都与重 w 的物体相连．求角度 θ．

解 ☞ 因为绳中的张力为 w，由动滑轮的竖直平衡条件 $2w\sin\theta = w$，$\sin\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = 30°$．

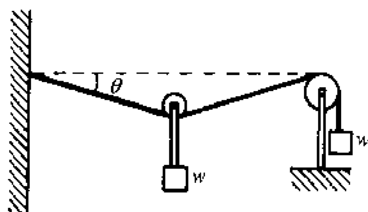


图 2-20

2.2 摩擦力和斜面

2.27 把 200 N 的小车以恒定速度沿倾角为 30°的斜面向上拉．如果忽略摩擦作用则平行于斜面的拉力应为多大？

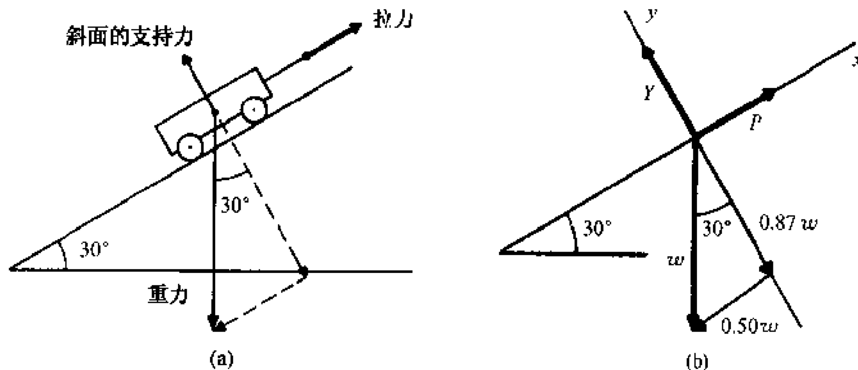


图 2-21

解 ☞ 该题如图 2-21(a)所示．由于小车沿一直线以恒定的速度运动，它的速度矢量恒定．所以小车处于平动的平衡状态，可以运用平衡的第一个条件

把小车作为研究对象，它受到三个不为零的力作用：(1)重力 w，竖直向下；(2)沿斜面把小车拉上斜面的力 P；(3)斜面对小车的支持力 Y．这三个力如图 2-21(b)所示．

对包含斜面在内的情况，取平行于斜面方向为 x 轴方向，垂直于斜面方向为 y 轴方向．沿轴的方向取分量，写出平衡的第一个条件．

$$\sum F_x = 0,\quad 得\quad P - 0.50w = 0,\quad \sum F_y = 0,\quad 得\quad Y - 0.87w = 0$$

由第一个方程且已知 $w = 200\text{N}$，求得 $P = 0.50w = 100\text{N}$．所需的拉力为 100N．

2.28 一只重 100 N 的箱子静止放在水平地面上．箱子与地面的静摩擦系数为 0.4．至少应给箱子提供多大且沿东偏上 30°方向的力才能使之开始运动？

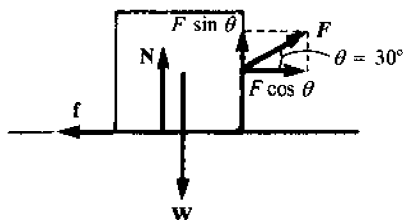


图 2-22

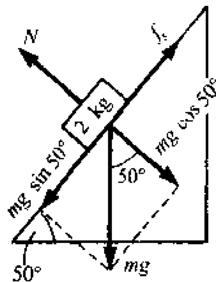


图 2-23

解 ☞ 先在图 2-22 中画出受力示意图．再考虑沿 x 方向的力并应用平衡条件．

$$\sum F_x = 0,\quad F\cos\theta - f = 0,\quad F\cos\theta = f,\quad 0.866F = f = \mu_s N = 0.4N$$

应用 y 方向的受力平衡条件．

$$\sum F_y = 0,\quad N + F\sin\theta - W = 0,\quad N + 0.5F - 100 = 0,\quad N = 100 - 0.5F$$

把 N 代入 $0.866F=0.4N$ 中得

$$0.866F-0.4(100-0.5F),\quad 0.866F+0.2F=40,\quad F=37.5\text{N}$$

2.29 斜面上的木块当倾角为 50°时刚刚开始滑动.(a)求静摩擦系数,(b)如果木块质量为 2 kg,求木块刚开始滑动前的摩擦力.

解 ☞ (a)由图 2-23

$$f_{smax}=mg\sin50^\circ,\quad N=mg\cos50^\circ,\quad \mu_s=f_{smax}/N=\tan50^\circ=1.192$$

(b)$f_s=mg\sin50^\circ=219.87(0.766)=15.0\text{N}$

2.30 一个 50 N 的箱子在 25 N 的力的作用下以某一恒定速度在地面上沿直线滑动,如图 2-24(a)所示.求箱子运动时受到多大的摩擦力?支持力有多大?

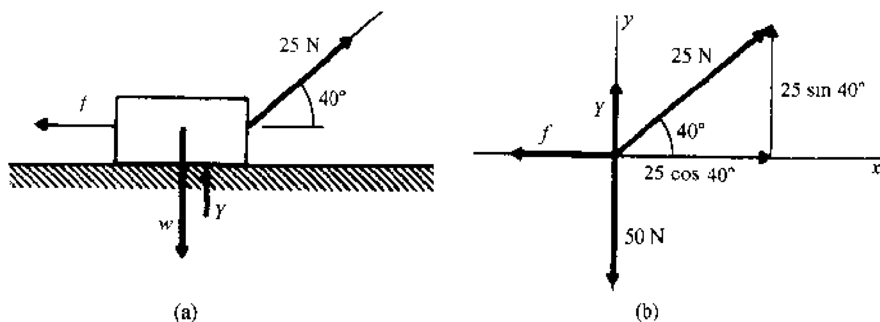


图 2-24

解 ☞ 作用在箱子上的力如图 2-24(a)所示.摩擦力为 f,地面对箱子的支持力为 Y.隔离物体图和各力的分量如图 2-24(b)所示.由于箱子以恒定速度运动,它处于平衡状态.由平衡的第一条件得

$$\sum F_x=0,\quad 即\quad 25\cos40^\circ-f=0$$

解得 $f=19\text{N}$.故摩擦力为 19N.

为求 Y 我们运用

$$\sum F_y=0,\quad 即\quad Y+25\sin40^\circ-50=0$$

解得支持力为 $Y=34\text{N}$.

2.31 图 2-25 中各物体处于平衡.求每种情况下的支持力 Y.

解 ☞ 在每种情况下由 $\sum F_y=0$:

(a) $Y+200\sin30^\circ-500=0$　　解得　　$Y=400\text{N}$

(b) $Y-200\sin30^\circ-150=0$　　解得　　$Y=250\text{N}$

(c) $Y-200\cos\theta=0$　　解得　　$Y=(200\cos\theta)\text{N}$

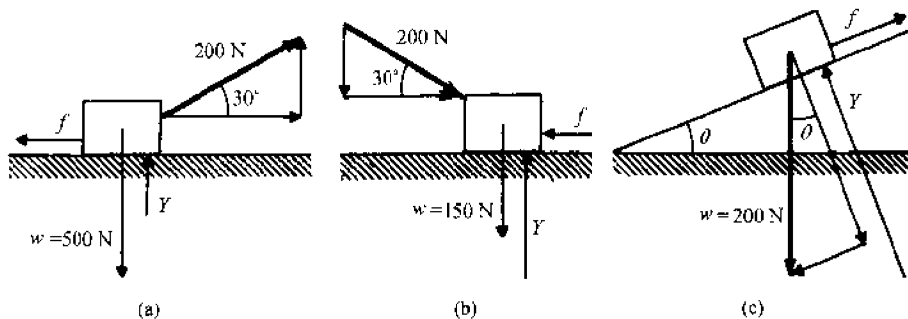


图 2-25

2.32 在 2.31 题的各种情况下,求物体以恒定速度运动时的动摩擦系数.

解 ☞ 我们已在2.31题中求出各种情况下的 Y. 为了求滑动摩擦力 f, 我们运用 $\sum F_x = 0$.

(a) $200\cos30° - f = 0$ 所以 $f = 173\text{N}$

故, $\mu_k = f/Y = 173/400 = 0.43$.

(b) $200\cos30° - f = 0$ 所以 $f = 173\text{N}$

故, $\mu_k = f/Y = 173/250 = 0.69$.

(c) $-200\sin\theta + f = 0$ 所以 $f = (200\sin\theta)\text{N}$

故, $\mu_k = f/Y = (200\sin\theta)/(200\cos\theta) = \tan\theta$.

2.33 假设在图2-25(c)中木块处于静止.斜面的倾角逐渐增加.当 $\theta = 42°$时,木块开始滑动.求木块与斜面的静摩擦系数.(木块及表面与2.31题和2.32题不同.)

解 ☞ 在木块开始滑动的时刻,摩擦力具有临界值.所以 $\mu_s = f/Y$.由2.31题和2.32题中的方法得

$$Y = w\cos\theta \quad 和 \quad f = w\sin\theta$$

所以在滑动刚开始时

$$\mu_s = \frac{f}{Y} = \frac{w\sin\theta}{w\cos\theta} = \tan\theta$$

经实验得 θ 为 $42°$. 所以 $\mu_s = \tan42° = 0.90$.

2.34 两个重物分别悬挂在两个摩擦不计的滑轮上,如图2-26(a)所示.当 W 多大时会使300lb的木块刚好向右运动?

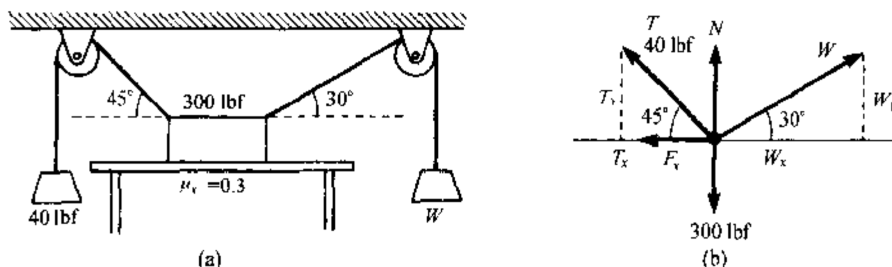


图2-26

解 ☞ 由图2-26(b)的受力示意图所示

$$T_x = 40\cos45° = 28.3(\text{lbf}), \qquad T_y = 40\sin45° = 28.3(\text{lbf})$$

$$\sum F_y = 0, \quad T_y + W_y + N - 300\text{lbf} = 0, \quad 28.3\text{lbf} + W\sin30° + N = 300\text{lbf}$$

$$N = 300\text{lbf} - 28.3\text{lbf} - 0.5W$$

$$\sum F_x = 0, \quad W_x - T_x - \mu_s N = 0, \quad \mu_s = 0.3$$

把 $N = 271.7\text{lbf} - 0.5W$ 代入后一个方程得

$$W\cos30° - 28.3\text{lbf} - 0.3(271.7\text{lbf} - 0.5W) = 0$$

解得 $W = 108\text{lbf}$.

2.35 假设图2-27(a)中 $W = 60\text{lbf}$, $\theta = 43°$, $\mu_k = 0.3$.当用多大的力沿斜面推木块可使之以恒定的速度(a)向斜面上方运动(b)向斜面下方运动?

解 ☞ 重力分量为

$$W_X = (60\text{lbf})\sin43° = 40.92\text{lbf}, \quad W_Y = (60\text{lbf})\cos43° = 43.88\text{lbf}$$

(a)由图2-27(b),

$$\sum F_Y = 0, \quad N - W_Y = 0, \quad N = 43.88\text{lbf}$$

$$F_k = \mu_k N = 0.3(43.88), \quad F_k = 13.16\text{lbf}$$

$$\sum F_x = 0, \quad P - F_k - F_x = 0, \quad P = 13.16 + 40.92, \quad P = 54.1\text{lbf}$$

(b)若推力使木块以恒定的速度向下运动,由图2-27(c),

$$\sum F_x = 0,\ P + F_k - W_x = 0,\ P = 40.92\text{lbf} - 13.16\text{lbf},\ P = 27.81\text{lbf}$$

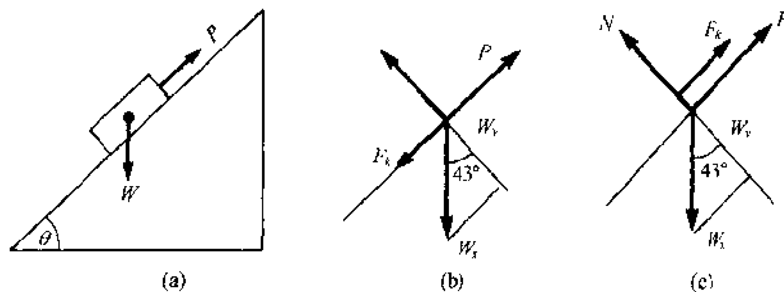


图 2-27

2.36 如果斜面的静摩擦系数为 $\mu_s = 0.4$，则要使 200N 的木块停在 60°的斜面上，水平推力应为多大？

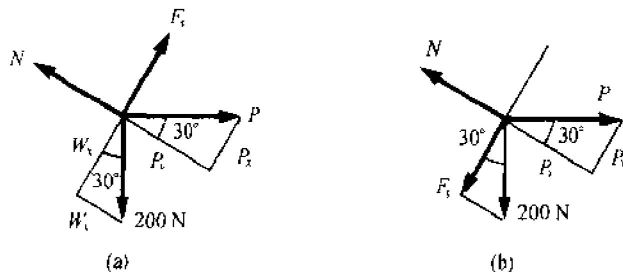


图 2-28

解 ☞ 由图 2-28(a)知

$$W_X = 200\cos30° = 173.2(\text{N}),\quad W_y = 200\sin30° = 100(\text{N}),\quad Fs = \mu_s N$$

$$\sum F_y = 0,\quad N - P_y - W_y = 0,\quad P_y = P\cos30°,$$

$$N = P\cos30° + W_y = 0.866P + 100\text{N}$$

$$\sum F_x = 0,\quad P_x + \mu_s N - W_x = 0,\quad \mu_s = 0.4$$

$$P\sin30° + 0.4(0.866P + 100\text{N}) - 173.2\text{N} = 0$$

$$0.5P + 0.346P + 40\text{N} - 173.2\text{N} = 0,\ P = 157\text{N}$$

2.37 在 2.36 题中，当水平推力为多大时木块开始向斜面上方滑动？

解 ☞ 现在由图 2-28(b)所示

$$\sum F_y = 0,\quad N = 100\text{N} + 0.866P,\quad \sum F_x = 0,\quad P\sin30° - W_x - \mu_s N = 0$$

$$0.5P - 173.2\text{N} - (0.4)(0.866P + 100\text{N}) = 0$$

$$0.5P - 173.2\text{N} - 0.346P - 40\text{N} = 0,\ P = 1390\text{N}$$

2.38 在图 2-29(a)中系统处于平衡.(a)如果作用在 40 N 的木块上的摩擦力不超过 12.0 N，则 w 的最大值是多少？(b)求木块与桌面的静摩擦系数.

解 ☞ (a)木块和绳结的受力分析如图 2-29(b)和(c)所示

$$f_{s\max} = 12.0\text{N},\quad 即\quad T_{2\max} = 12.0\text{N}$$

对于绳结

$$T_2 = T_3\cos30°,\qquad w = T_3\sin30°$$

消去 T_3，得到 $w = T_2\tan30° = 0.577T_2$. 故 $w_{\max} = 0.577T_{2\max} = 6.92\text{N}$.

(b) $\mu_s = f_{s\max}/N = 12/40 = 0.30$.

2.39 图 2-29(a)中的木块就要滑动. 如果 $w = 8.0\text{N}$，求木块与桌面的静摩擦系数.

解 ☞ 在木块就要滑动时 $f_s = f_{smax}$，对应悬挂物体的重为 $w = 8.0\text{N}$. 与 2.38 题相同. $w = 0.577T_2$ 和 $T_2 = f_s$. 所以 $f_{smax} = w/0.577 = 8.0/0.577 = 13.9(\text{N})$；$\mu_s = 13.9/40 = 0.346$.

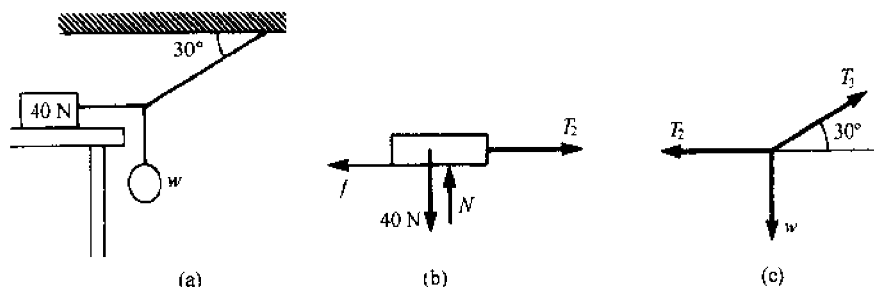


图 2-29

2.40 求图 2-30 中各种平衡情况下木块受到的支持力.

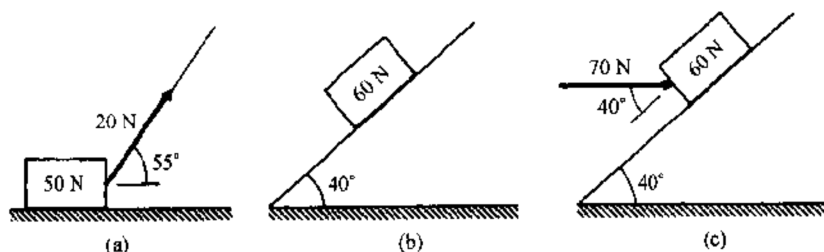


图 2-30

解 ☞ 在三种情况下物体由于受到摩擦力而处于平衡. 但求 N 时不需知道摩擦力.

(a)隔离物体图如图 2-31(a)所示($F = 20\text{N}$, $w = 50\text{N}$).

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - w + F\sin 55° = 0$$

$$N = 50\text{N} - (20\text{N})(0.819) = 33.6\text{N}$$

(b)隔离物体图如图 2-31(b)所示($W = 60\text{N}$).

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - w\cos 40° = 0, \quad N = (60\text{N})(0.766) = 46.0\text{N}$$

(c)隔离物体图如图 2-31(c)所示($F = 70\text{N}$, $w = 60\text{N}$).

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - w\cos 40° - F\sin 40° = 0$$

$$N = 60(0.766) + 70(0.643) = 91.0(\text{N})$$

2.41 图 2-30(a)中的木块在力的作用下以恒定的速度滑动. (a)求阻碍该运动的摩擦力大小. (b)求木块与平面间的滑动摩擦系数.

解 ☞ 由图 2-31(a),

(a) $\sum F_x = 0 \Rightarrow F\cos 35° - f = 0 \quad (N_x = W_x = 0)$ 即 $20(0.573) = f = 11.5\text{N}$

(b) $\mu_k = \dfrac{f}{N} = \dfrac{11.5\text{N}}{34\text{N}} = 0.34$

2.42 图 2-30(b)中的木块以恒定的速度滑下斜面. (a)求阻碍物块运动的摩擦力的大小. (b)求木块与斜面间的滑动摩擦系数.

解 ☞ 由图 2-31(b)

(a) $\sum F_x = 0 \Rightarrow f - w\sin 40° = 0$, $f = 60\text{N}(0.643) = 38.6\text{N}$

(b) $\mu_k = \dfrac{f}{N} = \dfrac{38.6\text{N}}{46\text{N}} = 0.84$

2.43 当图 2-30(c)中的推力增加到 70 N 时，木块开始沿斜面向上滑动. (a)木块上的最大静

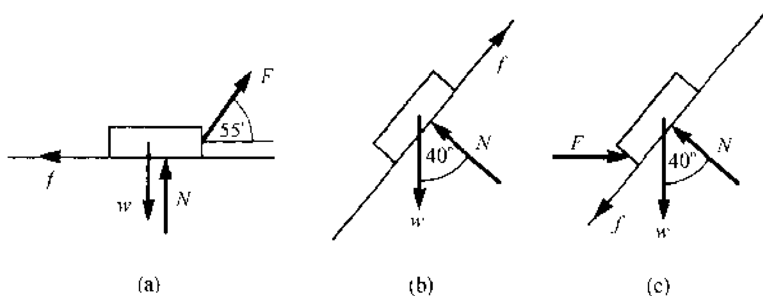


图 2-31

摩擦力是多大？(b)求静摩擦系数的大小.

解 ☞ 由图 2-31(c)

(a) $\sum F_x = 0 \Rightarrow F\cos40° - W\sin40° - f = 0$, $F = 70$N 木块刚好开始移动 $\Rightarrow f = f_{s\max} = 70(0.766) - 60(0.643) = 15.0$(N)

(a) $\mu_s = \frac{f_{s\max}}{N} = \frac{15.0\text{N}}{91\text{N}} = 0.17$

2.44 在图 2-32(a)中当悬挂的物体重 220 N 时系统处于静止. 求 200 N 的物体受到摩擦力的大小和方向.

解 ☞ 因为滑轮没有摩擦，绳子上的拉力处处相等. 两个物体的隔离物体图，如图 2-32(b)和(c)所示. 摩擦力 f 的方向沿斜面向上还是向下取决于题目本身. 在本题中由 $T = 220$ N 我们能马上断定摩擦力沿斜面向下. 与 T 方向相反并沿斜面方向的是 200 N 的物体沿斜面向下的分量. 该分量肯定小于 200 N 故也没有 T 大. 所以摩擦力沿斜面向下. 由 $\sum F_x = 0$ (沿斜面)有 $T - 200\sin35° - f = 0 \Rightarrow f = 200 - 200(0.574) = 105$(N).

(在该题中无需计算支持力 N.)

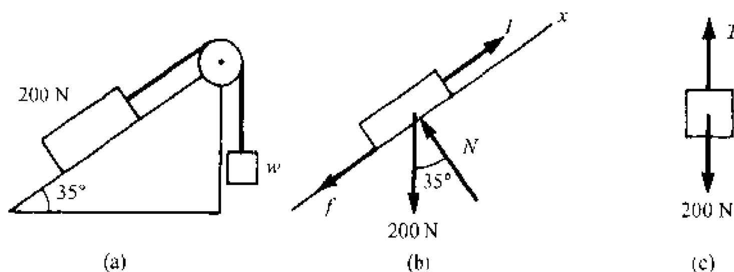


图 2-32

第三章　一维运动学

3.1　量纲和单位;恒加速问题

3.1　一辆小车的里程表在旅程刚开始时为 22687 km,在旅程结束时的读数为 22791 km. 整个旅程共花了四个小时. 那么这辆车的平均速率是每小时多少千米? 每秒多少米?

解　☞ $平均速率=\dfrac{行进距离}{所花时间}=\dfrac{(22791-22687)\ \text{km}}{4\text{h}}=26\text{km/h}$

也可以写成$平均速率=26\ \dfrac{\text{km}\times(1000\text{m/km})}{\text{h}\times(3600\ \text{s/h})}=7.2\text{m/s}$

3.2　一辆汽车以 25km/h 的速度先前进了四分钟,然后以 50km/h 的速度前进了 8 分钟,最后以 20km/h 的速度又前进了 2 分钟. 试问(a)总共前进了多少千米? (b)整个过程的平均速度是每秒多少千米?

解　☞ (a)运动的距离 $=d_1+d_2+d_3$,其中

$$d_1=\left(25\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)(4\text{min})\left(\frac{1\text{h}}{60\text{min}}\right)=1\ \frac{2}{3}\text{km}$$

$$d_2=\left(50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)(8\text{min})\left(\frac{1\text{h}}{60\text{min}}\right)=6\ \frac{2}{3}\text{km}$$

$$d_3=\left(20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)(2\text{min})\left(\frac{1\text{h}}{60\text{min}}\right)=\frac{2}{3}\text{km}$$

所以　$d_1+d_2+d_3=9\text{km}$

(b)$平均速度=\dfrac{d_1+d_2+d_3}{总共时间}=(9\text{km}\times1000\ \text{m/km})/(14\text{min}\times60\text{s/min})$

$=10.7\text{m/s}$

3.3　一跑步者在 50 s 内在圆形跑道上走了 1.5 圈. 跑道的直径是 40 m,它的周长是126 m. (a)求跑步者的平均速率,(b)跑步者的平均速度的大小是多少?

解　☞ (a)$平均速率=\dfrac{路程}{时间}=\left(\dfrac{1.5\ 圈}{50\text{s}}\right)(126\text{m/圈})=3.78\text{m/s}$

(b)平均速度是矢量. 它等于与运动起止时间 50 秒所对应的位移矢量除以时间间隔. 既然走过的路程是 $1\ \frac{1}{2}$ 圈,那么矢量位移的端点应该是从跑道的起点到$\frac{1}{2}$圈那一点上,正好穿过跑道的直径. 而平均速度的大小等于位移的大小除以时间,所以平均速度的大小 = 40m/50s = 0.80m/s.

3.4　利用量纲分析判断下列等式哪个是错的:

$$\lambda=vt,\quad F=\frac{m}{a},\quad F=\frac{mv}{t},\quad h=\frac{v^2}{2g},\quad v=(2gh)^{\frac{1}{2}}$$

其中 λ 和 h 都是长度,以及$[F]=[\text{MLT}^{-2}]$. 其它符号都具有它们通常代表的意义.

解　☞ $[vt]=[\text{LT}^{-1}][\text{T}]=[\text{L}]$,而$[\lambda]=[\text{L}]$,所以等式 $\lambda=vt$ 是正确的. $[mv/t]=[\text{M}][\text{LT}^{-1}]$. $[\text{T}^{-1}]=[\text{MLT}^{-2}]$,所以 $F=mv/t$ 是正确的. $[v^2/2g]=[(\text{L}^2/\text{T}^2)/(\text{L}/\text{T}^2)]=[\text{L}]$,所以$[h]=[\text{L}]$, $h=v^2/2g$从量纲上讲是正确的. 既然$[v]=[\text{LT}^{-1}]$, $[(2gh)^{1/2}]=[(\text{L}^{1/2}T^{-1})\text{L}^{1/2}]=[\text{LT}^{-1}]$,所以 $v=(2gh)^{1/2}$也是正确的. 注意,那些纯数字是无量纲的.

3.5　如果 s 表示路程,t 表示时间,那么在下列等式中 c_1、c_2、c_3、c_4 它们的量纲是什么?

$$s=c_1t,\quad s=\frac{1}{2}c_2t^2,\quad s=c_3\sin c_4t$$

(提示:三角函数无量纲.)

解　☞ “s”的量纲为[L],所以在等式右边的所有表达式都有长度的量纲. 而$[c_1]=[\text{L/T}]$,所以$[c_1t]$也等于$[(\text{L/T})\text{T}]=[\text{L}]$, $[c_2]=[\text{LT}^{-2}]$, $[c_3]=[\text{L}]$,因为正弦函数无量纲,所以,三角函数无单位,于是$[c_4]=[\text{T}^{-1}]$.

3.6 一绳波的波速 v 是由绳上的张力F 和每单位的质量 m/l 决定的. 如果[F] = [ML].[T]$^{-2}$是已知的, 试分析下列波速方程上的恒量 a 和 b 的量纲: v = 常量. $F^a\ (m/l)^b$.

解 ☞ 由题意知$[v] = [F^a][m/l]^b$. 代入$[v]$和$[F]$的量纲代速式, 得$[M^0L^1T^{-1}] = [MLT^{-2}]^a$. $[ML^{-1}]^b = [M]^{a+b}[L]^{a-b}[T^{-2}]^a$. 方程两边的幂指数应相等; 因此有, $a+b=0$, $a-b=1$, 和 $2a=1$, 得到 $a=\frac{1}{2}$和 $b=-\frac{1}{2}$.

3.7 用 f 来表示挂在一弹簧末端质量为 m 的物体的振动频率, 弹簧的劲度系数是 k, 且满足关系式 f = 常量 $\cdot\, m^ak^b$. 试用量纲分析求 a 和 b 的数值. 已知$[f] = [T]^{-1}$和$[k] = [M][T]^{-2}$.

解 ☞ $f\propto m^ak^b\to[M^0T^{-1}] = [M^a][M^bT^{-2b}] = [M^{a+b}T^{-2b}]$

所以　$a+b=0$ 和　$-2b=-1$　或　$b=-a=\frac{1}{2}$

3.8 一物体初速为 8 m/s, 以恒定加速度沿着直线前进, 40 s 内前进了 640 m. 在这 40 s 的时间内, 试求(a)平均速度, (b)末速度, (c)加速度.

解 ☞ 设 $t=0$ 时, $x=0$

(a)平均速度 = $\frac{\text{位移}}{\text{时间}} = \frac{640\text{m}}{40\text{s}} = 16\text{m/s}$

(b,c) $v_f = v_0 + at$. 我们知道 $v_0 = 8\text{m/s}$ 和 $t = 40\text{s}$, 但我们不知道 a. 而 $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$　或　$640\text{m} = (8\text{m/s})(40\text{s}) + \frac{1}{2}a(40\text{s})^2$

解之, 我们得到 $a = \frac{2(640-320)\text{m}}{1600\text{s}^2} = 0.40\text{m/s}^2$

代入速度计算式, $v_f = 8\text{m/s} + (0.40\text{m/s}^2)(40\text{s}) = 24\text{m/s}$

3.9 一卡车从静止开始以恒定加速度 5 m/s² 运动. 试计算运动 4 s 后的速率和距离.

解 ☞ $v_f = v_0 + at$, $v_0 = 0$, $a = 5\text{m/s}^2$, $t = 4\text{s}$

$$v_f = 0 + (5\text{m/s}^2)(4\text{s}) = 20\text{m/s}$$

在此题中走过的距离与位移的大小相等, 所以有

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}(5\text{m/s}^2)(4\text{s})^2 = 40\text{m}$$

3.10 一箱子以恒定的加速度沿一斜面下滑. 从静止开始, 经过 3 s, 速率达到 2.7 m/s. 试求(a)加速度, (b)在前 6 s 内走过的距离.

解 ☞ 设 x, v 表示沿斜面运动的位移和速度.

(a) $v_f = v_0 + at$, 我们已知 $v_0 = 0$, $v_f = 2.7\text{m/s}$, $t = 3.0\text{s}$; 于是有 $2.7\text{m/s} = 0 + a(3.0\text{s})$, 所以 $a = 0.90\text{m/s}^2$. 现在(b) $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}(0.90\text{m/s}^2)(6.0\text{s})^2 = 16.2\text{m}$.

3.11 一轿车从静止出发, 以恒定加速度沿一山坡下滑. 如它在 8 s 内走了 90 m, 试求(a)加速度, (b)8 s 后的速度.

解 ☞ (a) $s = \frac{1}{2}at^2(v_0 = 0)$, $90 = \frac{1}{2}a(8)^2$, $a = \frac{180}{64} = 2.8\text{m/s}^2$ (b) $v = at = 2.8\times8 = 22.4\text{m/s}$

3.12 一轿车以恒定的加速度经过相距 30 m 的两个检查站, 所花时间是 4.0 s. 轿车经过第一个检查站时的速率是 5.0 m/s. 试求这辆轿车的加速度及经过第二个检查站时的速率.

解 ☞ 把第一检查站作为起点, 把第二检查站作为终点. 则, $v_0 = 5.0\text{m/s}$, $x = 30\text{m}$, $t = 4.0\text{s}$. 我们用位移方程求 a

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \text{即 } 30\text{m} = (5.0\text{m/s})(4.0\text{s}) + \frac{1}{2}a(4.0\text{s})^2, a = 1.25\text{m/s}^2$$

$$v_f = v_0 + at \text{ 得出 } v_f = 5.0\text{m/s} + (1.25\text{m/s}^2)(4.0\text{s}) = 10\text{m/s}$$

3.13 一汽车的速度从 6.0 m/s 均匀地加速到 20 m/s, 经过的距离 70 m. 求加速度和所用时间.

解 ☞ 已知 $v_f=20\text{m/s}$ 和 $v_0=6.0\ \text{m/s}$ 及经过距离是 70 m. 既然所花时间没给出,我们用公式 $v_f^2=v_0^2+2ax$ 来求解 a,有 $(20\text{m/s})^2=(6.0\text{m/s})^2+2a(70\text{m})$. 得出 $a=2.6\text{m/s}^2$. 那么 t 立即从下式得出

$$v_f=v_0+at,20\text{m/s}=6.0\text{m/s}+(2.6\text{m/s}^2)t,t=5.4\text{s}$$

3.14 一飞机从静止出发,在起飞前一直沿地面加速. 在 12 s 内走了 600 m. 试求(a)加速度,(b)12 s 末的速度,(c)第 12 s 内走过的距离.

解 ☞ 已知 $v_0=0, x=600\text{m}, t=12\text{s}$

(a) $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, 有 $600\text{m}=0+\frac{1}{2}a(12\text{s})^2$. 所以 $a=8.33\text{m/s}^2$

(b) $v_f=v_0+at$, 有 $v_f=v_0+(8.33\text{m/s}^2)(12\text{s})\Rightarrow v_f=100\text{m/s}$

(c)考虑到第一秒意味着是介于 $t=0$ 和 $t=1\text{s}$ 之间,因此第 12s 是介于 $t=11$ 和 $t=12\text{s}$ 之间. 既然我们已经知道 $x(t=12\text{s})$,我们求解 $x(t=11\text{s})$:

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad 得到\ x=0+\frac{1}{2}(8.33\text{m/s}^2)(11\text{s})^2=504\text{m}$$

得到答案 Δx(第十二秒内)$=x(t=12\text{s})-x(t=11\text{s})=96\text{m}$

3.15 一火车以初速 30 m/s 作匀减速运动一直到停止,只花了 44 s. 试求加速度和经过的距离.

解 ☞ 已知 $v_0=30\text{m/s}$ 及 $v_f=0$ 及 $t=44\text{s}$.

$$v_f=v_0+at\Rightarrow 0=30\text{m/s}+a(44\text{s}),\ 得到\ a=-0.68\text{m/s}^2.$$

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=(30\text{m/s})(44\text{s})+\frac{1}{2}(-0.68\text{m/s}^2)(44\text{s})^2=662\text{m}$$

3.16 一物体初速为 13 m/s,以每秒改变 2.0 m/s 的变化率作匀减速运动,运动时间为6 s. 试分析(a)末速率,(b)在 6 s 内的平均速率,(c)在 6 s 中走过的距离.

解 ☞ 以"每秒改变 2.0m/s"减速意味着 $a=-2.0\text{m/s}^2$. 我们已知 $v_0=13\text{m/s}$ 和 $t=6.0\text{s}$(a) $v_f=v_0+at=13\text{m/s}+(-2.0\text{m/s}^2)(6.0\text{s})=1.0\text{m/s}$. 因为瞬时速率指瞬时速度的大小,答案是 1.0m/s.

(b,c)平均速率 $=\frac{距离}{时间}$.

当物体作单方向直线运动时,距离和位移的大小是一致的. 在本题中 6 s 末的速度仍然是正的,说明还没有作返回运动. 对于位移, $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=(13\text{m/s})(6.0\text{s})+\frac{1}{2}(-2.0\text{m/s}^2)(6.0\text{s})^2=42\text{m}$. 平均速率 $=42\text{m}/6.0\text{s}=7.0\text{m/s}$.

3.17 火箭推进式小车由静止从原点出发,以 $a=5\text{m/s}^2$ 的恒定加速度沿 x 轴正方向运动了 8 s直到汽油耗尽. 随后以恒定速度前进. 问这辆斩车在 12 s 内行进的距离是多少?

解 ☞ 从 x_0 到燃料耗尽的距离是 $x_1=(0)(8)+\frac{1}{2}(5)(8)^2=160(\text{m})$, 在这一时刻 $v=(2ax_1)^{1/2}=40\text{m/s}$. 因此在 12s 内的距离是 $x_2=x_1+v(12-8)=160+(40)(4)=320(\text{m})$.

3.18 一质点如图 3-1 以匀加速度 -4m/s^2 沿 x 轴运动. 当它经过原点时,速度是 20 m/s. 在这个问题中,时间 t 是从质点在原点开始计算的. (a)当距离 x' 和时间 t' 分别是多少时 $v=0$? (b)当 $x=15\text{m}$ 时,时间是多少? 在这一时刻质点的速度是多少? (c)质点在 $x=+25$ m 的速度是多少? 在 $x=-25\text{m}$ 呢? 并求出质点在 $x=55$ m 时的速度大小.

解 ☞ (a)应用公式 $v=v_0+at, 0=20+(-4)t', t'=5\text{s}$.

那么 $x'=v_0t'+\frac{1}{2}at'^2=(20)(5)+\frac{1}{2}(-4)(5)^2=50(\text{m})$. 或者从公式 $v^2=v_0^2+2ax$:

$$0=(20)^2+2(-4)x' \quad 得出 \quad x'=50\text{m}$$

(b) $15=20t+\frac{1}{2}(-4)t^2,\quad 2t^2-20t+15=0$

解这方程, $t=\frac{20\pm\sqrt{(20)^2-4(2)(15)}}{4}=\frac{1}{4}(20\pm16.7)$

得出 $t_1=0.81s$, $t_2=9.2s$, 其中 t_1 是从原点到 $x=15$ m 的时间, t_2 是质点从 O 点出发经过 $x=15$ m 处,继续前进又返回到该点所花的时间. 在 $x=15$ m,

$$v_1=20-4(0.81)=+16.7\text{m/s},\quad v_2=20-4(9.2)=-16.7\text{m/s}$$

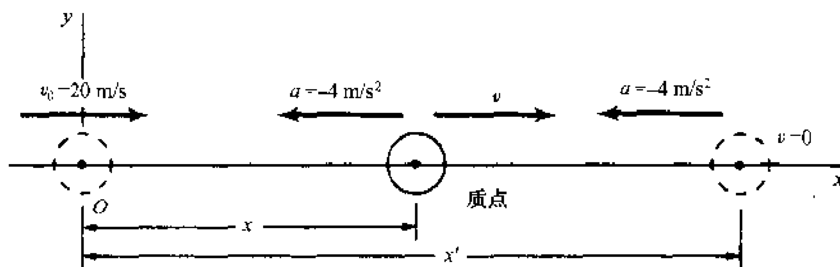


图 3-1

发现速度大小是相等的.

(c)在 $x=25$m, $v^2=(20)^2+2(-4)(25)$, 有 $v=\pm14.1$m/s;在 $x=-25$m, $v^2=20^2+2(-4)\cdot(-25)$, 得出 $v=-24.5$m/s. (为什么 $v=+245$m/s 被舍去了?)

设 $x=55$m, $v^2=20^2+2(-4)(55)$, 得出 $v=\pm\sqrt{-40}$.

v 的虚值说明 x 决不可能达到 55 m, 结果与(a)一致.

3.19　一物体从静止作自由落体运动. 试求(a)加速度,(b)在 3 s 内下降的高度,(c)下降 70 m 后的速度大小,(d)速度到达 25m/s 所花的时间,(e)下落 300 m 所花时间.

解 ☞ (a)设向下 y 为正. 得出 $a=g=9.8\text{m/s}^2$

(b)当 $t=3.0$s, $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2=0+\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)(3.0\text{s})^2=44$m

(c)设 $y=70$m, 我们有 $v_f^2=v_0^2+2ay=0+2(9.8\text{m/s}^2)(70\text{m})=1372\text{m}^2/\text{s}^2\Rightarrow v_f=37$m/s

(d)设 $v_f=25$m/s, 有 $v_f=v_0+at$, $25\text{m/s}=0+(9.8\text{m/s}^2)t\Rightarrow t=2.55$s

(e)我们设 $y=300$m, 有 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, $300\text{m}=0+\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)t^2\Rightarrow t=7.8$s

3.20　从一座桥上掉下的一球碰到水面用了 5 s. 计算(a)球碰到水面时的速率,(b)桥离水面的高度.

解 ☞ 取 y 轴向下作为正方向. 有 $a=g=9.8\text{m/s}^2$. 已知 $v_0=0$, $t=5$s 时球碰到水面. 设 $v=v_f$

(a) $v=v_0+at=0+(9.8\text{m/s}^2)(5\text{ s})=49$m/s, (b) $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2=0+\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)(5\text{s})^2=123$m

3.21　一球以初速 25ft/s 从一高崖边缘被竖直抛下. (a)当它在 1.5s 后运动的速率是多少? (b)在 1.5s 后它已移动了多少距离?

解 ☞ (a) $v=v_0+at=25+32(1.5)\Rightarrow v=73$ft/s($a=g=32\text{ft/s}^2$)

(b)因加速度恒定, $\bar{v}=\frac{1}{2}(v+v_0)=\frac{1}{2}(73+25)=49$(ft/s)

$S=\bar{v}t=49(1.5)=73.5$(ft),　$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2=25(1.5)+\frac{1}{2}(32)(1.5)^2=37.5+36=73.5$(ft).

3.22　一石头从高度为 25 m 处以初速 8m/s 向下抛出. 试求(a)石头到达地面的时间,(b)碰到地面时的速率.

解 ☞ 选择向下为正. $a=g=9.8\text{m/s}^2$. 得出 $v_0=8$m/s. (a)可以通过直接求解 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, 即 $25\text{m}=(8\text{m/s})t+\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)\cdot t^2$ 求 t. 但先求得末速度更方便 (b) $v_f^2=v_0^2+2ay=(8\text{m/s})^2+2(9.8\text{m/s})(25\text{m})=554\text{m}^2/\text{s}^2$, 得 $v_f=23.5$m/s. 再回到(a), $v_f=v_0+at$ 结果 $23.5\text{m/s}=8\text{m/s}+(9.8\text{m/s}^2)t$, 得出 $t=1.58$s.

3.23　一球被竖直抛出又返回到起点用了 4 s. 试求它的初速.

解 ☞ 让我们取向上为正.对于从开始到结束的整个过程,有 $y=0$, $a=-9.8\text{m/s}^2$, $t=4s$.注意到这段过程的起点和终点是相同的,于是位移是 0 m.利用 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$,发现 $0=v_0(4\text{s})+\frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)(4\text{s})^2$,可以得到 $v_0=19.6\text{m/s}$

3.24 高射炮弹以初速 500m/s 竖直射向空中.忽略摩擦,计算(a)能达到的高度,(b)到达最高点的时间,(c)在 60 s 末时的瞬时速度,(d)什么时候它的高度是 10 km?

解 ☞ 取向上为正方向.在最高点,炮弹速度为 0.

(a) $v_f^2=v_0^2+2ay$, $0=(500\text{m/s})^2+2(-9.8\text{m/s}^2)y$, $y=12.8\text{km}$

(b) $v_f^2=v_0^2+at$, $0=500\text{m/s}+(-9.8\text{m/s}^2)t$, $t=51\text{s}$

(c) $v_f^2=v_0+at$, $v_f=500\text{m/s}-(-9.8)(60\text{s})=-88\text{m/s}$

因为 v_f 是负的,我们取向上为正的,速度是向下的.炮弹在 60s 时正向下.

(d) $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 10000\text{m}=(500\text{m/s})t+\frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)t^2\rightarrow 4.9t^2-500t+10000=0$

给出

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

得 $t=27\text{s}$ 和 75s.在 $t=27\text{s}$,炮弹达到 10 km 处,并正在上升;在 $t=75\text{s}$,它在同样高度,但正在下降.

3.25 一物体从离地 300 m,且以 13m/s 的速度上升的气球上掉下.对于这一物体,试求(a)它所能达到的最大高度.(b)它被释放 5s 后的位置和速度.(c)达到地面前,它在空中的时间.

解 ☞ 物体被释放时它的初速与气球的速度是一致的,也是 13m/s,速度向上.让我选择向上为正,并取 $y=0$ 在释放点.

(a)物体在它的最高点,$v_f=0$.从 $v_f^2=v_0^2+2ay$, $0=(13\text{m/s})^2+2(-9.8\text{m/s}^2)y$,得出 $y=8.6\text{m}$.最大的高度是 $300+8.6=308.6(\text{m})$.(b)把 $t=5\text{s}$ 时刻的位置作为末位置.从 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$, $y=(13\text{m/s})(5\text{s})+\frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)(5\text{s})^2=-58\text{m}$.所以它的高度是 $300-58=242(\text{m})$并且,从 $v_f=v_0+at$, $v_f=13\text{m/s}-(-9.8\text{m/s}^2)(5\text{s})=-36\text{m/s}$.此时它以 36m/s 的速度向下运动.

(c)在它碰到地面之前,物体的位移是 -300 m. $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 变成 $-300\text{ m}=(13\text{m/s})t+\frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)t^2$,有 $4.9t^2-13t-300=0$.解该二次方程可得出 $t=9.3\text{s}$(另一值 -6.6s,没有物理意义).

3.26 一石块以 40 m/s 的初速从一悬崖(高为 110m)边缘竖直上抛.忽略空气阻力,计算该石块落到崖底所需时间.此时速度是多少?

解 ☞ 取竖直向上为正. $a=-g=-9.8\text{m/s}^2$, $v_0=40\text{m/s}$, $y=-110$ m.首先得出最终速度: $v^2=v_0^2+2ay=40^2+2(-9.8)(-110)=3756(\text{m}^2/\text{s}^2)$在这个位置 $v=-61.3\text{m/s}$(向下运动).从 $v=v_0+at$

$$-61.3=40+(-9.8)t \quad 得出 \quad t=10.3\text{ s}$$

3.27 桩锤以 25ft/s 的速度敲击木桩.桩锤应从离桩顶多少高度落下?忽略阻力.

解 ☞ 取向下为正.我们假设锤子以静止下落,有 $v_0=0$, $v=25\text{ft/s}$, $a=g=32\text{ft/s}^2$.我们不必关心下落时间 t,因此我们能够根据 $v^2=v_0^2+2ay$, $(25\text{ft/s})^2=2(32\text{ft/s}^2)y$ 得出 $y=9.8\text{ft}$.

3.28 一棒球以 30m/s 的速度被竖直抛出.(a)它将上升多长时间?(b)它能升多高?(c)它离开手后又回到起点需多长时间?(d)什么时候它的速率达到 16m/s?

解 ☞ 取向上为正.有 $a=-g=-9.8\text{m/s}^2$, $v_0=30\text{m/s}$

(a)在最高点 $v=0$;达到最高点的时间,由 $v=v_0+at$ 得出 $0=30\text{m/s}+(-9.8\text{m/s}^2)t$, $\Rightarrow t=3.06\text{s}$.

(b)$y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (30\text{m/s})(3.06\text{s}) + \frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)(3.06\text{s})^2 = 46\text{m}$,[或 $v^2 = v_0^2 + 2ay \Rightarrow 0 = (30\text{m/s})^2 + 2(-9.8\text{m/s}^2)y, \Rightarrow y = 46\text{m}$].(c)无需再次计算:既然上升时间等于下降时间,我们以2倍向上的时间得6.12s,它是全程时间.对于最后的位移,我们有 $y=0$,因此 $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 0 = (30\text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9.8)\text{m/s}^2)t^2$,这是一个二次方程,但容易解.一个答案是 $t=0$,但它对应于 $y=0$.另一个答案不是0,所以我们除以 t,有

$$0 = 30\text{m/s} - (4.9\text{m/s}^2)t, \quad t = 6.12\text{s}$$

(d)重新强调一下速率是速度的大小,我们必须考虑可能的速度:$v = +16\text{m/s}$. $v = v_0 + at \Rightarrow \pm 16\text{m/s} = 30\text{m/s} + (-9.8\text{m/s})t$;解得 $t: t_+ = 1.43\text{s}, t_- = 4.7\text{s}$.

3.29　火星表面的重力加速度可以认为是 4m/s^2.如果一宇航员在火星表面以10m/s的速度竖直向上掷出一扳手,问(a)它升高的时间是多少?(b)上升的高度是多少?(c)在 $t=3\text{s}$ 时的速度,(d)在3s时的位移.

解　☞ 取向上为正.那么 $a = -4\text{m/s}^2$, $v_0 = +10\text{m/s}$.

(a)利用运动方程 $a = (v - v_0)/t$,我们有

$$-4\text{m/s}^2 = \frac{0 - 10\text{m/s}}{t}, t = 2.5\text{s}$$

(b)利用运动方程 $v^2 = v_0^2 + 2as$,有

$$0^2 = (10)^2 + 2(-4)s_{max} \Rightarrow s_{max} = 12.5\text{m}$$

(c)利用 $a = (v - v_0)/t$,有

$$-4 = \frac{v_3 - 10}{3}, \quad v_3 = -2\text{m/s}, \quad \text{或} \quad 2\text{m/s 向下}$$

(d)利用 $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$,因此

$$s_3 = (10 \times 3) + \frac{1}{2}(-4)(9) = 30 - 18 = 12(\text{m})$$

3.30　月球表面的重力加速度是 1.67m/s^2.如果一人将一石块在地球表面向上扔到12.0 m,此人在月球上能将此石块扔多高?假设这两个例子中扔出速率是相同的.

解　☞ 在地球上我们可写出 $v_E^2 = 2gh_E(h_E = 12\text{ m})$,而在月球上有 $v_M^2 = 2g_Mh_M$.扔出的速率是相同的,所以第二个表达式可以被第一个相除,得出 $h_M = 12(g_E/g_M) = 12(9.80/1.67) = 70(\text{m})$

3.31　一质子在一均匀电场中以恒定加速度沿一直线前进.它从静止出发在1 m的距离内获得1000km/s的速度.(a)它的加速度是多少?(b)到达所要求的速度所需时间是多少?

解　☞ (a)$v_0 = 0$, $v = 10^6\text{m/s}$ 在 $x = 10^{-2}\text{m}$ 这样的位移中.那么 $v^2 = v_0^2 + 2ax$, $(10^6\text{m/s})^2 = 0 + 2a \cdot (10^{-2}\text{m})$,或 $a = 5.0 \times 10^{13}\text{m/s}^2$

(b)$v = v_0 + at$, $10^6\text{m/s} = 0 + (5.0 \times 10^{13}\text{m/s}^2)t$, $t = 2.0 \times 10^{-8}\text{s}$.

3.32　从一气球上掉下的一瓶花了20s时间到达地面.在下列条件中分析气球的高度(a)它是静止在空中的,(b)当瓶落下时气球正以50m/s的速度上升.

解　☞ 对于(a)和(b)取向上为正,$a = -g = -9.8\text{m/s}^2$.

(a)$v_0 = 0$.为了求得高度,设 y 是 t 时刻的位移(注意 $y=0$ 在气球处)且 $t = 20\text{s}$.那么 $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)(20\text{s})^2 = -1960\text{m}$.高度是 $|y| = 1960\text{m}$.(b)瓶子一开始具有和气球相等的速度 $v_0 = 50\text{m/s}$.现在 $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (50\text{m/s})(20\text{s}) + \frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)(20\text{s})^2 = -960\text{m}$.高度 $|y| = 960\text{m}$.

3.33　一沙袋从正以40ft/s速度上升的气球上掉下.如果沙袋到达地面花了20s,那么当沙袋掉落时,气球有多高呢?忽略空气阻力.

解　☞ 取向下为正.有 $a = g = 32\text{ft/s}^2$ 和 $v_0 = -40\text{ft/s}$.

$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = -40(20) + \frac{1}{2}(32)(20)^2 = -800 + 6400 = 5600(\text{ft})$$

气球在离地面 5600ft 的高度.

3.34 一石块以 80ft/s 的速率从高为 224ft 的塔上竖直扔下.求它到达地面上的速率.

解 ☞ 取向上为正. $a = g = -32\text{ft/s}^2$, $v_0 = 80\text{ft/s}$. 假定石块与塔边缘擦肩而过,且打在 224ft 深的地面上.我们可以避开时间利用在方程中的 $y = -224\text{ft}$.

$$v^2 = v_0^2 + 2ay = (80\text{ft/s})^2 + 2(-32\text{ft/s}^2)(-224\text{ft}) = 20736\text{ft}^2/\text{s}^2$$

解得 $v = \pm 144\text{ft/s}$, 在这里,负号给出的是物理解.速率是: $|v| = 144\text{ft/s}$.

3.35 一镙帽从正以 3.0m/s 上升的电梯底部的镙母松开.该镙帽花了 2 s 时间打在了井筒底部.(a)当镙帽掉落时,电梯离井筒底部多远?(b)0.25 s 后(镙帽掉落),镙帽离筒底多远?

解 ☞ 在本题中,镙帽在一开始具有与电梯相同的速率,所以取向上为正, $v_0 = 3.0\text{m/s}$. $a = -g = -9.8\text{m/s}^2$.

(a)到达井底的时间是 2.0s, $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (3.0\text{m/s})(2.0\text{s}) + \frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)\cdot(2.0\text{s})^2 = -13.6\text{m}$. 此时井底与电梯(当螺帽掉落之时)的高度差为 13.6m.

(b)新的位移 y, 当 $t = 0.25\text{s}$ 时,有 $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (3.0\text{m/s})(0.25\text{s}) + \frac{1}{2}(-9.8\text{m/s}^2)(0.25\text{s})^2 = 0.44\text{m}$. 因而镙帽的位置高于它的初始位置.现在离井底的高度是 $0.4 + 13.6 = 14.0(\text{m})$.

3.2 图像和其它问题

3.36 一物体的运动图像(沿一直线)如图 3-2.试求物体在 A 点、B 点的瞬时速度.物体的平均速度是多少?它的加速度呢?

解 ☞ 因为速度由图像中直线的斜率 $\Delta x/\Delta t$ 给出.我们作在 A 点的切线.切线是和直线一致的.对于图中用虚线构成的三角形,我们有 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4\text{m}}{8\text{s}} = 0.50\text{m/s}$.

这也是在 B 点和直线上任何一点的速度.可以得出 $a = 0$ 和 $\bar{v}_x = v_x = 0.50\text{m/s}$.

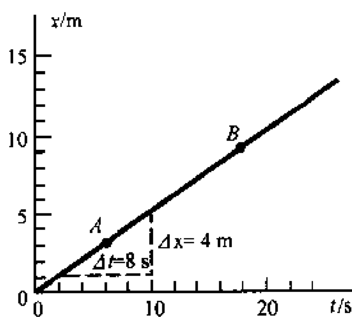


图 3-2

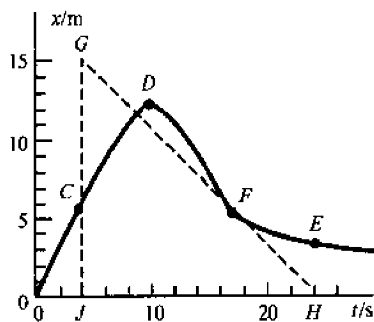


图 3-3

3.37 如图 3-3 所示.试求该运动轨迹中物体在 F 点的瞬时速度.

解 ☞ 在 F 点的切线是 GH. 作三角形 GHJ, 我们有

$$\Delta t = 24 - 4 = 20(\text{s}), \quad \Delta x = 0 - 15 = -15(\text{m})$$

由斜率可得

$$F \text{点} \; v_F = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-15\text{m}}{20\text{s}} = -0.75\text{m/s}$$

负值告诉我们物体正沿 $-x$ 方向运动.

***3.38**[c] 还是如图 3-3, 一物体沿 x 轴运动.求物体在下列几点的瞬时速度:(a)在 D 点,(b)在 C 点,(c)在 E 点.

* 打"c"上标的题需用微积分. ——译者注

解　☞ (a) D 点是曲线的最高点. 有 $v = dx/dt = 0$.

(b) 没有 x 和 t 确切的函数关系(在 C 点), 我们不能得出一个很精确的答案. 我们所能做的是画出在 C 点的切线, 得出斜率. 结果是 $v_c = \frac{dx}{dt}\big|_c \approx 1.3\text{m/s}$

(c) 我们的做法和(b)是一样的, 但这里的切线斜率是负的, 答案应该是 $v_E = \frac{dx}{dt}\big|_E \approx -0.13\text{m/s}$.

3.39　一女孩沿着东西方向的街道行走, 她从家出发的位移图像如图 3-4. 试求整个过程中的平均速度和在 A、B、C 三点的瞬时速度.

解　☞ 平均速度是 0, 因为位移矢量是 0.

瞬时速度是各点所在曲线的斜率. A 点的速度是 $40/6 = 6.7\text{m/min}$. B 点速度是 0. 在 C 点是 $-65/5 = -13\text{m/min}$ 方向向东, 或 $+13\text{m/min}$ 方向是向西.

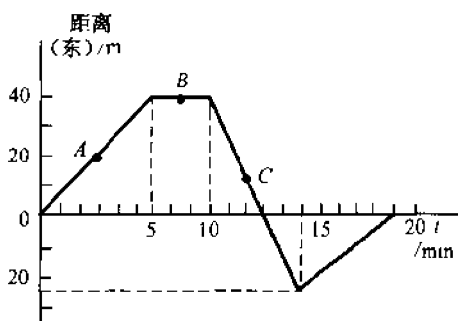


图 3-4

3.40　如图 3-4, 试求 (a) 7min 到 14min 时间间隔内的平均速度, (b) 在 $t = 13.5\text{min}$ 时的瞬时速度, (c) $t = 15\text{min}$ 时的瞬时速度.

解　☞ (a) $\bar{v} = (-25-40)/(14-7) = -9.3\text{m/min}$, 方向向东.

(b) 和 C 点情况一样, 也是 -13m/min, 方向向东.

(c) 斜率是 $25/(19-14) = 5.0\text{m/min}$, 方向向东.

3.41　在图 3-5 中, 给出了一粒子沿 x 轴运动的图像. 试估算 (a) 从 A 点到 C 点间隔的平均速度, (b) D 点的瞬时速度, (c) A 点的瞬时速度

解　☞ (a) $\bar{v} = (4.8-0)/(8.0-0) = 0.60(\text{cm/s})$

从图上在每点的斜率可知, (b) $v = -0.48\text{cm/s}$ 和 (c) 13cm/s

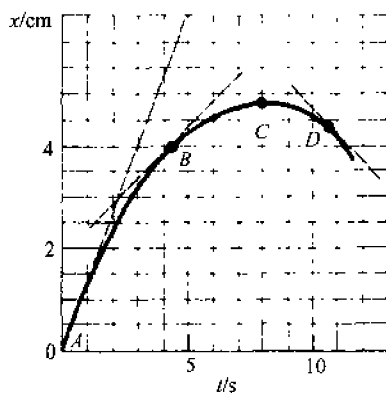


图 3-5

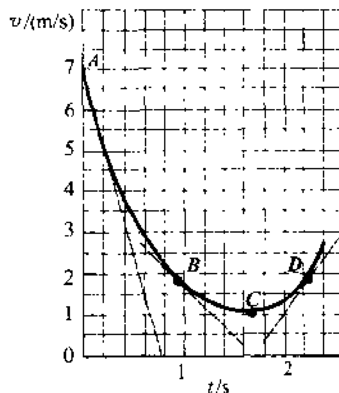


图 3-6

3.42　图 3-6 画出了一质点沿 x 轴运动的速度情况. 试求它在 A 点和 C 点的加速度.

解　☞ 在任何时刻的加速度大小是 v-t 图的斜率. (a) 从过 A 点与两轴相交的切线来看, A 点的斜率是 $a = -7.0/0.73 = -9.6\text{m/s}^2$. (b) C 点的斜率是 0, 所以 $a = 0$.

3.43　根据 3-6 图的运动图像, 试求在 (a) B 点的加速度, (b) D 点的加速度.

解　☞ 作过 B 点和 D 点的切线, 计算斜率, 我们可以发现加速度是 (a) -2.4m/s^2 和 (b) 3.2m/s^2.

3.44　一球从高为 50 m 的塔顶被竖直向上以 20m/s 的初速抛出, 如图 3-7. 在返回过程中, 经过塔边并最终落在地面上. (a) 从小球被抛出到经过塔边缘共需多长时间? 此时的 v_1 是多少? (b) 小球到达地面的总时间 t_2 是多少? 到达地面时的速度 v_2 是多少?

解 ☞ (a)对如图 3-7 所示的坐标系，有 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$.对于塔边缘有 $y=0$，因而有 $0=20t_1+\frac{1}{2}(-9.8)t_1^2$，得出 $t_1=0$，物理意义是球被释放的瞬间；也有 $t_1=4.08$s，它是向上及回到塔边缘的时间．那么，从 $v=v_0+at$，$v_1=20+(-9.8).(4.08)=-20$(m/s)，与初速度相反．

(b) $-50=20t_2+\frac{1}{2}(-9.8)t_2^2$

有 $t_2=5.8$s

$v_2=20+(-9.8)(5.8)=-37$m/s

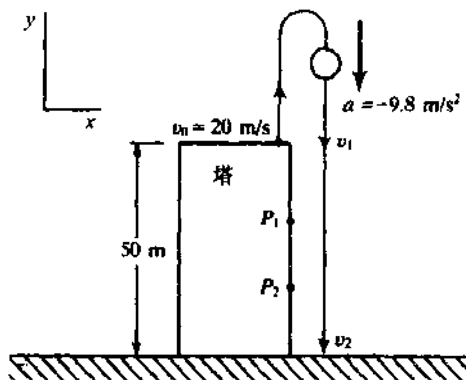


图 3-7

3.45 参见题 3.44 和图 3-7.(a)球能达到的离地面的最大高度是多少？(b)点 P_1 和点 P_2 分别距离塔顶 15 m 和 30 m.球经过 P_1 到 P_2 所需时间是多少？(c)如果希望当球经过塔边缘后，到达地面的时间是 3s，那么它被向上抛出时的速度是多少呢？

解 ☞ (a)离地最大高度：$h=y_{max}+50$.从 $v_0^2+2ay_{max}=0$，

$$有\ y_{max}=\frac{-(20)^2}{-2(9.8)}=20.4\text{m}\quad 所以\ h=70.4\text{m}.$$

(b)如果 t_1 和 t_2 是到达 P_1 和 P_2 的时间，分别地，有

$$-15=20t_1-4.9t_1^2\ 和\ -30=20t_2-4.9t_2^2\quad 解之,$$

$$t_1=4.723\text{s},\ t_2=5.248\text{s}$$

从 P_1 到 P_2 经历的时间是 $t_2-t_1=0.525$s.

(c)如果 v_0 是所需的初速度，那么 $-v_0$ 就是向下经过塔边的速度．那么，运用 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$；对于经塔向下的一段路程，有 $-50=(-v_0)(3)-4.9(3)^2$，得出 $v_0=1.96$m/s.

3.46 一人以 4.0 m/s 的速度追赶一辆停着的公共汽车．当他离车门有 6.0 m 时($t=0$)，公共汽车开始向前运动并保持着加速度 1.2m/s².(a)那人到达车门将花多长时间？(b)如果在一开始他是离车门 10.0 m，他能追上吗？

解 ☞ 在 $t=0$ 时，设该人的位置是原点，$x_{mo}=0$.汽车门在 $x_{bo}=6.0$ m.对于人和汽车的运动方程是

$$x_m=x_{mo}+v_{mo}t+\frac{1}{2}a_mt^2,\quad x_b=x_{bo}+v_{bo}t+\frac{1}{2}a_bt^2$$

有

$$v_{mo}=4.0\text{m/s},\quad v_{bo}=0,\quad a_m=0,\quad a_b=1.2\text{m/s}^2$$

因而有

$$x_m=4.0t,\quad x_b=6.0+0.6t^2$$

当人追上车时，$x_m=x_b$ 有 $4.0t=6.0+0.6t^2$.

又可以表达成 $3t^2-20t+30=0$.解这二次方程，

$$t=\frac{20\pm\sqrt{400-360}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{10}}{3}=2.3(\text{s}),4.4(\text{s})$$

注意这儿有两个正时间答案．可以按下面理解．$t_1=2.3$s，对应着他第一次到达车门．这是问题正确的解．然而，我们已经解的方程不知道他将停止追汽车并远离汽车；方程让他继续以一恒定速度奔跑，于是他又超过汽车；但当汽车开始加速，它最终达到一更大速度并追上人，于是 $t_2=4.4$s.

(b)如果汽车的初始位置是 10.0 m，那么 $x_m=x_b$，结果 $3t^2-20t+50=0$，只有两个复数解．说明那人不可能追上汽车．

3.47 一球以速度 v 从一高为 h 的高度被竖直抛出．证明球最终到达地面所花的时间是

$\frac{v}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2hg}{v^2}}\right)$

证 ☞ 假设向上为正,恒定加速度方程是 $-h = vt - gt^2/2$;这可以写成 $t^2 - 2vt/g - 2h/g = 0$. 解之,就得我们想要的结果. 注意 t 取正号.

3.48 一球从一建筑物顶端落下. 该球花了 0.5s 从距楼顶有一段距离、长度是 3 m 的窗户经过. (a)当它经过窗顶时速度是多少? (b)窗户顶端离小球落下点距离是多远?

解 ☞ 在楼顶端的速度 v_T 和在窗户底部的速度 v_B 在下面的方程中是有联系的: $\bar{v} = (v_T + v_B)/2 = 3/0.5 = 6$, 有 $v_T + v_B = 12$, 和 $v_B = v_T + g(0.5)$, 有 $v_B - v_T = 4.9$. 这两个表达式中消去 v_B 就得出 $v_T = 3.55\text{m/s}$. 相应的距离是

$$h = \frac{v_T^2}{2g} = \frac{(3.55)^2}{2(9.8)} = 0.64(\text{m})$$

3.49 一卡车以恒定速度 21m/s 向前运动. 司机看见前方距离 110 m 处有一静止的轿车. 经过一段"反应时间"Δt, 他踩了刹车, 导致卡车产生一个 -3m/s^2 的加速度. (a)避免碰撞所允许的最大 Δt 是多少, 卡车在完全刹住前向前运动多长距离? (b)假设反应时间是 1.4s, 卡车停止后将距轿车多远? 距司机第一次看见轿车有几秒钟?

解 ☞ 卡车在司机看见轿车以后的总位移是 $x = v_0\Delta t + x_A$ 其中 x_A 是从开始减速到速度为零的位移. 有 $v_0 = 21\text{m/s}$ 及 $a = -3\text{m/s}^2$. x_A 能从方程 $v_f^2 = v_0^2 + 2ax_A$ 中得出, 有 $v_f = 0$. 因而 $x_A = -v_0^2/2a$, $x_A = -(21\text{m/s})^2/(-6\text{m/s}^2) = 73.5\text{m}$.

(a)为了求出最大 Δt, 我们注意到 $x_{max} = 110\text{m}$ 和 $x_{max} = (21\text{m/s})\Delta t_{max} + x_A$, 有 $110\text{m} = (21\text{m/s})\cdot\Delta t_{max} + 73.5\text{m}$, 有 $\Delta t_{max} = 1.74\text{s}$. 从刹车开始以前卡车运动的距离当然是 $v_0\Delta t = 36.5\text{m}$.

(b)如果 $\Delta t = 1.4\text{s}$, 那么 $x = (21\text{m/s})(1.4\text{s}) + 73.5\text{m} = 102.9\text{m}$. 到轿车的距离是 $110\text{m} - 102.9\text{m} = 7.1\text{m}$. 为了解出时间, 我们需要知道卡车加速期间的时间 t. 我们有 $v_f = v_0 + at$, 有 $v_f = 0$ 和 $a = -3\text{m/s}^2$. 那么有 $0 = 21\text{m/s} - (3\text{m/s}^2)t$ 和 $t = 7\text{s}$. 总时间是 $t + \Delta t = 7 + 1.4 = 8.4(\text{s})$.

3.50 一轿车从静止开始以加速度 1.4m/s^2 开始加速前进, 一辆公共汽车以 12m/s 的速度平行地经过它. (a)小轿车需花多长时间追上公共汽车? (b)此时轿车的速度是多少? (c)轿车此时已经行进了多远了?

解 ☞ 轿车以初速度 0 以恒加速度 $a_c = 1.4\text{m/s}^2$ 前进, 此时公共汽车具有恒速 $v_b = 12\text{m/s}$. (a)在时间 t 内走过相同的路程, 有 $a_ct^2/2 = v_bt$ 得出 $t = 17\text{s}$. (b)轿车此时的速度 $v = a_ct = 24\text{m/s}$. (c) $x = v_b\cdot t = 12\text{m/s}\cdot 17\text{s} = 204\text{m}$.

3.51 一猴在离地 20 m 高的栖木上垂直向下扔下一椰子果, 而你正以 1.5m/s 的速度正经过该树底下. (a)当椰子果着地时离你有多远? (b)如果猴子想要扔中你的脚趾, 那么应该什么时候扔呢?

解 ☞ 椰子果下落 20 m 的时间由公式 $20 = gt^2/2$ 给出, 得出 $t = 2.02\text{s}$. 距离 $x = (1.5\text{m/s})(2.02\text{s}) = 3.03\text{m}$. 既然你以恒速前进, 那么猴子应该提前 2.02s 扔下椰子果

3.52 两个球从不同高度落下. 一球在另一球下落 2s 后开始下落, 但它们却同时着地, 并且时间是第一球下落后 5s. (a)它们两球的高度差是多少? (b)第一个下落的球的高度是多少?

解 ☞ 从较高处 h_1 该球落下的时间是 $t = 5\text{s}$; 另一从较低处 h_2 落下的时间是 $t - 2 = 3\text{s}$. 利用 $y = at^2/2$, 我们分析(a) $h_1 - h_2 = g(5^2/2 - 3^2/2) = 78\text{m}$ 和(b) $h_1 = 9.8(25)/2 = 123(\text{m})$.

3.53 两个男孩分别从相距 100 m 的两个地方相向奔跑. 其中一男孩速度是 5m/s, 而另一男孩的速度是 7m/s. 当他们相遇时离较慢男孩的起点是多远?

解 ☞ 两个男孩同时同地相遇. 较慢者前进 x 所花时间是 $x/5$, 另一男孩是 $t = (100 - x)/7$. 根据两时间相等可得出 $x = 41.7\text{m}$.

3.54 球 1, 如图 3-8, 从一光滑斜面的顶点被静止释放, 与此同时球 2 以某一速度在斜面底部

沿斜面向上运动，并且两球刚好在斜面的中点相遇．试求(a)球 2 的初始速度，(b)当两球相遇时，它们的速度．

解 ☞ (a)在同一时间 t，球 1 运动的距离是

$$\frac{l}{2} = (0)t + \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

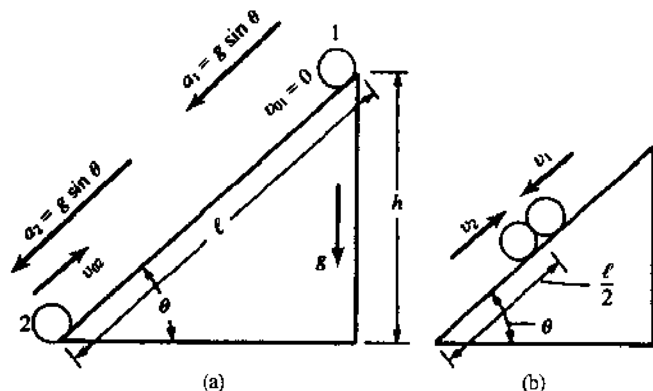


图 3-8

球 2 运动的距离是$\frac{l}{2} = v_{02}t + \frac{1}{2}(-g\sin\theta)t^2$

两方程相加，可得出 $l = v_{02}t$ 和 $t = l/v_{02}$．将 t 值代入第一个方程可以解出 v_{02}，我们得到 $v_{02} = \sqrt{gl\sin\theta} = \sqrt{gh}$．

(b) $v_1^2 = o^2 + 2(g\sin\theta)\frac{l}{2}$， $v_1 = \sqrt{gl\sin\theta} = \sqrt{gh}$

$$v_2^2 = v_{02}^2 + 2(-g\sin\theta)\frac{l}{2} = gl\sin\theta - gl\sin\theta = 0, \quad v_2 = 0$$

3.55 两列火车都以速度 20m/s 在同一轨道上相向前进．当它们相距 2 km 时，它们互相看见对方并开始减速．(a)如果它们都是匀减速，多大的加速度才能使两列火车刚好避免相撞？(b)如果只有一列火车以这样的加速度减速，在相撞之前，它还能走多远？

解 ☞ (a)每列火车停在 1000 m 处，因此用 $v^2 - v_0^2 = 2ax$，因为 $v_0 = 20\text{m/s}$，加速度是 -0.2m/s^2．

(b)减速火车前进的距离是 $x - 20t - 0.1t^2$，而另一列火车前进$(2000 - x) = 20t$．因为它们相撞，时间是相同的．消去时间 t 解出 x 得到 828 m．

3.56 一从静止作自由落体运动的球花了 6s 砸坏并穿过一水平放置在空中的玻璃碟子，因而失去 2/3 的速度．如果它又用了 2s 到达地面，试求碟子的离地高度．

解 ☞ 从 $v = v_0 - at$，撞击碟子之前的速度是 $v_1 = 0 - 9.8(6) = -58.8(\text{m/s})$，因此穿过碟子后球的速度是$(1/3)v_1 = -19.6\text{m/s}$．因而 $-h = (-19.6)(2) - 4.9(2)^2$，得出 $h = 58.8\text{m}$．

3.57 一斜面，如图 3-9，与水平地面的夹角是 θ．在斜面上的一槽 OA 与 OX 轴的夹角是 α．一光滑的短小圆柱体在重力作用下沿槽 OA 下滑，在(x_0, y_0)处从静止出发．问(a)它沿凹槽下滑的加速度，(b)到达 O 点的时间，(c)在 O 点的速度．设 $\theta = 30°$，$x_0 = 3\text{m}$，$y_0 = 4\text{m}$．

解 ☞ (a)g 沿 oy 轴的分量是 $g\sin\theta$；因此，沿斜槽的重力加速度分量是 $a = g\sin\theta\sin\alpha$．有

$$\sin\alpha = \frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}} = 0.8 \quad \text{得出} \sin\theta = 0.5$$

$$a = (9.8)(0.5)(0.8) = 3.92\text{m/s}^2$$

(b)$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$，其中 $s = (x_0^2 - y_0^2)^{1/2} = 5\text{m}$ 和 $v_0 = 0$．因此 $s = \frac{1}{2}(3.92)t^2$，$t = 1.597\text{s}$．

(c)$v = 0 + (3.92)(1.597) = 6.26(\text{m/s})$．

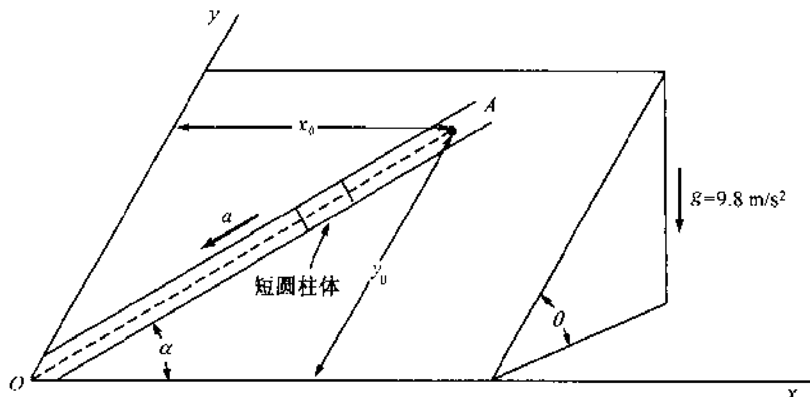


图 3-9

3.58 一有孔珠子(图 3-10),沿一固定在半径为 R 圆上连 P_1 和 P_2 的光滑直线自由下滑.如珠子静止从圆周的最高点 P_1 出发,求(a)到达 P_2 的速度 v,(b)到达 P_2 的时间,并证明从 P_1 出发经任意的弦,珠子下滑时间均相等.

解 ☞ (a)沿直线下滑珠子的加速度是 $g\cos\theta$,而该线的长度是 $2R\cos\theta$.因此,$v^2=0^2+2(g\cos\theta)\cdot(2R\cos\theta)$,有 $v=2\sqrt{gR}\cos\theta$.

(b)$t=\dfrac{v}{a}=\dfrac{2\sqrt{gR}\cos\theta}{g\cos\theta}=2\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ 不管 P_2 在圆周的何处,时间值是相同的.

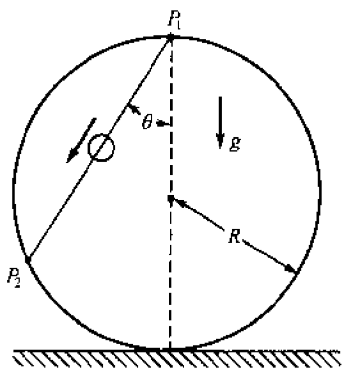


图 3-10

3.59[c] 一物体按某一要求沿 x 轴运动,即它的位移由公式 $x=30+20t-15t^2$ 给出,x 的单位是 m,t 的单位是 s.(a)求速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x}$ 的表达式.加速度是恒定的吗?(b)求物体的初速和初始位置.(c)离原点什么时候和多少距离时速度是 0?(d)在什么时候和什么地点速度是 -50 m/s?

解 ☞ 注意所有单位都是 SI 制,有

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\qquad \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

(a)$v=\dot{x}=(20-30t)$m/s;$a=\ddot{x}=-30$m/s^2.加速度是恒定的.

(b)在 $t=0$,$x=30$m$=x_0$,$\dot{x}=20$m/s$=v_0$.

(c)从速度方程中,有 $v=0$,$0=20-30t$ 和 $t=\dfrac{2}{3}$s.将 $t=\dfrac{2}{3}$s 代入位移方程,$x=30+20\left(\dfrac{2}{3}\right)-15\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=36.7$(m).

(d)$v=-50$m/s,$-50=20-30t$,有 $t=2\dfrac{1}{3}$s.那么,$x=30+20\left(2\dfrac{1}{3}\right)-15\left(2\dfrac{1}{3}\right)^2=-5.0$(m).

(注意:由于将位移方程和 $x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ 进行比较,不需要用到微积分)

3.60[c] 沿 x 轴一质点运动,速度由公式 $v=4t-2.50t^2$cm/s 给出,求它在下述时间的加速度(a)$t=0.50$s 和(b)$t=3.0$s.

解 ☞ $a=dv/dt=4-5.0t$,得出(a)$a=1.50$cm/s^2 和(b)-11.0cm/s^2.

3.61[c] 一球从峡谷的边缘由静止释放.假设空气阻力给它造成的加速度是 $-b\dot{y}$,对于 y 取向

下为正.(负加速度与速度 $\dot{y}$ 成比例;常数 b 由实验可得.)该球具有的总加速度是 $-b\dot{y}+g$,于是有

$$\ddot{y} = -b\dot{y} + g \tag{1}$$

它是质点运动的微分方程.

(a)证明:$y = k(e^{-bt}-1)+(g/b)t$ (2)

是方程(1)的解,其中 k 为任意常数,并验证 $t=0$ 时,$y=0$.(b)既然在 $t=0$ 时,$\dot{y}=0$,证明 $k=g/b^2$ 并证明当 $t\to\infty$,$\dot{y}\to g/b$;也就是说,当下降速度到达一极值时;由于空气阻力产生的负加速度和重力加速度正好抵消,因而 $\ddot{y}=0$.(c)假定 $b=0.1\text{s}^{-1}$,求 10s 以前的下降距离及速度大小.(d)证明 1min 以后球将到达它的极限速度 98m/s.

解 ☞ (a)微分一次,得 $\dot{y}=-bke^{-bt}+g/b$.再微分一次,有 $\ddot{y}=b^2ke^{-bt}$. $-b$ 乘以 $\dot{y}$ 的表达式再加 g 得出 b^2ke^{-bt}.因而式(1)是满足的.将 $t=0$ 代入式(2),由于 $e^0=1$,我们得到 $y=0$.

(b)既然球是从静止被释放,在 $t=0$ 时 $\dot{y}=0$. 利用(a)中求得的 $\dot{y}$ 的表达式,我们有 $0=-bk+g/b$,可以得出 $k=g/b^2$. 当 $t\to\infty$,$\dot{y}$ 的第一项变得无限小因而 $\dot{y}\to g/b$. $\ddot{y}$ 必然趋向于0,就如我们从 $\ddot{y}$ 的表达式中看到的.

(c)如果 $b=0.1$,及利用 $g=9.8\text{m/s}^2$,我们有 $k=g/b^2=980$ m.那么在 $t=10\text{s}$ 时,$y=(980\text{m}).(e^{-1}-1)+(98\text{m/s})(10\text{s})=360\text{m}$.

$v=\dot{y}=(-98\text{m/s})e^{-1}+(9.8\text{m/s}^2)(0.1\text{s})=62\text{m/s}$.

(d)在 $t=60\text{s}$,$\dot{y}=(-98\text{m/s})e^{-6}+98\text{m/s}$.因为 $e^{-6}\approx 0.0025$,于是 $\dot{y}=98\text{m/s}$.

3.62[c] 一球从坐标轴的原点处被竖直向上抛出(Y 轴向上),初速度是 $\dot{y}_0$.假设像题 3.61 一样——加速度 $-b\dot{y}$ 是由空气阻力引起的,我们可以写出

$$\ddot{y} = -b\dot{y} - g \tag{1}$$

[注,当 $\dot{y}$ 改变符号时,也是 $-b\dot{y}$;因此(1)式对向上及向下运动都适用].(a)证明 $y=k(e^{-bt}-1)-(g/b)t$ 对于任意 k 都是方程(1)的解.(b)证明 $k=-\frac{1}{b}\cdot\left(\dot{y}_0+\frac{g}{b}\right)$,(c)假设 $b=0.1\text{s}^{-1}$ 和 $\dot{y}_0=50\text{m/s}$,求在 $t=3\text{s}$ 时的高度和速度.(d)该球达到最大高度需要多长时间? 高度是多少?

解 ☞ (a)$\dot{y}=-bke^{-bt}-g/b$, $\ddot{y}=b^2ke^{-bt}$.用 $-b$ 乘以 $\dot{y}$ 再减去 g 得 $\ddot{y}$,就能证明 y 是(1)的解.

(b)当 $t=0$,$\dot{y}=\dot{y}_0=-bk-g/b$.得 $k=-(\dot{y}_0+g/b)/b$.

(c)$b=0.1\text{s}$,及 $\dot{y}_0=50\text{m/s}$.那么 $k=-(50+98)/0.1=-1480(\text{m})$.在 $t=3\text{s}$,我们有 $y=-1480(e^{-0.3}-1)-(98)(3)=89.6(\text{m})$.$\dot{y}=+148e^{-0.3}-98=11.6(\text{m/s})$.

(d)对于最大高度,$\dot{y}=0$,结果 $0=148e^{-0.1t}-98$,或 $e^{0.1t}=1.51$.因而 $t=4.12\text{s}$.将 $t=4.12\text{s}$ 代入 y 方程,得 $y=-1480(e^{-0.412}-1)-(98)(4.12)=96.0(\text{m})$.

3.63[c] 一物体挂在弹簧末端上下振动,满足方程 $y=8\sin 1.5t\text{cm}$ 其中 t 的单位是 s,角度用 rad.(a)物体在 $t=0.75\text{s}$ 时的速度是多少?(b)在 $t=3.0\text{s}$ 呢?(c)物体的最大速度是多少?(提示:先用度来表示角度,再以 $180/\pi$ 乘之.)

解 ☞ 速度 $v=dy/dt=(1.5)(8)\cos 1.5t\text{cm/s}$;注意 1.5t 是表示弧度.(a)$v=12\cos 1.13=5.2(\text{cm/s})$.(b)$v=12\cos 4.5=-2.5\text{cm/s}$.(c)当余弦是 ±1 时具有最大值,于是 $v=\pm 12.0\text{cm/s}$.

第四章 牛顿运动定律

4.1 力,质量和加速度

4.1 一力作用在 2 kg 的物体上,产生 3 m/s^2 的加速度.同样大小的力作用在下述质量物体产生的加速度是多少:(a)1kg 和(b)4kg,(c)力是多大?

解 ☞ 利用 $F=ma$ 求出力 F. $F=(2kg)(3m/s^2)=6N$.然后注意 $a=F/m$,当 $m=1kg$, $a=(6N)/(1kg)=6m/s^2$; $m=4kg$, $a=1.5m/s^2$.答案是(a)$6m/s^2$;(b)$1.5m/s^2$;(c)6N.

4.2 (填空),(a)－300g 物体的质量是______.(b)在地球上重量是______.(c)一在地面上重为 20 N 的物体在月球上的质量等于______.(d)在地球上重为 5lb 的物体的质量为______.

解 ☞ (a)300g,(b)$w=(300g)(980cm/s^2)=2.94\times10^5dyn=2.94N$.(c)$m=w/g=(20N)/(9.8m/s^2)=2.04kg$;质量在任何地方都相等.(d)$m=w/g=(5lb)/(32.2ft/s^2)=0.155slug$

4.3 7.0 pdl** 的外力作用在重 40 lb 的物体上.物体的加速度是多少?(a)在地球上,(b)在月球上.

解 ☞ (a)利用 $F=ma$,我们定义 F 代表作用在质量 m 物体上的所有外力.为了得到 m,我们注意到 $m=w/g=(40pdl^{**})/(32.2ft/s^2)=1.24slug$. $a=F/m=(7.0pdl^{**})/(1.24slug)=5.64ft/s^2$.(b)在月球上的加速度由于外力始终是 7.0pdl**,质量相等而相同.

4.4 一水平缆绳沿一水平轨道拖一 200 kg 的大车.在缆绳上的张力是 500 N.从静止出发(a)要使大车的速度到达 8 m/s 需多长时间?(b)在此时它已走多远?

解 ☞ 假设没阻力,在缆绳上的力只有水平拉力.从 $F_x=ma_x$ 我们得到 $a_x=(500N)/(200kg)=2.50m/s^2$.用运动学解决这个问题.
(a)$v_x=v_{ox}+a_xt$;因为车从静止出发,$v_{ox}=0$.有 $t=v_x/a_x=(8m/s^2)/(2.50m/s^2)=3.2s$.(b)设起点是原点.有 $x=v_{ox}t+\frac{1}{2}at^2=0+\frac{1}{2}(2.50m/s^2)(3.2s)^2=12.8m$.

4.5 一 900 kg 的轿车以 20 m/s 的速度沿一水平公路行驶.多大的阻力能使这辆车在30 m内停下来?

解 ☞ 在这里我们用运动学方程可以让我们求出加速度 a_x: $v_x^2=v_{ox}^2+2a_xx$,其中 $v_x=0$ 当 $x=30m$ 和 $v_{ox}=20m/s$.解之,我们得到 $a_x=-6.67m/s^2$.最后我们求出阻力是 $F_x=ma_x=(900kg)(-6.67m/s^2)=-6003N$.

4.6 多大力能使一沿水平轨道行驶的质量为 20000kg 的火车头产生 $1.5m/s^2$ 的加速度;摩擦系数为 0.03.

解 ☞ 如 4-1 所示. $F-\nu_kN=ma$, $N=mg$, $F=\nu_kmg+ma=0.63(20000)(9.8)+20000(1.5)=5880+30000=35.880(kN)$

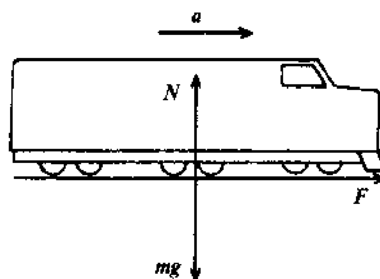


图 4-1

4.7 －12.0g 的子弹从静止被加速,它在枪膛里在 20cm 的距离内速度达到 700m/s.假设加速度是恒定的,那么加速力是多大呢?

---

* slug = 32.3lb

** 1pdl = 0.1383N.

解 ☞ 从运动学知识,我们有 $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x x$. 在本题中, $v_{0x} = 0$, $v_x = 700\text{m/s}$ 当 $x = 0.20\text{m}$. 解方程,有 $a_x = 1.23\times10^6\text{m/s}^2$. 我们得到 $F_x = ma_x = 14.8\text{kN}$.

4.8 一质量为 20kg 的木板箱悬挂在一长绳的末端. 试求下列张力时的加速度(a)250N, (b)150N, (c)0, (d)196N.

解 ☞ 木板箱在竖直方向上受到两个力,绳子向上的张力 T,及向下的重力 $w = mg$. 注意到有 $w = (20\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) = 196\text{N}$, 利用 $T - w = ma_y$, 我们得到:(a) $a_y = 2.7\text{m/s}^2$, (b) $a_y = -2.3\text{m/s}^2$, (c) $a_y = -9.8\text{m/s}^2$; (d) $a_y = 0$. 注意本题中负加速度是指加速度方向向下.

4.9 －40kg 的衣箱沿一斜面下滑,6.0s 内速度从 5.0m/s 降到 2.0m/s. 假设作用在衣箱上的力是恒定的,试求该力的大小和相对于卡车速度矢量的方向.

解 ☞ 设 x 轴沿着运动的方向,有公式 $F_x = ma_x$. 为求得 a_x,我们用运动关系 $v_x = v_{0x} + a_x t$, 得 $v_{0x} = 5.0\text{m/s}$, $v_x = 2.0\text{m/s}$, $t = 6.0\text{s}$. 解之,得到 $a_x = -0.50\text{m/s}^2$. $F_x = (40\text{kg})(-50\text{m/s}^2) = -20\text{N}$. 注意到在 y 方向上的作用力是 0,得到结果 $\boldsymbol{F}$ 是 20 N 大小,方向与速度的方向相反.

4.10 20 N 的作用力使得质量为 m 的物体产生 $8.0\ \text{m/s}^2$ 的加速度,可以使质量为 m' 的物体产生 $24\ \text{m/s}^2$ 的加速度. 那么该力作用在捆在一起的这两个物体上产生的加速度是多大?

解 ☞ 由 $F = ma$, $F = 20\text{N}$ 及 $a = 8.0\text{m/s}^2$, 我们得到 $m = 2.50\text{kg}$. 从 $F' = m'a'$ 和 $a' = 24.0\text{m/s}^2$, 我们得 $m' = 0.83\text{kg}$. $M = m + m' = 3.33\text{kg}$ 由 $F = MA \Rightarrow A = 6.0\text{m/s}^2$.

4.11 一辆 1100 kg 的小轿车以 30 m/s 的速度行驶在一直的高速公路上. 司机看到一红灯,于是立即踩下刹车,并产生一个 4 kN 的制动力. (a)轿车的加速度是多少? (b)在几秒内小轿车将停止?

解 ☞ (a)用牛顿第二运动定律有 $F = ma$

$$-4\times10^3 = 1100a, \qquad a = -3.636\text{m/s}^2$$

因而,加速度大小是 3.636m/s^2.

(b) $a = \dfrac{v - v_0}{t}$ 其中 v 等于 0, 在 ts 以后, v_0 等于 30m/s. $-3.636 = \dfrac{-0.30}{t}$, $t = 30/3.636 = 8.25\text{s}$, 所以这辆小轿车将在 8.25s 内停下.

4.12 70 N 的一个力作用在一物体上,产生的加速度是 20m/s^2. 物体的质量是多少?

解 ☞ $F = ma$, $\dfrac{F}{a} = m$, $m = \dfrac{70\text{N}}{20\text{m/s}^2} = \dfrac{70\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{20\text{m/s}^2} = 3.5\text{kg}$

4.13 一质量为 75 kg 的小孩手中拿着重为 40 N 的一袋面粉(图 4-2). 地面对他脚的支持力是多大?

解 ☞ 小孩处于平衡状态,地面对他的支持力必须跟面袋拉力 F 和小孩重力相等:

$$F = mg + w = 75(9.8) + 40 = 735 + 40 = 775(\text{N})$$

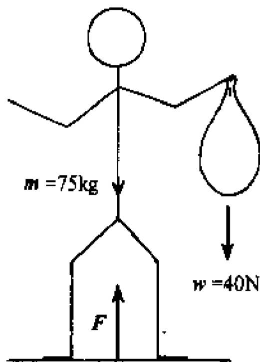


图 4-2

4.14 利用牛顿第三定律解决如下问题:两位司机,一位拥有一辆大型卡迪拉克,另一位拥有一小型大众牌汽车,他俩打赌. 大众汽车拥有者打赌说大众汽车可以拉动卡迪拉克. 他俩用链条将两辆车连在一起. 各自驾驶自己的车. 卡迪拉克将大众汽车拖得满场跑. 大众车司机却宣称他的车的拉力自始至终和卡迪拉克的拉力大小一样. 怎样用牛顿第三定律解释这个例子? 链条质量忽略不计.

解　☞ 据牛顿第三定律,大众车主是对的.两辆车作用在链条上的力是大小相等的力,是作用力和反作用力.大众车的运动是所有外力作用的结果,不仅仅是链条的拉力.其它力包括,车胎和路面之间的摩擦力,它对于两辆车是不相同的.

4.15　一个质量为 2slug 的物体水平方向通过弹簧拉动一 3slug 的物体(图 4-3).如果在某个时刻 3slug 的物体朝 2slug 的物体方向有一个 1.8ft/s² 的加速度,试求 2slug 的物体受到的合力和在那时刻的加速度.

解　☞ 弹簧与物体相连的两端对物体有相同的拉力 F_1 但方向相反.利用牛顿第二定律,

$$F = m_1a_1 = m_2a_2,$$

$$F = m_2a_2 = 3\text{slug} \times 1.8\text{ft/s}^2 = 5.4\text{slug} \cdot \text{ft/s}^2$$

$\Rightarrow F = 5.4\text{lbf}$, 在物体 m_1 上利用牛顿第二定律有

$$F = m_1a_1 = 5.4\text{lbf}, \quad 2a_1 = 5.4, \quad a_1 = 2.7\text{ft/s}^2$$

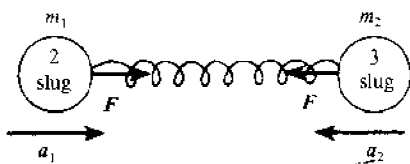


图 4-3

4.16　一96lb 的男孩站在电梯里.试求在电梯下述情况中作用在男孩腿上的力(a)静止,(b)以恒定速度 3ft/s 向下运动,(c)以加速度 40ft/s² 向下运动,(d)以加速度 4.0ft/s² 向上加速.

解　☞ (a)男孩的质量为

$$m = \frac{\text{重力}(w)}{\text{重力加速度}(g)} = \frac{96\text{lbf}}{32\text{ft/s}^2} = 3\text{lbf} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 3\text{slug}$$

当电梯静止时,作用在男孩脚上的力,根据牛顿第一运动定律,和他的重力是相等的.答案是 96lbf 方向向上.(b)恒定速度意味着加速度是 0.向下的作用力只能是重力,即男孩的重力.根据牛顿第一运动定律,答案是 96lbf,方向向上.

(c)当电梯加速向下,男孩的重力超过了电梯对他向上的作用力 E,可以得到合力 F.(图 4-4)

$$F = ma = 3\text{slug} \times 4.0\text{ft/s}^2$$

$$= 12\text{lbfs}^2/\text{ft} \times \text{ft/s}^2, \quad F = 12\text{lbf}$$

$$E = W - F = 96 - 12 = 84(\text{lbf})$$

(d)当电梯以 4.0ft/s² 向上加速时,作用力 E 较重力 W 大,合力为 12lbf:

$E = W + F = 96 + 12 = 108(\text{lbf})$,方向向上

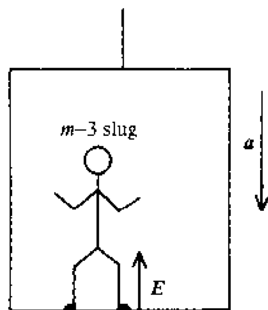


图 4-4

4.17　从静止出发的一电梯具有向上的恒定加速度.在 0.6 s 内运动了 2.0 m.一乘客拎了 3 kg的包在电梯中.那么包上包带的张力在加速过程中是多大呢?

解　☞ 要得到张力 T,我们用第二定律:$T - W = ma_y$,有 $W = mg = 29.4\text{N}$.包的加速度和电梯的加速度是一致的,可从位移公式中得出 $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2$,其中 $v_{0y} = 0$, $y = 2.0\text{m}$ 当 $t = 0.60\text{s}$ 时.解之,$a_y = 11.1\text{m/s}^2$.代入方程,得 $T = 62.7\text{N}$.

4.18　当跳伞员的降落伞刚打开时,150 lb 重的跳伞员以 160 ft/s 的速度下降.当 0.80 s 过去后,伞完全打开,她的速度降到 35 ft/s.求平均阻力(在这段时间内的).

解　☞ 取向下作 y 轴的正方向.平均加速度在 0.80s 时间间隔内是

$$\bar{a}_y = \frac{(35 - 160)\text{ft/s}}{0.80\text{s}} = -156\text{ft/s}^2$$

然后我们用:$\sum \bar{F}_y = m\bar{a}_y$, $W - \bar{T} = m\bar{a}_y$,有 $W = 150\text{lbf}$, $m = W/g = 4.65\text{slug}$,得 $\bar{T} = 875\text{N}$.

4.19　重为 300 N 的男孩站在台秤上,并突然向上跳.他的同伴注意到秤上的读数在此刻达到

400 N. 试估计在此过程中男孩的最大加速度.

解 ☞ 由台秤产生的作用在男孩身上最大的力是 400 N. 合力为(400 − 300) N 并等于 ma. 利用 $m = 300/9.8$ 可得到 $a = 3.3\text{m/s}^2$.

4.20 一个 91.8 kg 的人从飞机上跳出,此时空气给他一向上的力是 225 N. 试求作用在该人身上的合力.

解 ☞ 此人所受合力是两个力的矢量合成——重力 $w = mg = (91.8\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) = 900\ \text{N}$, 方向向下,及 225 N 的力,方向向上. 合力是 $900 - 225 = 675(\text{N})$, 方向向下.

4.21 为了测量一箱子的质量,我们沿一光滑表面推它,施加一水平方向的力 150 N. 测量得加速度 3.0m/s^2. 箱子的质量是多少?

解 ☞ 利用 $F_x = ma_x$, 得 $150\text{N} = m(3.0\text{m/s}^2)$ 得 $m = 50\text{kg}$.

4.22 当一轿车从静止开始水平加速时,一本书在轿车的水平顶上. 如果车顶与书之间静摩擦系数为 0.45, 这本书没有滑动,这辆车所能达到的最大加速度是多少?

解 ☞ 当书刚要滑动时,摩擦力 $f = \mu mg$. 摩擦力是水平方向的力,因而 $f = ma$. 可得 $a = \mu g = 4.41\text{m/s}^2$.

4.23 证明下列情况,当一辆车沿一水平公路行驶时:车的加速度大小不可能超过 μg, 其中 μ 是车与路面之间的滑动摩擦系数. 当小车沿一倾角为 θ 的斜面上行时,类似的加速度表达式怎样写?

证 ☞ 对于小车的摩擦力,有 $f = ma$. 在水平地面上, $F_N = mg$, 有 $f = \mu F_N = \mu mg$, 有 $a = \mu g$. 在斜面上,有 $\mu F_N - mg\sin\theta = ma$ 和 $F_N - mg\cos\theta = 0$, 解之得 $a = (\mu\cos\theta - \sin\theta)g$.

4.24 一 5 kg 的物体挂在一绳末端. 试求下列加速度情况下的绳上的张力(a) 1.5m/s^2, 方向向上, (b) 1.5m/s^2, 方向向下, (c) 9.8m/s^2, 方向向下.

解 ☞ 取向上为正,有 $T - w = ma_y$, 其中 T 是绳中张力, $m = 5\text{kg}$, $w = mg = 49\text{N}$ (a) $T = 56.5\text{N}$, (b) $T = 41.5\text{N}$, (c) $T = 0$.

4.25 一位 700 N 的人站在电梯中的秤上. 电梯的加速度在下列情况秤上的读数是多少? (a) 1.8m/s^2 向上, (b) 1.8m/s^2 向下, (c) 9.8m/s^2 向下.

解 ☞ 取向上为正,设 N 为秤对人的作用力,有

$N - w = ma_y$. 注意 $w = 700\text{N}$, $m = w/g = 71.4\text{kg}$, 利用给出的 a_y 值,易得(a) $N = 829\text{N}$, (b) $N = 571\text{N}$, (c) $N = 0$.

4.26 (图 4.25)中的秤,一位 65 kg 的宇航员在月球上测自己体重,在那里 $g = 1.60\ \text{m/s}^2$. 问此时秤的读数是多少?

解 ☞ 既然 $g_月$是月球表面的重力加速度, $w_月$是月球表面物体所受重力,从牛顿第二定律 $w_月 = mg_月 = (65\text{kg})(1.60\text{m/s}^2) = 104\text{N}$.

4.27 在坚硬水泥地和滑动的轿车轮胎之间的摩擦力大约是轿车重量的 9/10. 如果轿车从开始刹车到静止的轨迹约 20 m 长,那么问轿车刹车以前的速度是多大?

解 ☞ 既然 $|f| = \mu|F_N|$, $F_N = w$(在水平地面上), 有 $\mu = 0.9$, $f = -0.9w$. 从 $F = ma$ 中可求出轿车的加速度,有 $f = (w/g)a$, $f = -0.9w$. $a = -0.9g$. 因为 x 是 20 m, 利用 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 得出 $v_0 = 6g^{1/2} = 18.8\text{m/s}$.

4.28 如果轿车轮子与公路之间的摩擦系数为 0.70, 轿车从静止加速到 15m/s 所需最短距离是多少?

解 ☞ $a = \mu g$(图 4.23 和 4.27)及运动方程 $v^2 = v_0^2 + 2ax$

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{1.5^2 - 0^2}{2(0.70)(9.8)} = 16.4(\text{m})$$

4.29　一恒力作用在一电子上($m=9.1\times10^{-31}$kg),使其从静止加速到 5×10^7 m/s,通过距离为0.80 cm.试求该力.该力是mg的多少倍?

解　☞ 先从 $v^2-v_0^2=2ax$ 中求出恒定加速度;然后得出 $a=25\times10^{14}/1.6\times10^{-2}=1.56\times10^{17}$(m/s^2),于是 $F=ma=(9.1\times10^{-31})(1.56\times10^{17})=1.43\times10^{-13}$(N).后有 $F/mg=a/g=1.56\times10^{17}/9.8=1.6\times10^{16}$.

4.30　4.0 kg的锤头以6.0 m/s的速度打向一长钉,并钉入一木头中;碰撞的时间是0.0020 s.试求(a)平均作用力,(b)钉进入木头的距离.

解　☞ (a)平均作用力是能和实际的力在该时间有着相同结果的一恒力.我们能用 $v_x=v_{ox}+a_xt$ 先求出等效恒加速度 a_x.这里有 $v_{ox}=6.0$m/s, $v_x=0$, $t=0.0020$s.解之得 $a_x=-3000$m/s^2.由 $F_x=ma_x$ 得到 $F_x=-12$kN.这里 F_x 代表在锤头上钉子的力,对钉子的反作用力是12kN.

(b)钉子移动的距离与锤头移动距离一致.对于锤头有 $x=v_{ox}t+\frac{1}{2}a_xt^2=(6.0\text{m/s})(0.0020\text{s})+\frac{1}{2}(-3000\text{m/s}^2)(0.0020\text{s})^2=0.006$m 或 $x=6.0$mm.

4.31[c]　质量为 m 的物体沿 y 轴移动,在时刻 t 它的位置是 $y(t)=at^{3/2}-bt+c$,其中 a、b、c 是常量.(a)计算物体的加速度,(b)作用在物体上的力是多少?

解　☞ (a) $a_y=\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$.有 $v_y=\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=\frac{3}{2}at^{1/2}-b$　得出 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2=\frac{3}{4}at^{-1/2}$.(b) $F=ma_y=\frac{3}{4}mat^{-1/2}$.

4.32[c]　通过测量正沿 x 轴移动的300g物体发现,它的位置由方程 $x=0.20t-5.0t^2+7.5t^3$ 给出,其中 t 是以s为单位的时间.试求 t 时刻作用在物体上力的大小.

解　☞ 因为 $F=ma$,我们必须先求 a;因为 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.解这微分方程, $v=0.20-10.0t+22.5t^2$, $a=-10.0+45t$;所以 $F=300(-10.0+45t)$dyn$=0.00300(-10.0+45t)$N

4.33[c]　一质量为50g的物体在一弹簧的末端上下振动,且满足方程 $y=0.150\sin3t$ m, t 的单位是s.试求使它如此运动时作用在物体上合力大小.

解　☞ 加速度是 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2=-1.35\sin3t$ m/s^2;于是 $F=0.050(-1.35\sin3t)=-0.0675\sin3t$N.负号意味着该力是阻力.

4.34[c]　质量为 m 的物体沿 x 轴移动,在时间 t 它的位置是 $x(t)=\alpha t^4-\beta t^3+\gamma t$,其中 α、β、γ 是常量.(a)计算物体的加速度,(b)作用在它的外力是多少?

解　☞ (a) $\dot{x}=4\alpha t^3-3\beta t^2+\gamma$, $\ddot{x}=12\alpha t^2-6\beta t$

(b) $F_x=m\ddot{x}=12m\alpha t^2-6m\beta t$

4.2　摩擦;斜面;矢量符号

4.35　一钢丝绳的最大承受能力是20 kN.如果一人水平拉动钢丝绳,绳末端系了一20t的物体,并且所在地面是粗糙的,滑动摩擦系数是0.15,问在水平方向该物体所达到最大加速度是多少?

解　☞ 设 T 是钢丝绳上的力.有 $\sum F=ma$ 即 $T-\mu_kmg=ma$ 对于最大加速度,要求 $T=2.0\times10^4$N,有 2.0×10^{-4}N$-0.15(8000\text{kg}).(9.8\text{m/s}^2)=(8000\text{kg})a$.解之我们得 $a=1.03$m/s^2.

4.36　与水平方向成30°角的绳拖着20 kg的货车在水平地面上行驶.阻力是30 N.货车在下列情况下,绳的拉力分别是多大?(a)货车恒速,(b)货车以加速度0.40 m/s^{2}运动?

解　☞ 设绳上拉力大小为 T.利用 $\sum F_x=ma_x$,有 $T\cos30°-30\text{N}=ma_y$,其中 $m=20$kg.(a)因为 $a_y=0$,所以 $T=34.6$N,(b) $a_y=0.40$m/s^2, $T=43.9$N

4.37　如图4-5,一个70 kg的箱子受到与水平方向成30°的400 N的力,滑动摩擦系数是0.50.求箱子的加速度.

解 ☞ 竖直方向是静止的，$\sum F_y = ma_y = 0$. 由图 4-5, 我们看出方程为 $Y + 200\text{N} - mg = 0$. 且 $mg = (70\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) = 686\text{N}$. 得 $Y = 486\text{N}$.

作用在箱子上的摩擦力是 $f = \mu N = (0.50)(486\text{N}) = 243\text{N}$. 对于箱子来说，有 $\sum F_x = ma_x$, $(346 - 243)\text{N} = (70\text{kg})a_x$, 得出 $a_x = 1.47\text{m/s}^2$.

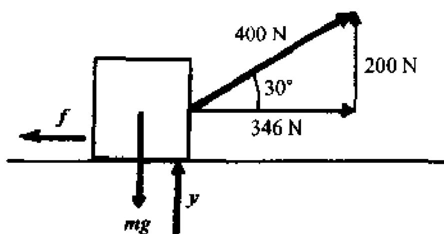


图 4-5

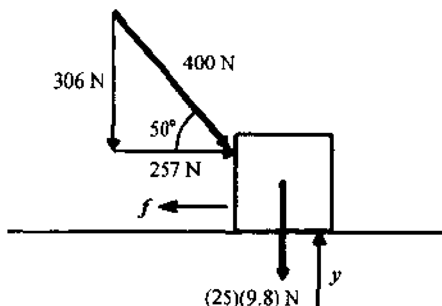


图 4-6

4.38 如图 4-6 所示，25 kg 的箱子受到 400 N 的推力作用. 从静止出发，箱子在 4 s 内速度达到 2.0 m/s. 求箱子和地板之间的滑动摩擦力及滑动摩擦系数.

解 ☞ 由 $F = ma$, 我们能求得 f. 但我们首先要求得 a. 我们知道 $v_0 = 0$, $v_f = 2\text{ m/s}$, $t = 4\text{s}$. 由 $v_f = v_0 + at$. 得出

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{2\text{m/s}}{4\text{s}} = 0.50\text{m/s}^2$$

由 $\sum F_x = ma_x$ 其中 $a_x = a = 0.50\text{m/s}^2$. 从图 4-6, 该方程可写为 $257\text{ N} - f = (25\text{kg})(0.50\text{m/s}^2)$, $f = 245\text{N}$.

由 $\sum F_y = ma_y = 0$, $Y - 306\text{N} - (25)(9.8)\text{N} = 0$, $Y = 551\text{N}$.

所以 $\mu = \frac{f}{Y} = \frac{245}{551} = 0.44$

4.39 一个 12 kg 的箱子从长为 5.0 m 的斜面顶端释放，斜面的倾角是 40°. 箱子受到的阻力是 60 N. 求(a)箱子的加速度，(b)箱子到达斜面底端所需时间是多少?

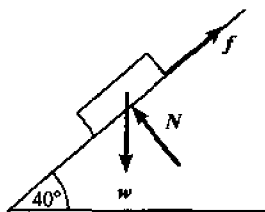


图 4-7

解 ☞ 见图 4-7, 有三个物体作用在箱子上：摩擦力 60 N; 垂直于斜面的支持力 N, 箱子的重力, $w = mg = (12\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) = 118\text{N}$. 我们以沿斜面向下作为 x 轴的正方向. 有 $\sum F_x = ma_x$, $w\sin 40° - f = ma_x$, $(118\text{N})(0.642) - (60\text{N}) = (12\text{kg})a_x$. 解之得 $a_x = 1.31\text{ m/s}^2$. 求时间 t, 用 $x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2$, 且 $v_{0x} = 0$ 和 $x = 5.0\text{m}$. 解之得 $t = (7.63\text{s}^2)^{1/2} = 2.76\text{s}$.

4.40 在题 4-39 中，箱子和斜面之间的摩擦系数是多少?

解 ☞ 参见图 4-7, 有 $\sum F_y = 0$, 即 $N - w\cos 40° = 0$, $N = 90\text{N}$. $\mu_k = f/N$, 得出 $\mu_k = 0.67$

4.41 有一与水平面成 30°角的斜面. 试求一恒力，该力与斜面平行，且使 15 kg 的箱子滑动，(a)以 1.2m/s^2 的加速度沿斜面向上，(b)以 1.2 m/s^2 的加速度沿斜面下滑. 忽略摩擦力.

解 ☞ 设 x 沿斜面向上为正. 且设 p 是那个恒力, 有 $\sum F_x = ma_x$, 即 $p - w\sin 30° = ma_x$, 有 $m = 15\text{kg}$ 和 $w = mg = 147\text{N}$. (a)对于 $a_x = 1.2\text{m/s}^2$, $p = 91.5\text{N}$, (b) $a_x = -1.2\text{m/s}^2$, $p = 55.5\text{N}$.

4.42 一个 400g 的箱子以 120cm/s 的速度沿一桌面滑动了 70cm, 直到静止. 问箱子和桌子之间的摩擦系数是多少?

解 ☞ 对于箱子而言,有 $\sum F_y = 0$ 即 $F_N = w = mg$,又 $\sum F_x = ma$ 即 $-\mu F_N = ma$;所以 $\mu = -a/g$.从 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 得出 $a = -1.2^2/2(0.7) = -1.03(\mathrm{m/s^2})$;于是有 $\mu = 1.03/9.8 = 0.105$.

4.43 使一个5.0 kg的箱子沿一倾角是30°的斜面向上产生0.20m/s²的加速度,所需与斜面平行作用在物体上的力是多大?(a)摩擦忽略,(b)如果摩擦系数是0.30.

解 ☞ (a)沿斜面向下的重力分量是 $mg\sin30° = 5(9.8)(0.5) = 24.5(\mathrm{N})$,而沿斜面向上的作用力是 F.有 $F = ma$,即 $F - 24.5 = 5(0.20)$得出 $F = 25.5\mathrm{N}$,(b)摩擦力 $= \mu F_N$.$F_N = mg\cos30° = 42.4\mathrm{N}$ 和 $\mu F_N = 12.7\mathrm{N}$,得出 $F = 38.2\mathrm{N}$.

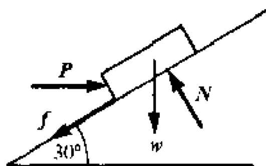


图 4-8

4.44 一个8.0 kg的箱子在30°的斜面上被释放,沿斜面向下的加速度是0.30 m/s².试求阻碍箱子运动的摩擦力大小.此时的摩擦系数是多大?

解 ☞ 下滑分力 $= 8(9.8)(0.5) = 39.2(\mathrm{N})$.根据 $F = ma$,有 $39.2 - f = 8(0.3)$,得出 $f = 36.8\mathrm{N}$.对箱子的支持力和 W 的垂直斜面的分力相等.$8(9.8)(0.867) = 67.9(\mathrm{N})$.因而 $\mu = 36.8/67.9 = 0.54$.

4.45 一水平力 p 加在20 kg的箱子上,使其沿30°斜面向上滑动.阻力是80N.箱子的加速度是下述情况时 p 大小如何?(a)0,(b)0.75m/s².

解 ☞ 设沿斜面向上为 x 轴正方向.箱子受力情况如图4-8.由 $\sum F_x = ma_x$,得 $p\cos30° - w\sin30° - f = ma_x$,其中 $m = 20\mathrm{kg}$, $w = mg = 196\mathrm{N}$, $f = 80\mathrm{N}$(a)对于 $a_x = 0$, $p = 206\mathrm{N}$.(b)对于 $a_x = 0.75\mathrm{m/s^2}$, $p = 223N$.

4.46 200 N大小的水平力加在15 kg的箱子上,使其在倾角为20°的斜面上产生向上的加速度25 cm/s².试求(a)箱子受到的摩擦力,(b)摩擦系数.

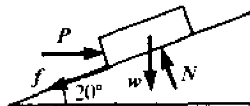


图 4-9

解 ☞ 如图4-9.取 x 轴沿斜面,y 轴垂直斜面.由 $\sum F_x = ma_x$,得 $p\cos20° - f - w\sin20° = (15\mathrm{kg})(0.25\mathrm{m/s^2})$.由 $\sum F_y = 0$ 得 $N - p\sin20° - w\cos20° = 0$.注意到 $p = 200\mathrm{N}$ 和 $w = mg = 147\mathrm{N}$,解方程组,得出 $f = 134\mathrm{N}$ 和 $N = 207\mathrm{N}$.$\mu_k = f/N = 0.65$.

4.47 要使100 N的物体在倾角为37°的斜面上不发生滑动,与斜面平行的最小的推力应该是多少?假设静摩擦系数和动摩擦系数都是0.30.

解 ☞ 按照上例选定 xy 坐标系.设 F 为未知力,f 代表摩擦力,N 是支持力.物体刚巧要滑动时,摩擦力最大,方向向上.有

$$F - w\sin37° + f_{\max} = 0,\text{其中 } f_{\max} = \mu_s N \text{ 和 } N - w\cos37° = 0.$$

已知 $w = 100\mathrm{N}$ 和 $\mu_s = 0.3$,可推出 $N = 80\mathrm{N}$ 及 $f_{\max} = 24\mathrm{N}$;$F = 36\mathrm{N}$ 即是所需最小的力.

4.48 参见题4.47,问要使物体以恒定速度沿斜面上滑,水平方向的推力应是多少?

解 ☞ 沿斜面向下的滑动摩擦力 $f = \mu_k N$.N 仍然是80 N,$\mu_k = 0.30$,有 $f = 24\mathrm{N}$.由 $\sum F_x = 0 \Rightarrow F - w\sin37° - f = 0$;解之,得 $F = 84\mathrm{N}$.

4.49 同题4.48条件一致.假设作用力 F 沿斜面向上,是94N.物体的加速度是多少?如物体从静止开始运动,在10s内能移动多远?

解 ☞ $f = \mu_k N = 24\mathrm{N}$.利用 $\sum F_x = ma_x \Rightarrow F - w\sin37° - f = ma_x$.注意到 $m = w/g = 10.2\mathrm{kg}$ 解之,有 $a_x = 0.98\mathrm{m/s^2}$ 沿斜面向上.然后我们利用运动学方程 $x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, $v_{0x} = 0$.有 $t = 10\mathrm{s}$ 和 $a_x = 0.98\mathrm{m/s^2}$,我们可以解出 $x = 49\mathrm{m}$.

4.50 5kg的箱子静止在30°的斜面上.物体和斜面之间的静摩擦系数为0.20.要使物体刚欲滑动,所需加在箱子上的水平力是多大?

解 ☞ 设 p 是水平力.建立 xy 坐标.既然箱子刚能滑动,满足下列方程:$\sum F_x = 0$ 及 $\sum F_y = 0$.此时有沿斜面向下的最大静摩擦力.$p\cos30° - w\sin30° - f_{max} = 0$;
$N - w\cos30° - p\sin30° = 0$,其中 N 和 f 是支持力和摩擦力,$w = mg = 49\text{N}$,用 $f_{max} = \mu_s N$ 代入第一个方程,将已知的数据均代入,有 $0.866p - 0.20N = 24.5\text{N}$　　$N - 0.50p = 42.4\text{N}$.
解这两个方程,得 $3.83p = 165\text{N}$, $p = 43.1\text{N}$.

4.51 问题4.50,假设物体恰能向下滑动,试求该水平推力.

解 ☞ 同题4.50唯一不同的是最大静摩擦力是沿斜面向上.利用 $\sum F_x = 0$,

$$0.886P + 0.20\text{N} = 24.5\text{N}, \quad N - 0.50p = 42.4\text{N}$$

可得到 $4.83p = 80.1\text{N}$,或 $p = 16.6\text{N}$.注意在题4.50和题4.51N 的值是不同的,N 与 p 有关.

4.52 如图4-10,8 kg物体受到力 $F_1 = 30\text{N}$ 和 $F_2 = 40\text{N}$ 的作用.试求物体的加速度.

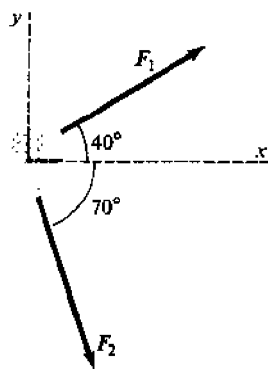


图4-10

解 ☞ 由牛顿第二定律,有 $F_{1x} + F_{2x} = ma_x$

$$F_{1y} + F_{2y} = ma_y$$

有　$30\cos40° + 40\cos70° = 8a_x$ 及 $30\sin40° - 40\sin70° = 8a_y$.
解之,$\boldsymbol{a} = 4.6\boldsymbol{i} - 2.3\boldsymbol{j}\text{m/s}^2$.

4.53 7 kg的物体受到两个力的作用,$\boldsymbol{F}_1 = 20\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}N$ 和 $\boldsymbol{F}_2 = 8\boldsymbol{i} - 50\boldsymbol{j}(\text{N})$.试求物体的加速度.

解 ☞ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 28\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j}(\text{N})$;$\boldsymbol{a} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i} - (20/T)\boldsymbol{j}$ (m/s^2).

4.54 如图4-10,有两力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$.使8 kg的物体产生了 $\boldsymbol{a} = 3.0\boldsymbol{i}\text{m/s}^2$ 的加速度,试求 F_1 和 F_2.

解 ☞ 运动方程可以写成 $F_{1x} + F_{2x} = 8(3)$,$F_{1y} + F_{2y} = 0$,由后者得,$F_1\sin40° = F_2\sin70°$;由前者得,$F_1\cos40° = 24 - F_2\cos70°$.可推出 $\tan40° = F_2\sin70°/(24 - F_2\cos70°)$.解得 $F_2 = 16.4\text{N}$ 和 $F_1 = (\sin70°/\sin40°)F_2 = 24\text{N}$.

4.55 一力使质子($m = 1.67\times10^{-27}\text{kg}$)产生 $2\times10^9\boldsymbol{i} - 3\times10^9\boldsymbol{j}(\text{m/s}^2)$ 的加速度,试求该力大小.

解 ☞ $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = 3.34\times10^{-18}\boldsymbol{i} - 5.01\times10^{18}\boldsymbol{j}(\text{N})$

4.56 一个200g的物体受到 $0.30\boldsymbol{i} - 0.40\boldsymbol{j}(\text{N})$ 的力.如果该物体从静止开始运动,求6s以后物体的速度矢量.

解 ☞ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t = 0 + \frac{t}{m}\boldsymbol{F} = \frac{6}{0.200}(0.30\boldsymbol{i} - 0.40\boldsymbol{j}) = 9\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j}(\text{m/s})$

4.57 如果题4.56中的物体从圆心出发,那么经过6s后它的位置在哪里?

解 ☞ $s = s_0 + t\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}t^2\boldsymbol{a} = 0 + 0 + \frac{t^2}{2m}\boldsymbol{F} = \frac{36}{2(0.200)}(0.30\boldsymbol{i} - 0.40\boldsymbol{j}) = 27\boldsymbol{i} - 36\boldsymbol{j}(\text{m})$ 因而物体应该在点(27m, 36m).

4.3 两个物体的问题和其它问题

4.58 在图4-11中,试求物体 B 不下落,卡车所需要的加速度.卡车和物体 B 之间的静摩擦系数是 μ_s.

解 ☞ 假如物体 B 没有下落,说明摩擦力和它的重力平衡:$f = mg$,但物体 B 水平方向的运动由 $N = ma$ 给出.

因而有　$\frac{f}{N} = \frac{g}{a}$　或　$a = \frac{g}{f/N}$.
既然 f/N 的最大值是 μ_s,有 $a \geqslant g/\mu_s$,那么物体 B 不会下落.

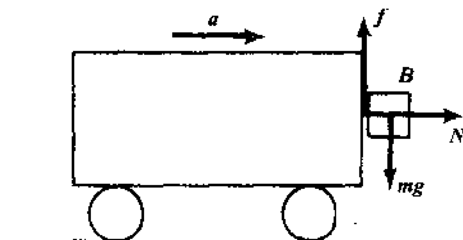


图 4-11

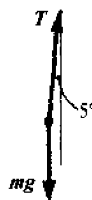


图 4-12

4.59 在航行在平静的海面上的巨轮上,一乘客在他房间内把一球用线系在天花板上.当船加速时,她注意到摆球在悬挂点后方摆动,即没有在竖直平面内摆动.那么如果单摆摆动面与竖直面夹角是 5°,此时船的加速度是多少?

解 ☞ 如图 4-12,该摆球受到 $T\sin5°$ 的力而被加速.

有 $T\sin5° = ma$.在竖直方向 $\sum F = 0$,有 $T\cos5° = mg$.

解之 $a = g\tan5°$, $a = 0.0875g = 0.86\text{m/s}^2$.

4.60 一质量为 m 的矩形物体在另一矩形物体的顶部,两者放在一水平桌面上.两矩形物体之间的最大摩擦力为 $2.0m$(N),那么上面矩形物体不发生滑动所能给下面矩形物体最大加速度是多少?两矩形物体之间的摩擦系数是多少?

解 ☞ $F_{max} = 2.0m = ma_{max}$,有 $a_{max} = 2.0\text{m/s}^2$

$$\mu = f/mg = 2.0\text{m}/9.8\text{m} = 0.20$$

4.61 一物体在一斜面上,如图 4-13(a),(a)如果斜面向右作加速度为 3m/s^2 的运动,那么物体没有滑动所需物体与斜面之间的摩擦力必须是多少?(b)无滑动所需的最小摩擦系数 μ_s 是多少?

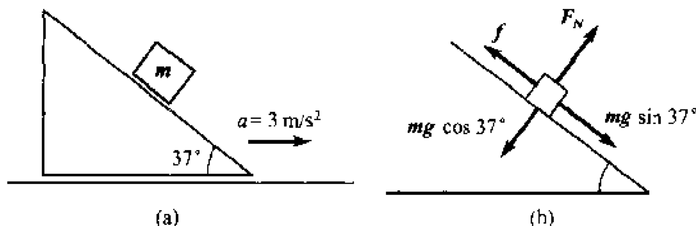


图 4-13

解 ☞ 将力和加速度沿垂直和平行于斜面的方向进行分解[图 4-13(b)].对于每个方向写 $F = ma$,有 $0.6mg - f = 3(0.8)\text{m}$ 和 $F_N - 0.8mg = 3(0.6)\text{m}$,可以得出(a)$f = (3.48\text{m})\text{N}$, $F_N = (9.6\text{m})\text{N}$.

(b)$\mu_s = \dfrac{f}{F_N} = \dfrac{3.48\text{m}}{9.6\text{m}} = 0.36$

4.62 如果没有摩擦力,题 4.61 中的物体将会向上或向下加速?

解 ☞ 向下(沿斜面)[题 4.61(a)中 3.48m/s^2 相对于斜面].

4.63 斜面(如图 4-14)有一向右的加速度 $\boldsymbol{a}$.证明当 $a > g\tan(\theta - \alpha)$ 时物体会在斜面上滑动,其中 $\mu_s = \tan\theta$ 是两者之间的静摩擦系数.

证 ☞ 如果物体没有滑动,它必须同斜面具有相同的加速度.因此

$$f\cos\alpha - N\sin\alpha = ma, \qquad f\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0$$

可以得到

$$f = m(a\cos\alpha + g\sin\alpha), \qquad N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$$

所以

$$\frac{f}{N}=\frac{a\cos 2+g\sin\alpha}{g\cos\alpha-a\sin\alpha}=\frac{a+g\tan\alpha}{g-a\tan\alpha}$$

没有滑动对应的 f/N 之最大值就是 $\mu_s=\tan\theta$.

因此加速度 a 必须满足$\frac{a+g\tan\alpha}{g-a\tan\alpha}\leqslant\tan\theta$ 或 $a\leqslant g\ \frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=g\tan(\theta-\alpha)$如果 $a>g\tan(\theta-\alpha)$，物体将会移动.

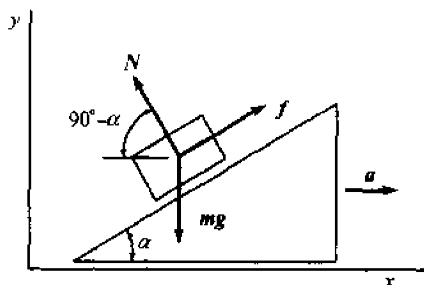


图 4-14

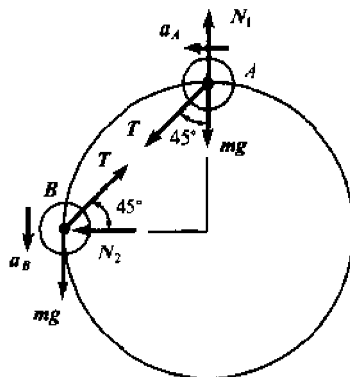


图 4-15

4.64 物体 A 和 B 质量均为 m，由一根轻质没有伸缩性的绳相连.它们被限定在一没有摩擦力的竖直平面的环上运动，如图 4-15.两物体从图示位置由静止被释放.求刚释放时绳中张力.

解 ☞ 在释放的瞬间，A 作水平运动，B 竖直运动，两者加速度互相垂直且大小相等，否则绳将伸长.所以可写出 A 水平方向的方程和 B 竖直方向的方程如下

$$T\sin45^\circ=ma,\qquad mg-T\sin45^\circ=ma$$

消去 a，得

$$T=\frac{mg}{2\sin45^\circ}=\frac{mg}{\sqrt{2}}$$

4.65 图 4-16(a)所示系统有一加速度 a，求作用在球上的力，假设没有摩擦力.

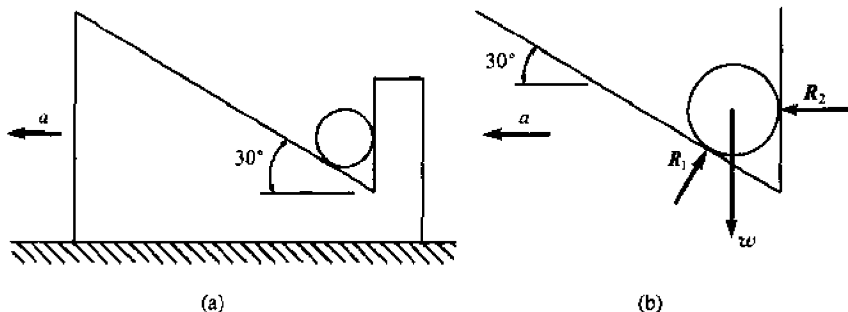


图 4-16

解 ☞ 从图 4-16(b)，有 $\sum F_{ver}=R_1\cos30^\circ-w=ma_{ver}=0$ 和 $\sum F_{hor}=R_2-R_1\sin30^\circ=ma$.因而，作用力是

$R_1=\frac{w}{\cos30^\circ}=1.15w$，$R_2=R_1\sin30^\circ+\frac{w}{g}a=(1.15w)(0.5)+\frac{w}{g}a=w\left(0.58+\frac{a}{g}\right)$ w 是重力

4.66 在图 4-17 中，物 A 质量是 15 kg，B 是 11 kg.如果通过拉动 A 使他们有 3 m/s^2 向上的加速度，求绳中张力 T_1 和 T_2.

解 ☞ 先利用牛顿第二定律，求使两个物体向上加速的 F_1.

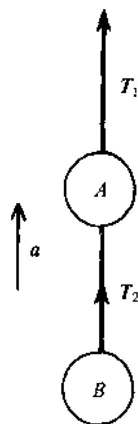


图 4-17

$$F_1 = (m_A + m_B)a = (15 + 11)3, \quad F_1 = 78\text{N}$$

F_1 是合力，$F_1 = T_1 - m_A g - m_B g$，所以张力 T_1 等于 A 和 B 重力加上 F_1.

$$T_1 = m_A g + m_B g + F_1 = 15(9.8) + 11(9.8) + 78$$
$$= 147 + 107.8 + 78$$
$$T_1 = 332.8\text{N}$$

对于物体 B.

$$F_2 = m_B a = 11(3) = 33(\text{N}),$$
$$T_2 = m_B g + F_2 = 11(9.8) + 33 = 140.8(\text{N})$$

对于物体 A.

$$T_1 = m_A g + m_A a + T_2 = 147 + 45 + 140.8 = 332.8(\text{N})$$

4.67　参见图 4-18，如果作用力是 F，作用在物体上的摩擦力可忽略，求物体的加速度及中间绳之张力.

解　☞ 应用 $F = ma$，得 $F - T = m_2 a$ 和 $T = m_1 a$. 解之得

$$T = m_1 F/(m_1 + m_2), \qquad a = F/(m_1 + m_2)$$

4.68　在图 4-18 中，如果 $F = 20\text{N}$，$m_1 = m_2 = 3\text{kg}$，加速度是 $0.50\ \text{m/s}^2$，两物体上的摩擦力相等，那么中间绳中张力是多少？物体上摩擦力是多大？



图 4-18

解　☞ 对每个物体有 $F = ma$，设 f 是每个物体上的摩擦力. 有 $F - f - T = m_2 a$，及 $T - f = m_1 a$. 用所给值解之得 $T = 10\text{N}$ 和 $f = 8.5\text{N}$.

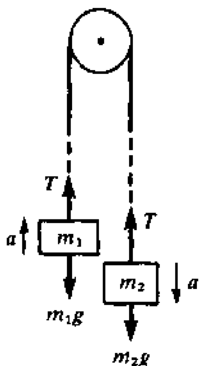


图 4-19

4.69　图 4-19 装置叫做阿脱武德机. 两物体质量分别为 m_1，m_2，且 $m_2 > m_1$，(a)系统被释放后，m_2 在 t 时间内下落距离多少？(b)连接两物体轻绳中张力是多少？滑轮的摩擦和质量忽略不计.

解　☞ (a)单独分析每个物体上的力，利用牛顿第二定律，选向上为正：

$T_1 - m_1 g = m_1 a$ 和 $T - m_2 g = -m_2 a$. 相减得出 $a = (m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2)$. 利用 $y = at^2/2$ 可求下落距离. (b)利用上面方程，得 $T = 2m_1 m_2 g/(m_1 + m_2)$

4.70　一绳穿过一无摩擦、无质量的滑轮，两端分别有一 4 kg 物体和一 12 kg 物体，求加速度及绳中张力.

解　☞ 利用题 4.69 的方程

$$a = \frac{12 - 4}{12 + 4}(9.8) = 4.9(\text{m/s}^2), \qquad T = \frac{2(4)(12)}{4 + 12}(9.8) = 58.8(\text{N})$$

4.71　一阿脱武德机(题 4.69)，两物体分别为 10 kg 和 12 kg. 求(a)3 s 末的速率，(b)在 3 s 内移动的距离，(c)如在 3 s 末绳被剪断，求物体在接下来的 6 s 内移动的距离.

解　☞ (a) $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} = \dfrac{12 - 10}{12 + 10}(9.8) = 0.89(\text{m/s}^2)$

既然加速度恒定的，在 3s 末的速率是 $v = v_0 + at = 0 + (0.89)(s) = 2.67(\text{m/s})$ 物体 2 向下，物体 1 向上，(b)每个物体在 3s 内移动的距离是 $s = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 = (0)(3) + \dfrac{1}{2}(0.89)(3)^2 = 4(\text{m})$.

(c)如绳被剪断，物体以初速 $v_{20} = -2.67\text{m/s}$ 自由下落，$v_{10} = +2.67\text{m/s}$，取向上为正. 对于物体 2，在 6s 内的位移是 $y_2 = v_{20}t - \dfrac{1}{2}gt^2 = (-2.67)(6) - \dfrac{1}{2}(9.8)(6)^2 = -192.4(\text{m})$. 物体 1 向上的距离是 $d' = \dfrac{v_{10}^2}{2g} = \dfrac{(2.67)^2}{2(9.8)}0.4(\text{m})$. 向上运动的时间是

$$t_{up} = \frac{v_{10}}{g} = \frac{2.67}{9.8} = 0.27\text{s}$$

向下运动 5.73s 所对应的距离是

$$d'' = \left|\frac{1}{2}(-g)t^2\right| = \frac{1}{2}(9.8)(5.73)^2 = 160.9(\text{m})$$

物体 1 运动的总距离为 $d = d' + d'' = 0.4 + 160.9 = 161.3(\text{m})$

4.72 在图 4-20 中，两物体重力分别是 200 和 300N，滑轮无摩擦无质量. 滑轮 1 是定滑轮，滑轮 2 是动滑轮，求 T_1 和 T_2 及每个物体的加速度.

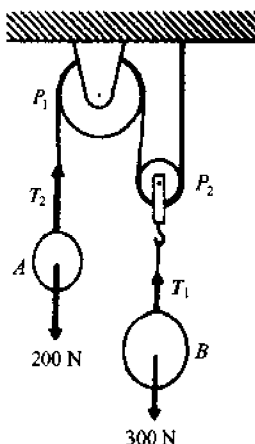


图 4-20

解 ☞ 物体 B 上升，物体 A 将下降，有 $T_1 = 2T_2$，物体 B 上受到拉力是物体 A 受拉力的两倍.

设 a 是A 向下加速度，$\frac{1}{2}a$ 是物体 B 向上加速度.

对于物体 B 有　$T_1 - 300\text{N} = m_B\left(\frac{1}{2}a\right)$

对于物体 A 有　$200\text{N} - T_2 = m_A a$

但 $m = w/g$，$m_A = (200/9.8)\text{kg}$ 和 $m_B = (300/9.8)\text{kg}$. 且 $T_1 = 2T_2$

可求出 $T_1 = 327\text{N}$，　$T_2 = 164\text{N}$，　$a = 1.78\text{m/s}^2$

4.73 在图 4-21 中，一倾角为 25°的斜面，在顶端有一滑轮，物体 A 质量 30 kg，物体 B 质量 20 kg，计算物体 B2 s 内从静止开始下降的距离，忽略摩擦.

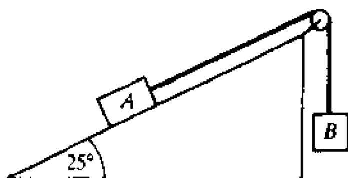


图 4-21

解 ☞ 对于物体 A　有 $T - w_a \sin 25° = m_a a$

对于物体 B　$w_b - T = m_b a$，其中 $m_b = 20\text{kg}$，$w_b = 196\text{N}$. T 是绳中张力，消去 T

可得 $w_b - w_a \sin 25° = (m_a + m_b)a$ 代入数据得 $a = 1.44\text{m/s}^2$

B 的下落方程为 $y = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$，且 $v_{oy} = 0$，代入 $a_y = 1.44\text{m/s}^2$，$t = 2\text{s}$，

可得 $y = 2.88\text{m}$

4.74 题 4.73 中，如果物体 A 和斜面摩擦系数是 0.20，重解上题.

解 ☞ 对于 A，方程改写为 $T - w_a \sin 25° - f = m_a a$

对于 B 方程不变为 $w_b - T = m_b a$

两方程相加，得 $w_b - w_a \sin 25° - f = (m_b + m_a)a$

且 $f = \mu_k N$，其中 $\mu_k = 0.2$，注意到 $\sum F_y = 0$

$$w_a \cos 25° - N = 0，得 N = 266\text{N}, f = 53\text{N}$$

可得到 $a = 0.38\text{m/s}^2$，再由 $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$，用 $v_{oy} = 0$，$a_y = 0.38\text{m/s}^2$，$t = 2\text{s}$ 代入，可得到 $y = 0.76\text{m}$.

4.75 图 4-22，箱子 A、B 有相同质量，和斜面及平面间的摩擦系数是 $\mu = 0.15$，求箱子的加速度及绳中张力.

解 ☞ 利用 $f = uY$. 可得

$$f_A = (0.15)(mg), \qquad f_B = (0.15)(0.87mg)$$

而 $m = 40\text{kg}$，所以 $f_A = 59\text{N}$，　及 $f_B = 51\text{N}$ 利用 $\sum F_x = ma_x$，取运动方向为正，

有 $T - 59\text{N} = (40\text{kg})a$　和 $0.5\text{mg} - T - 51\text{N} = (40\text{kg})a$. 解这两个方程可得到 $a = 1.08\text{m/s}^2$ 及 $T = 102\text{N}$

4.76 质量分别为 m_1 和 m_2 的两物体，从图 4.23(a)位置释放，如果有光滑桌面的桌子质量

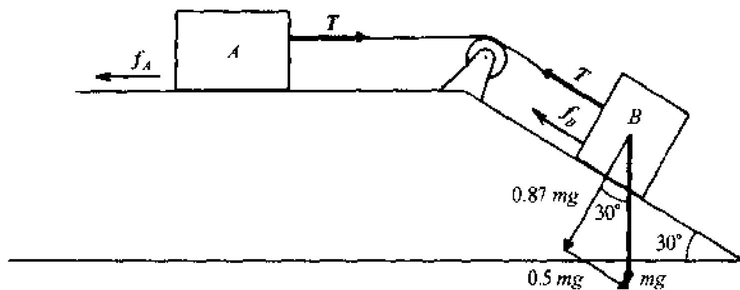


图 4-22

为 m_3,求地面对桌子的作用力.假设桌子没有移动.

解 ☞ 由图 4-23(b).物体的受力方程是

物 1:　$\sum F_{ver} = w_1 \quad T = m_1 a$

物 2:　$\sum F_{hor} = T = m_2 a$

桌子:$\sum F_{ver} = N - T - w_2 - w_3 = 0, \quad \sum F_{hor} = T - f = 0$

其中 N 和 f 分别是地面给桌子竖直和水平方向上的力,

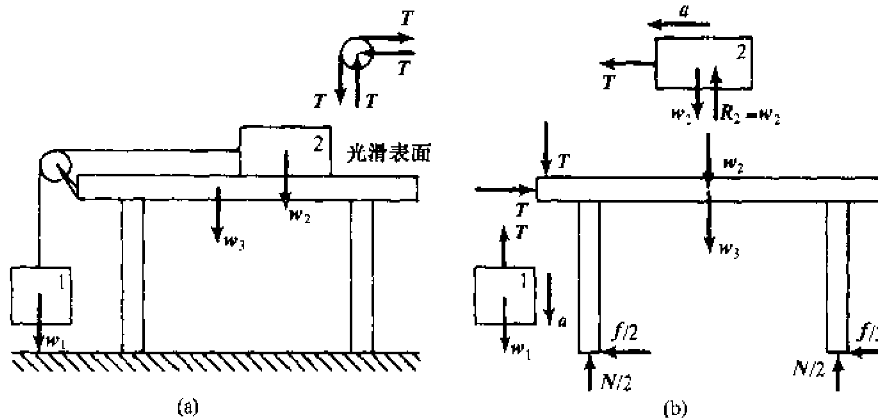


图 4-23

由前二个方程解得

$$a = \frac{w_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$

接着求得

$$f = T = m_2 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

最后解得

$$N = T + m_2 g + m_3 g = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} + m_2 + m_3\right) g$$

4.77　三个相同物体,质量均为 0.6 kg,用轻绳相连,如图 4-24 示,假设它们在光滑的水平面上,并在力 F 作用下产生加速度 $4.0\ \mathrm{m/s^2}$,计算 F 大小及绳中两张力 T_{bc} 及 T_{ab}.

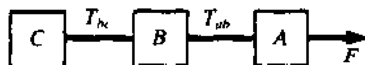


图 4-24

解 ☞ 对三物体分别用牛顿第二定律,有

解得　$F - T_{ab} = ma \quad T_{ab} - T_{bc} = ma \quad T_{bc} = ma$

$F = 3ma = 3(0.6\mathrm{kg})(4.0\mathrm{m/s^2}) = 7.2\mathrm{N}$

$$T_{ab} = 7.2\text{N} - (0.6\text{kg})(4.0\text{m/s}^2) = 4.8\text{N}$$
$$T_{bc} = (0.6\text{kg})(4.0\text{m/s}^2) = 2.4\text{N}.$$

4.78 三相连物体质量分别是 6 kg、9 kg, 10 kg, 如图 4-25 所示. 桌面和物体 B 之间的摩擦系数为 0.2. 试求(a)系统的加速度,(b)左边、右边两绳的张力.

解 ☞ (a)设张力分别为 T_1 和 T_2. 滑轮无摩擦. 对每个物体用牛顿第二定律, 对 C 取向下为正, 对 A 取向上为正, 对 B 取向右为正. 有

$$W_c - T_2 = m_c a$$
$$T_2 - T_1 - f = m_b a$$
$$T_1 - W_a = m_a a$$

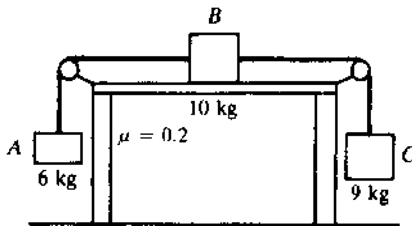


图 4-25

可得到一个式子

$$W_c - f - W_a = (m_b + m_a + m_c)a$$

解得 $a = 0.39\text{m/s}^2$, (b)将 a 代入 A 和 C 的方程中去, 可算出 $T_1 = 61\text{N}$, $T_2 = 85\text{N}$.

4.79 图 4-26. 物体 A 和桌面之间的摩擦系数为 0.20, $m_A = 25\text{kg}$, $m_B = 15\text{kg}$. 问物体 B 3s 内下降的距离是多少? (当系统被释放之后).

解 ☞ 物体 A, 没有竖直方向运动, 故 $f = uY = (0.20).(25\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) = 49\text{N}$. 取运动的方向为正, 有

$$T - f = m_A a, \quad T - 49\text{N} = (25\text{kg})a$$
$$m_{\text{kg}} - T = m_B a, \quad -T + (15)(9.8)\text{N} = (15\text{kg})a.$$

可得到 $a = 2.45\text{m/s}^2$. 将 $a = 2.45\text{m/s}^2$, $v_0 = 0$, $t = 3\text{s}$ 代入 $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ 得 $y = 0 + \frac{1}{2}(2.45\text{m/s}^2) \cdot (3\text{s})^2 = 11.0\text{m}$. 即物体 B 在 3s 内下降的距离.

4.80 在图 4.26 中, 物体 A 的作用力 T 增加多少才能使 A 的加速度是向左 0.75m/s^2, 假设题 4.79 中 $\mu = 0.20$, $m_A = 25\text{kg}$ 及 $m_B = 15\text{kg}$.

解 ☞ 与题 4.79 一样 $f = 49\text{N}$, 依次对每个物体写 $F = ma$, 取运动方向为正, 有

$$p - T - 49\text{N} = (25\text{kg})(0.75\text{m/s}^2)$$
$$T - (15)(9.8)\text{N} = (15\text{kg})(0.75\text{m/s}^2)$$

解得 $p = 226\text{N}$

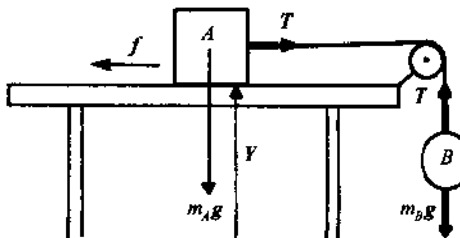


图 4-26

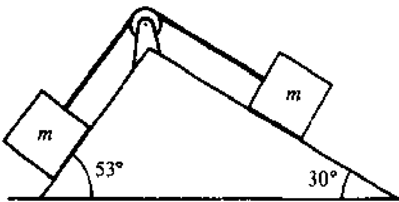


图 4-27

4.81 如图 4-27, 两个物体具有相同质量, 静摩擦系数和动摩擦系数均为 0.30. 如果给系统一个向左的 0.90m/s 的初速, 到达静止前物体能移动多远? 假设斜面足够长?

解 ☞ 对于左边物体有 $$W\sin 53° - f_a - T = ma \quad (1)$$

对于右边物体有 $$T - W\sin 30° - f_b = ma \quad (2)$$

m 是质量 $W = mg$. 且

$$N_b = W\cos 30°, \quad N_a = W\cos 53°$$
$$f_b = u_k N_b, \quad f_a = u_k N_a$$

方程(1)、(2)可变成 $W\sin 53° - f_a - f_b - W\sin 30° = 2ma$. 将 W、f_a、f_b 表达式代入, 得 $mg\sin 53° -$

$u_k mg\cos53° - u_k mg\cos30° - mg\sin30° = 2ma$. 解得

$$a = g(\sin53° - u_k\cos53° - u_k\cos30° - \sin30°)/2 = -0.694\text{m/s}^2$$

利用 $v_x^2 = v_{ax}^2 + 2a_x x$, 得 $a_x = -0.694\text{m/s}^2$, 由 $v_x = 0$, 得 $x = 0.583\text{m}$

4.82 如果图 4-27 中物体处于静止,那么摩擦系数的最小值是多少?

解 ☞ $f_a = \mu_s mg\cos53°$, $f_b = \mu_s mg\cos30°$

物 A: $mg\sin53° - u_s mg\cos53° - T = 0$

物 B: $T - mg\sin30° - u_s mg\cos30° = 0$

将两方程相加,

$$mg(\sin53° - u_s\cos53° - \sin30° - u_s\cos30°) = 0$$

可得到

$$u_s(\cos53° + \cos30°) = \sin53° - \sin30°, \quad u_s = 0.203$$

4.83 一飞艇以加速度 a 正在下降,要从飞艇上拿掉多少压舱物才能使其上升的加速度也达到 a? 假设前后二种情况所受浮力相同.

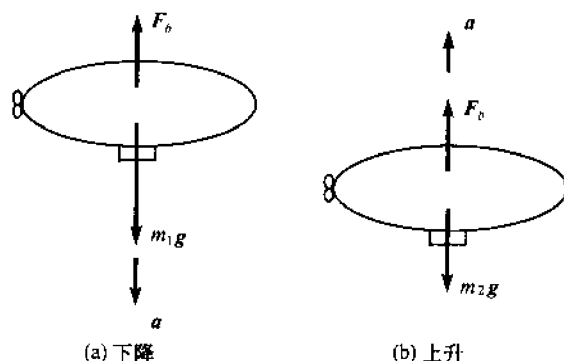


图 4-28

解 ☞ 由图 4-28, 运动方程是

下降: $m_1g - F_b = m_1a$

上升: $F_b - m_2g = m_2a$

相加可得: $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$ 且 $m_1 - m_2 = m$ 是拿掉的压舱物的质量, 因而

$$mg = [m_1 + (m_1 - m)]a,$$

$$m = \left(\frac{2a}{g + a}\right)m_1$$

4.84[c] 证明题 4.83 中,当压舱物去掉后,质心加速度不变.利用该事实去验证在题 4.83 中求得的 m 之值.

证 ☞ 取向上为正. 系统的 $\sum F$ 在前后是相同的, $\sum F = m_1 a_0$. 有 $a = -a$, 前后不变. $y_0 = [m_2 y_{m_2} + (m_1 - m_2)y_{m_1-m_2}]/m_1$. 有 $\ddot{y}_c = [m_2\ddot{y}_{m_2} + (m_1 - m_2)\ddot{y}_{m_1-m_2}]/m_1$, 但 $\ddot{y}_{m_2} = a$, $\ddot{y}_{m_1-m_2} = -g$, 及 $\ddot{y}_c = a_c = -a$; 于是, $-a = [m_2a - (m_1 - m_2)g]/m_1$, $(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$, 与上题一样. 令 $m \equiv m_1 - m_2$, 即可得到同样结果.

4.85 质量分别为 2.0、4.0、6.0 kg 的三物体,分别如图 4-29 放置.光滑斜面的倾角为 60°,整个系统受到向上 120 N 的力,使系统向上运动.绳子质量忽略,求物体加速度是多少?

解 ☞ 已知 $F = 120\text{N}$, $m_1 = 2.0\text{kg}$, $m_2 = 4.0\text{kg}$, $m_3 = 6.0\text{kg}$. 利用牛顿第二定律,

$$F - T_2 - m_3g\sin60° = m_3a$$

$$T_2 - T_1 - m_2g\sin60° = m_2a$$

$$T_1 - m_1g\sin60° = m_1a$$

将这些方程相加, $F - (m_1 + m_2 + m_3)g\sin60° = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$120\text{N} - (12.0\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)(0.866) = (12.0\text{kg})a$$

$$a = 1.51\text{m/s}^2$$

4.86 参见题 4.85,上面和中间物体之间的张力,下面和中间物体之张力分别是多少?

解 ☞ 紧接题 4.85, 将 a 值代入各物体方程, 求解 T_1 和 T_2.

对于物体 1: $T_1 = (2.0\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)(0.866) + (2.0\text{kg})(1.51\text{m/s}^2) = 20.0\text{N}$

对于物体 3: $T_2 = (2.0\text{N}) - (6.0\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)(0.866) - (6.0\text{kg})(1.51\text{m/s}^2) = 60.0\text{N}$

4.87 一滑雪者向山脚滑去,山坡与水平方向夹角为 θ. 假设 u_k 是滑雪者和山坡的摩擦系数,证明滑雪者的加速度是 $a = g(\sin\theta - u_k\cos\theta)$.

证 ☞ 将题 4.23 中运动方向反向,将滑动摩擦代替静摩擦,即得结果.

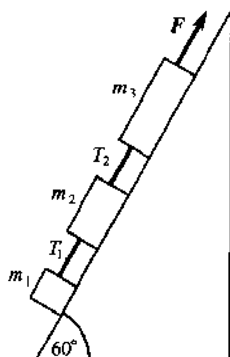


图 4-29

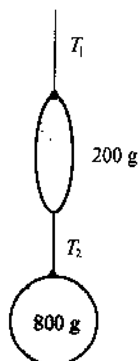


图 4-30

4.88 参见图 4-30. 系统分别有向上的 6.0m/s² 的加速度,向下的 0.60m/s² 的加速度,试求这两种情况下绳之张力 T_1 和 T_2.

解 ☞ 将整个系统看成一个整体,有 $T_1 - 1.0g = 1.0a$,再分别讨论两物体,对于 800g 物体,有 $T_2 - 0.8g = 0.8a$. 上述两表达式中的 a 是相同的.

(a)$a = 6.0\text{m/s}^2$,则 $T_1 = 6.0 + 9.8 = 15.8(\text{N})$和 $T_2 = 12.6\text{N}$,

(b)$a = -0.60\text{m/s}^2$,则 $T_1 = 9.8 - 0.6 = 9.2(\text{N})$和 $T_2 = 7.4\text{N}$.

4.89 图 4-30 中,两物体间绳张力如果达到 15.0N,则将会断裂. 问向上所允许的最大加速度是多少? 如果绳张力是 7.0N,又怎样呢?

解 ☞ 由题 4.88 可知 $T_1 > T_2$,那么

对于整个系统:$T_1 - 1.0g = 1.0a$,对于 $T_1 = 15.0\text{N}$, $a = 5.2\text{m/s}^2$,对于 $T_1 = 7.0\text{N}$, $a = -2.8\text{m/s}^2$.

4.90 一个 6.0 kg 物体静止在无摩擦的桌面上. 通过一无摩擦的滑轮连接一 3.0 kg 的物体,如图 4-31. (a)加速度 a 是多少? (b)绳中张力 T 是多少?

解 ☞ (a)问题的类型同题 4.78 相似,可以看作一维的情况. 因而,牛顿第二定律可写成

$$F = ma,\ m_2g = (m_1 + m_2)a,\ 3(9.8) = (6 + 3)a$$

$$29.4 = 9a,\ a = 3.27\text{m/s}^2$$

(b)对于 m_1 单独用牛顿第二定律,有 $T = m_1a = 6(3.27) = 19.6(\text{N})$

对 m_2 单独用牛顿第二定律

$$m_2g - T = m_2a, \qquad \text{即 } 3(9.8) - T = 3(3.27)$$

$$29.4 - T = 9.8, \qquad T = 19.6\text{N}$$

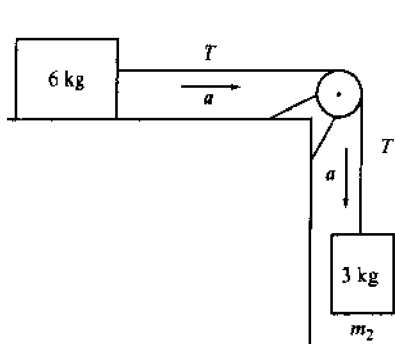


图 4-31

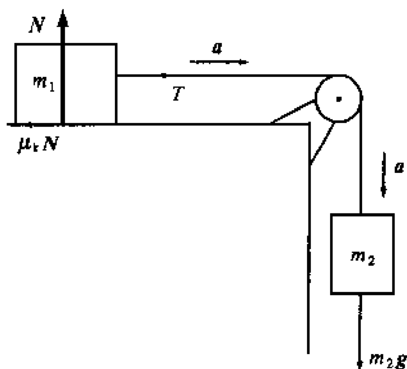


图 4-32

4.91 如图 4-32 所示. 设滑动摩擦系数等于 0.22, $m_2=3.0$ kg, $m_1=6.0$ kg. (a) 加速度 a 是多少? (b) 绳中张力 T 是多少?

解 ☞ 我们将该问题当作一维问题处理

(a)将系统作为一整体 有

合力 $F=ma$, $m=m_1+m_2=6.0+3.0=9.0$(kg)

合力 $F=m_2g-u_kN=ma$, $N=m_1g$

$ma=m_2g-u_km_1g$, $9.0a=3.0(9.8)-0.22(6.0)(9.8)=1.68(9.8)$,

$a=1.83\text{m/s}^2$

(b)绳子作用在 m_1 上的力:

$$T=u_kN+m_1a-12.94+10.98=23.9(\text{N})$$

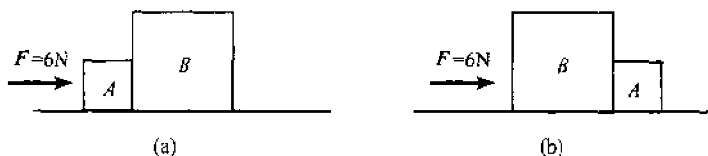


图 4-33

4.92 假设物块 A 和 B 质量分别为 2 kg 和 6 kg, 在一光滑水平面上, 用 6 N 的水平力推它们, 计算(a)系统的加速度(b)2 kg 物体作用于另一物体上的力.

解 ☞ (a)见图 4-33(a)视二物块为一整体.

$$M=m_a+m_b=8\text{kg},\quad F=Ma=6\text{N},\quad a=0.75\text{m/s}^2$$

(b)将物体 B 看作研究对象, 则 $F_{ab}=M_ba=4.5$N. 若物体如图 4-33(b)放置, 则仍有 $a=0.75\text{m/s}^2$, 而 $F-F_{ab}=M_ba$, $F_{ab}=1.5$N, 向左.

4.93 如图 4-34, 滑轮无质量无摩擦. 试求在作用力 F 下 m 的加速度, 假设 m 和地面之间无摩擦. 如果 m 和地面之间有摩擦力 f, 再计算之.

解 ☞ 注意 $T=F/2$, 该物体有 $T=ma$, $a=F/2m$. 后当有摩擦力 f 时, 有 $F/2-f=ma$, 有 $a=(F/2m)-(f/m)$

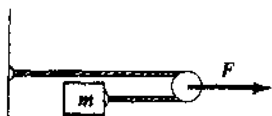


图 4-34

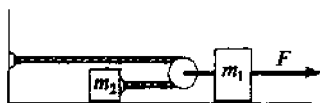


图 4-35

4.94 如图 4-35, 假设没有摩擦, 计算绳中张力和 m_2 之加速度. 设 $m_1=300$g, $m_2=200$g, $F=0.40$N.

解 ☞ 对每个物体写出 $F=ma$. 设 m_2 的加速度是 a, m_1 的加速度是 $a/2$. 那么有 $T=m_2a$ 及 $F-2T=m_1(a/2)$.

$$a=0.73\text{m/s}^2,\qquad T=0.145\text{N}$$

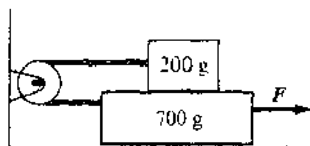


图 4-36

4.95 图 4-36 中, 力 F 必须多大, 才能使两物体的加速度达到 30m/s^2? 设两物体之间, 物体和地面之间摩擦系数是 0.150.

解 ☞ 分别讨论, 对于 200g 物体, 有

$F=ma$, $T-u(0.2g)=0.2a$ (T 为绳中张力)

对于 700g 物体, 有

$$F-T-u(0.2g)-u(0.9g)=0.7a$$

从两式中消去张力 T，可得 $F=0.9a+u(1.3g)$
$=0.9(0.30)+0.150(1.3g)=2.18\text{N}$

4.96 设图 4-36 中，对 700g 物体的顶和底的摩擦系数均相同. 如果 $a=70\text{m/s}^2$，$F=1.30\text{N}$，问摩擦系数为多少？

解 ☞ 根据题 4.95，$F=0.9a+u(1.3g)$；我们用 $F=1.30\text{N}$ 及 $a=0.750\text{m/s}^2$ 得 $u=0.053$.

4.97 图 4-37 中，如果 $m=3.0$ kg，物体 m 的加速度是 0.6m/s^2. 当 $m=4.0\text{kg}$ 时，$a=1.6\text{m/s}^2$. 试求 M 所受摩擦力及 M 大小. 忽略滑轮质量和摩擦.

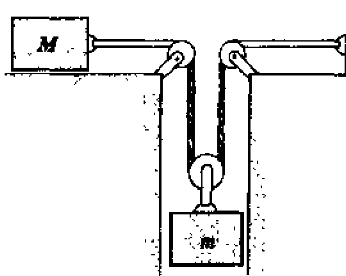


图 4-37

解 ☞ 对 m 每种情况用牛顿第二定律：

$$3(9.8)-2T_1=3(0.6),\quad T_1=13.8\text{N}$$
$$4(9.8)-2T_2=4(1.6),\quad T_2=16.4\text{N}$$

对 M 每种情况用牛顿第二定律：

$$13.8-f=M(1.2),164-f=M(3.2)$$

解得 $M=1.3\text{kg}$ 和 $f=12.2\text{N}$.

4.98 如图 4-38(a)，物体 1 的长度是物体 2 长度的 1/4，重力也是物体 2 的 1/4. 假设物体 2 和地面之间没有摩擦力，但物体 1、2 之间的摩擦系数 $\mu_k=0.2$. 当该系统被释放时，求当物体 1 仍在物体 2 上时，物体 2 移动的距离. 设物体 1 和 3 有相同的质量.

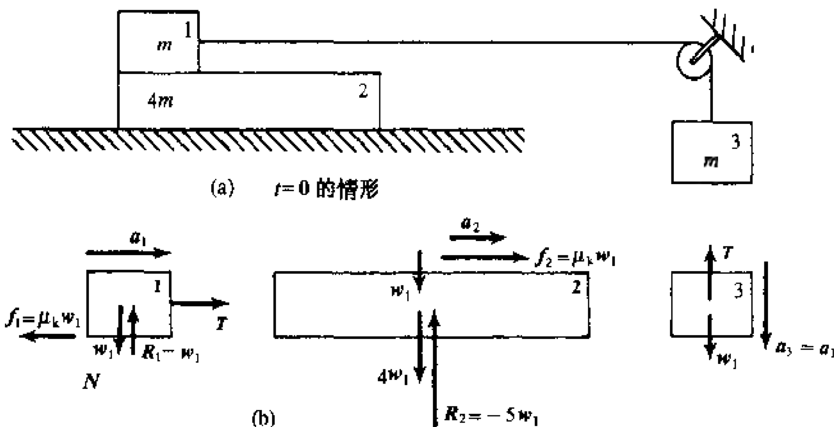


图 4-38

解 ☞ 见图 4-38(b)，运动方程为

$$\sum F_1=T-\mu_k w_1=ma_1,\quad \sum F_3=w_1-T=ma$$
$$\sum F_2-\mu_k w_1=4ma_2$$

同时解 1、3 方程可得到 $a_1=(g/2)(1-\mu_k)$；从第 2 个方程可得 $a_2=(g/4)\mu_k$. 物体 1 和 2 之间的位移由 $x=\dfrac{1}{2}at^2$ 给出，

$$x_1=\frac{g}{4}(1-\mu_k)t^2,\qquad x_2=\frac{g}{8}\mu_k t^2$$

物体 1 仍在物体 2 上的时候，有 $x_2+l=x_1=(l/16)$，其中 l 是物体 2 的长度，因而有

$$\frac{g}{8}\mu_k t^2-l=\frac{g}{4}(1-\mu_k)t^2+\frac{l}{16},\qquad t^2=\frac{15l}{2g(2-3\mu_k)}$$

$$x_2=\left(\frac{g}{8}\mu_k\right)\frac{15l}{2g(2-3\mu_k)}=\frac{15\mu_k}{16(2-3\mu_k)}l=\frac{l}{7.47}$$

4.99 一盘子静止在桌布上，它的中心离桌边 0.3 m，桌布突然以 9.2 m/s^2 的加速度被抽动，见图 4-39(a). 盘子和桌布之滑动摩擦系数 $\mu_k=0.75$. 试求当盘子离开桌布边缘时的

(a)加速度,(b)速度,(c)相对桌边的距离.设桌布恰与桌面大小相等.

解 ☞ (a)由图 4-39(b),盘子的动力学方程是 $\mu mg = m\ddot{x}_p$, $\ddot{x} = \mu g = (0.75)(9.8) = 7.35\ \mathrm{m/s^2}$ 盘子滑动是因为 $\ddot{x}_p < 9.2\ \mathrm{m/s^2}$.(b)当桌布边缘在盘中心时,布和盘子离桌边距离相同:即 $x_p = x_c$, $0.3 + \frac{1}{2}(7.4)t^2 = 6 + \frac{1}{2}(9.2)t^2$ 解之, $t = 0.58$ s. $v_p = 0 + (7.35)(0.58) = 4.26(\mathrm{m/s})$　　(c) $x_p = 0.3 + 0(0.58) + \frac{1}{2}(7.35)(0.58)^2 = 1.54(\mathrm{m})$

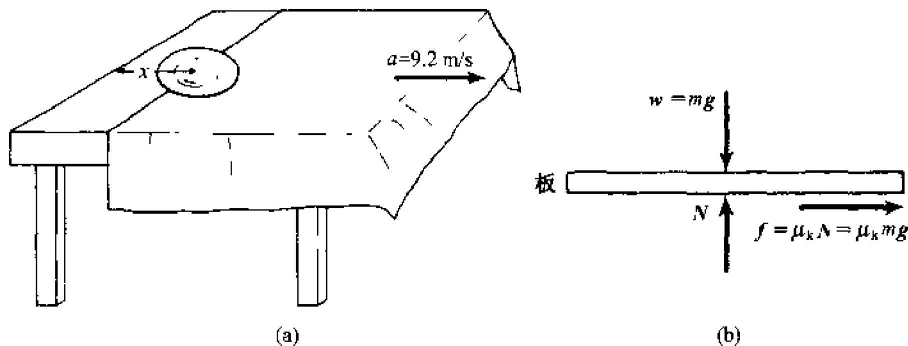


图 4-39

4.100 如图 4-40 的滑轮系统,动滑轮 A、B、C 质量均为 1 kg, D、E 为定滑轮,绳子无伸缩,求绳中张力及无摩擦滑轮的加速度.

解 ☞ 令滑轮 A、B、C 中心在时刻 t 的位置分别为 y_A、y_B、y_C,加速度分别为 a_A、a_B、a_C,由图可知 $(y_B - y_A) + y_B + 2y_A + y_C + (y_C - y_B) =$ 常量.即 $y_A + y_B + 2y_C =$ 常量.对上式求两阶导数,可得 $a_A + a_B + 2a_C = 0$.整个系统由一根绳穿过,绳中张力相同, $T + mg - 2T = ma_A$, $T + mg - 2T = ma_B$, $mg - 2T = ma_c$ 代入 $m = 1$ kg,可得

$$a_A = a_B = -a_C = \frac{g}{3} = 3.3\ \mathrm{m/s},\quad T = 6.5\ \mathrm{N}$$

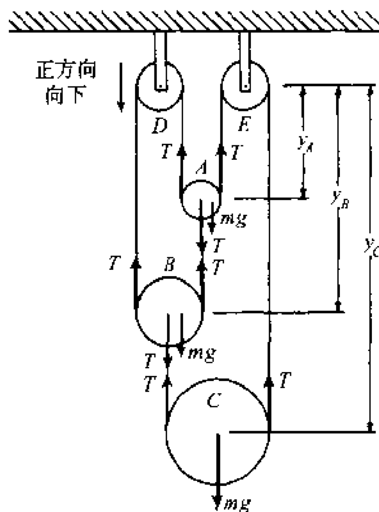


图 4-40

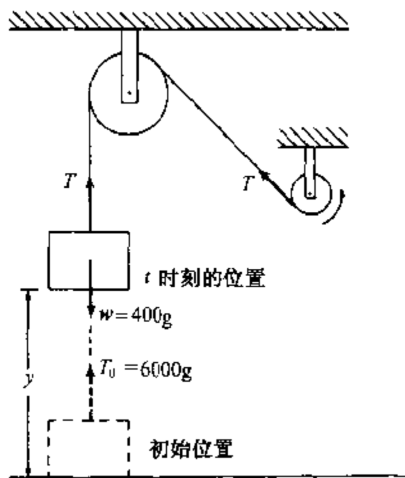


图 4-41

4.101[c] 400 kg 的物体悬挂在一轻质竖直链条下端(图 4-41),被竖直向上拉.一开始物体是静止的,作用在链条上向上的拉力是 $6000g$ N,当物体升高时,拉力以 $360g$ N/m 的变化率均匀减小,物体升高 10 m 时速度是多少?

解 ☞ 在时刻 t,设 y 是物体离初始位置的高度,作用在链条上的力为 $T = (6000 - 360y)g$,利

用牛顿第二定律,有 $T-400g=400y$, $(5600-360y)g=400y$ 因为 $\dot{y}=v$(物体的速度), $2y=2\frac{dv}{dt}=2\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=2v\frac{dv}{dy}=d(v^2)/dy$ 因此 $200\frac{d(v^2)}{dy}=(5600-360y)g$, $d(v^2)=g(28-1.8y)dy$,令高 10 m 处速度为 V,则积分得 $\int_0^{V^2}d(v^2)=g\int_0^{10}(28-1.8y)dy$, $V^2=g[28y-0.9y^2]_0^{10}=190g$, $V=43.2$ m/s. V 取正值是因为 $0\leqslant y\leqslant 10$、合力 $(5600-360y)$ 为正,初速度为零, V 一定是正的.

第五章　平面运动(Ⅰ)

5.1　抛体运动

5.1　一块大理石从高为 80 cm 的桌子边缘以 20 cm/s 的速度向外滚出.它到达地板上的时间是多少？落地时距抛出点的水平距离是多少？

解　☞ 以桌子边缘为原点,取向下为正.

$v_{0x}=v_o=20\ \mathrm{cm/s}$, $v_{0y}=0$, $a_y=+g=+980\ \mathrm{cm/s^2}$, $a_x=0$ 求下落时间, $y=v_{0y}t+\frac{1}{2}gt^2$, $80\ \mathrm{cm}=0+(490\ \mathrm{cm/s^2})t^2$; $t=0.40$ s.水平距离 $x=v_{0x}t=(20\ \mathrm{cm/s})(0.40\ \mathrm{s})=8.0$ cm.

5.2　一小球从高为 70 cm 的桌子边缘被抛出,它的速度必须是多少才能导致它着地前运动的水平距离也是 70 cm.

解　☞ 在水平方向上:$x=v_xt$, $\Rightarrow v_x=0.70/t$.在垂直问题上,取向下为正,$v_0=0$, $y=0.7$ m, $a=9.8\ \mathrm{m/s^2}$.代入 $y=v_0t+at^2/2\Rightarrow t=0.378$ s.有 $v_x=1.85$ m/s.

5.3　一大理石以 100 cm/s 的速度在水平桌子边缘被抛出.如果它的落地点距抛出点水平距离为 30 cm,问桌子的高度是多少？

解　☞ 有 $v_{0x}=100$ cm/s.对于水平方向:

$$s_x=v_{0x}t,\quad 30=100t,\quad t=0.30\ \mathrm{s}$$

垂直方向:$s_y=v_{0y}t+\frac{1}{2}at^2=0+\frac{1}{2}(980)(0.30)^2=44.1$ cm

5.4　一普通的电视机内,电子束水平地射向电视屏幕,速度大约是 5×10^7 m/s.问当电子前进 40 cm 从电子枪到屏幕上,它下降的高度是多少？作为比较,如果一水柱水平移动 40 cm,当它以 2 m/s 的初速度从水管口水平射出,那么它的前后落差是多少？

解　☞ 对于电子,$t=x/v_x=0.40/(5\times10^7)=8\times10^{-9}$(s).在垂直方向上,$y=v_{0y}t+at^2/2$, $\Rightarrow y=0+4.9(64\times10^{-18})=3.1\times10^{-16}$(m).对于水滴,$t=0.40/2=0.20$ (s),有 $y=0.196$ m.

5.5　图 5-1,一物体被向上抛出,初速是 40 m/s,与水平方向夹角为 50°,它需要多少时间回到地面上？

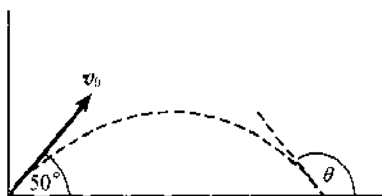


图 5-1

解　☞ 取向上为正,以抛出点为原点.

$$v_{0x}=v_0\cos50^\circ=(40\ \mathrm{m/s})(0.642)=25.7\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{0y}=v_0\sin50^\circ=(40\ \mathrm{m/s})(0.766)=30.6\ \mathrm{m/s}$$
$$a_y=-g=-9.8\ \mathrm{m/s^2},\quad a_x=0$$

为求时间,有 $y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$,在终点时,$y=0$,所以,$0=(30.6\ \mathrm{m/s})t-(4.9\ \mathrm{m/s^2})t^2$, $4.9t^2=30.6t$, $t=6.24$ s.

5.6　(问题同 5.5)该物体打到地面上时,与抛出点水平相距多远？与水平面夹角是多少？

解　☞ 水平距离 $R=v_{0x}t=(25.7\ \mathrm{m/s})(6.24\ \mathrm{s})=160$ m.由对称性可知,它最终以 50°(和负 x 轴夹角)撞击地面.也可由:$v_y=-v_{0y}$, $v_x=v_{0x}$,得 $\tan\theta=-\tan\theta_0$.有 $180^\circ-\theta=\theta_0$.

5.7　一物体从 170 m 高的大楼上抛出,初速度与水平面夹角是 30°,大小为 40 m/s.它需要花多长时间到达地面？

解　☞ 取向下为正,原点就是抛出点(图 5-2).$v_{0x}=v_0\cos30^\circ=(40\ \mathrm{m/s})(0.866)=34.6$ m/s, $v_{0y}=v_0\sin30^\circ=(40\ \mathrm{m/s})\cdot(0.500)=20.0$ m/s　　$a_y=g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$, $a_x=0$

有不同方法求时间.

方法 1 $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 170\ \text{m} = (20.0\ \text{m/s})t + (4.9\ \text{m/s}^2)t^2$

$$t = \frac{-20 \pm (400 + 3332)^{1/2}}{9.8} = 4.2\ (\text{s})$$

(我们只能取正解)

方法 2 $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2gy \Rightarrow v_y^2 = (20.0\ \text{m/s})^2 + 2(9.8\ \text{m/s}^2)\cdot(170\ \text{m})$, $v_y = \pm 61\ \text{m/s}$, 我们取 $v_y = 61\ \text{m/s}$.

又 $v_y = v_{0y} + gt \Rightarrow 61\ \text{m/s} = 20.0\ \text{m/s} + (9.8\ \text{m/s}^2)t$

$t = 4.2\ \text{s}$

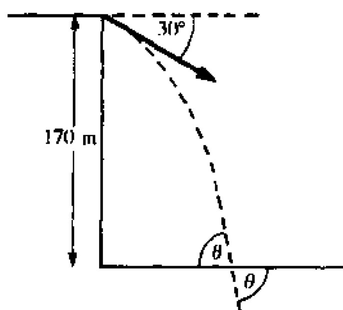


图 5-2

5.8 问题如 5.7, 试求物体落地时离建筑物下底端之距离及与水平地面的夹角.

解 ☞ $x = v_{0x}t = (34.6\ \text{m/s})(4.2\ \text{s}) = 140\ \text{m}$.

且 $\tan\theta = \left|\frac{v_y}{v_x}\right| = 1.76, \theta = 60.4°$

既然 v_y 是负的, v_x 是正的, 很清楚在正 x 轴的下方(图 5-2)这正是我们所要求的角度.

5.9 一物体以初速 128 ft/s, 且以与地面夹角 30°被抛出. 忽略空气阻力, 试问(a)它到达地面需几秒钟? (b)它能达到什么高度? (c)它运动的水平距离是多少?

解 ☞ (a)先求 v_{0y}, 决定物体向上及向下自由落体所需时间 $s_y = 0$. 从图 5-3,

$v_{0y} = v\sin\theta = 128\sin 30° = 64\ \text{ft/s}, \quad s_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$

$0 = 64t + \frac{1}{2}(-32)t^2 = (64 - 16t)t, \quad t = 4\ \text{s}$

(b) 既然上升时间和下降时间相等, 抛物体在 $t = 2s$ 时到达最高点. 因而,

$$H = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = 64(2) + \frac{1}{2}(-32)(2)^2 = 64(\text{ft})$$

(c) 抛物体在 x 轴方向有恒定速度 $v_x = v\cos\theta$. 在 4 s 内达到地面. 水平距离是

$$s_x = v_x t = (v\cos\theta)t = 128(\cos 30°)4 = 512(0.866) = 443(\text{ft})$$

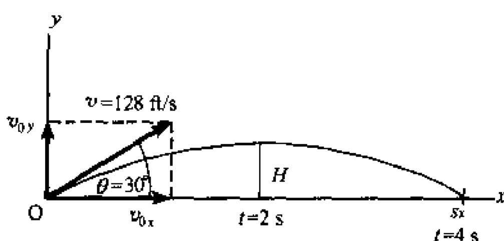


图 5-3

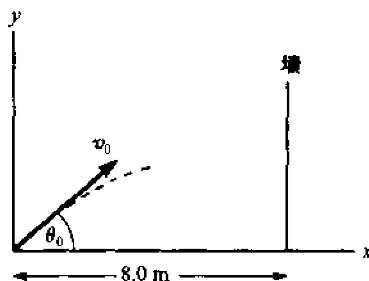


图 5-4

5.10 在地面上的一皮管射出一水柱, 与水平方向夹角是 40°. 水柱的初速度是 20 m/s. 问它能打在 8 m 远的墙面上多高的位置?

解 ☞ 如图 5-4, 有 $v_0 = 20\ \text{m/s}$ 和 $\theta_0 = 40°$, 我们有

$v_{0x} = v_0\cos\theta_0 = (20\ \text{m/s})\cos 40° = 15.3\ \text{m/s}$

$v_{0y} = v_0\sin\theta_0 = (20\ \text{m/s})\sin 40° = 12.8\ \text{m/s}$

且 $x = v_{0x}t$, $x = 8\ \text{m}$, $8\ \text{m} = (15.3\ \text{m/s}t) \Rightarrow t = 0.52\ \text{s}$. 为了求高度, 我们用 $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, 且 $t = 0.52\ \text{s}$, $y = (12.8\ \text{m/s})(0.52\ \text{s}) - (4.9\ \text{m/s}^2)(0.52\ \text{s})^2 = 5.33\ \text{m}$

5.11 一棒球手击出一本垒打, 球的初速度为 132 ft/s, 与水平方向成 26°. 一外场员摸高 7 ft, 迅速跑动接球, 当球飞至距击球点 386 ft 的围栏处时, 从外场员上方飞出. 设击球点距地面高 3 ft, 飞出的球距外场员手套上方的高度是多少?

解 ☞ 如图5-5所示,x轴取在地面上方3 ft处,我们要求出球的轨迹上$x=386$ ft时y的值.减去外场员的手套位于x轴上方的高度,即7 ft − 3 ft = 4 ft.为求y,有$u_{0x}=v_0\cos\theta_0=(132\ \text{ft/s})\cos26°=119$ ft/s, $v_{0y}=v_0\sin\theta_0=(132\ \text{ft/s})\sin26°=57.9$ ft/s.由$x=u_{0x}t$,代入$x=386$ ft, 386 ft = (119 ft/s)t,求得到达$x=386$ ft时的时间为$t=3.24$ s.又$y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2=(57.9\ \text{ft/s})(3.24\ \text{s})-\frac{1}{2}(32\ \text{ft/s}^2)(3.24\ \text{s})^2=19.6$ ft.在手套上方的高度 = 19.6 ft − 4ft = 15.6 ft

[注:轨迹方程$y=(\tan\theta_0)x-gx^2(2v_0^2\cos^2\theta_0)$可用于求$y$].

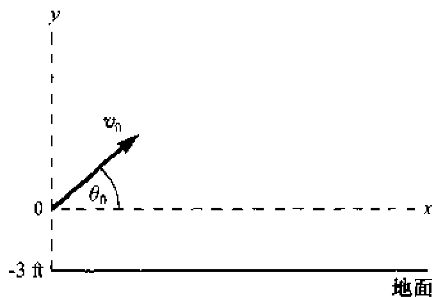


图5-5

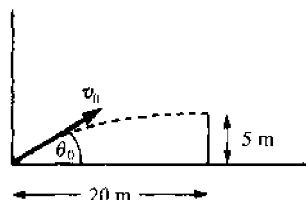


图5-6

5.12　一球被向上扔出去,已知刚开始时球速与水平面的角度是30°,最后落在20 m远的建筑物的顶端.顶端与比抛出点高出5 m.问该球的抛出速度是多少?

解 ☞ 如图5-6.我们利用方程$y=\tan\theta_0 x-gx^2/2v_0^2\cos^2\theta_0$,且有$x=20$ m和$y=5$m.那么5 m = (0.58)(20 m) − (9.8 m/s²)(20 m)²/2v_0^2×0.75, $v_0=20$ m/s.

5.13　一抛射体以$v_0=95$ m/s的初速度,倾斜角$\theta=50°$,被发射.5 s以后,它击中山顶.山顶距离发射点是多高?枪与目的地的水平距离是多少?

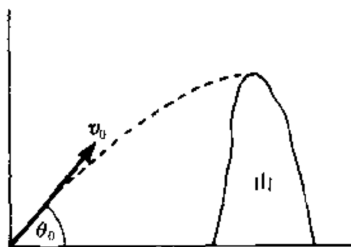


图5-7

解 ☞ 如图5-7. $v_0=95$ m/s; $\theta_0=50°$.在任意时刻t, $y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$,其中$v_{0y}=v_0\sin\theta_0=72.8$ m/s.对于$t=5$s,有$y=(72.8\ \text{m/s})(5.0\ \text{s})-\frac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{s})^2=241$ m.水平距离x由$x=v_{0x}t=v_0\cos\theta_0 t=(61.1\ \text{m/s})t$给出.在$t=5$ s,有$x=305$ m.

5.14　一球被扔出,初速是20 m/s,与水平面的夹角是37°.最终它到达一建筑物的屋顶,建筑物与抛出点的水平距离是24 m.问屋顶距抛出点的高度是多少?

解 ☞ 如速度分量分别是$v_{0x}=16$ m/s和$v_{0y}=12$ m/s.在水平方向,$t=x/v_x=24/16=1.5$ (s).在竖直方向　$y=v_{0y}t+at^2/2, \Rightarrow y=12(1.5)-4.9(2.25)=7.0$(m).

5.15　一被打击的棒球以110 ft/s的初速离开球棒,并与水平面夹角45°.球击中320 ft远处的隔离屏的顶端并弹进观众席,成为本垒打.问屏的顶端距地面的高度是多少(忽略空气阻力)?

解 ☞ $s_x=v_xt$, $v_x=110\cos45°$ = 恒量.

$$320=110(0.707)t\Rightarrow t=4.11\ \text{s}$$

$$s_y=v_{0y}t+\frac{1}{2}at^2=(110\sin45°)(4.11)+\frac{1}{2}(-32)(4.11)^2$$

$$=(110)(0.707)(4.11)+\frac{1}{2}(-32)(4.11)^2=319.6-270.3$$

$s_y=49$ ft(屏的高度)

5.16 一球被抛出，抛出点在一山脚，该山坡有恒定倾角 28°. 球的初速度：$v_0 = 33$ m/s, $\theta_0 = 65°$. 问该球打在斜面上时距离抛出点多远？此过程经历的时间为多少？

解 ☞ 如图 5-8. $v_0 = 33$ m/s, $\theta_0 = 65°$. 球的轨迹方程是 $y_0 = (\tan\theta)x - gx^2/(2v_0^2\cos^2\theta_0) = 2.14x - 0.025x^2$ 对于斜面而言，方程为 $y_s = (\tan28°)x = 0.53x$. 球打在斜面上，$y_b = y_s$，或 $0.53x = 2.14x - 0.025x^2$，$0.025x^2 = 1.61x$，得 $x = 64.4$ m. 设沿斜面的长度是 s，有 $x = s\cos28°$，$s = 72.9$ m. 且有 $x = v_{0x}t = (v_0\cos\theta_0)t = 13.9t$. 对于 $x = 64.4$ m，$t = 4.63$ s. 这就是球运动经历的时间.

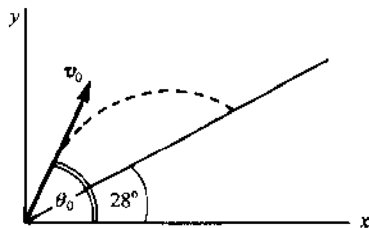


图 5-8

5.17 一抛射体以 50 m/s 的初速在水平地面上方被抛出，落地点距抛出点相距 200 m. 问抛射体被抛出时的抛射角是多少？

解 ☞ 在水平方向 $x = v_{0x}t$，$200 = (50\cos\theta)t$，其中 θ 就是我们所要求的角度. 在竖直方向. $y = v_{0y}t + at^2/2$，$0 = 50\sin\theta t - 4.9t^2$. 而 $t = 200/(50\cos\theta)$ 所以 $50\sin\theta = 4.9(4/\cos\theta)$，简化成 $2\sin\theta\cos\theta = 0.784$，即 $\sin2\theta = 0.784$，$\theta = 25.8°$.

5.18 如图 5-9，一球从一建筑物顶上被抛向一 50 ft 远的墙壁. 球的初速度是 20 ft/s，抛射角是 40°. 问当球打到墙面上时，在竖直方向上它距抛出点距离是多少？

解 ☞ $v_{0x} = (20\text{ ft/s})\cos40° = 15.3$ ft/s，$v_{0y} = (20\text{ ft/s})\sin40° = 12.9$ ft/s 在水平方向：$v_{ox} = v_{fx} = \bar{v}_x = 15.3$ ft/s. 有 $x = \bar{v}_xt$，即 $50\text{ ft} = (15.3\text{ ft/s})t$，$t = 3.27$ s. 在竖直方向上，取向下为正，$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = (-12.9\text{ ft/s})(3.27\text{ s}) + \frac{1}{2}(32.2\text{ ft/s}^2)(3.27\text{ s})^2 = 130$ ft 下方.

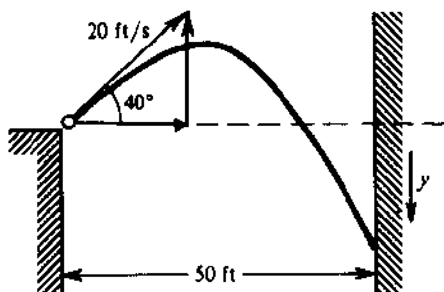


图 5-9

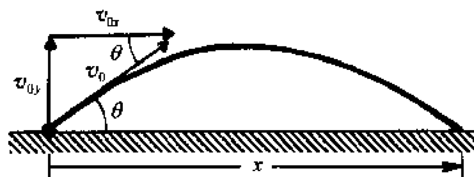


图 5-10

5.19 (a)炮弹从炮口中射出，具有初速度 v，及向上的抛射角 θ. 试求炮弹运动的距离 x. (b)各炮弹初速为 1.2 km/s，射向 15 km 远同一水平线上的靶标，求此炮弹的抛射角 θ. 见图 5-10.

解 ☞ (a)设 t 是子弹到达靶标的时间. 有 $x = v_{0x}t \Rightarrow t = x/v_{0x}$. 在竖直方向上，取向上为正. 当子弹击在靶上时，有 $0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$. 解之得 $t = 2v_{0y}/g$. 因此有

$$\frac{x}{v_{0x}} = \frac{2v_{0y}}{g},\ x = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2(v_0\cos\theta)(v_0\sin\theta)}{g} = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$$

(b) $\sin2\theta = \frac{gx}{v_0^2} = \frac{(9.8\times10^{-3}\text{km/s}^2)(15\text{km})}{(1.2\text{ km/s})^2} = 0.102$

有 $2\theta = 5.9°$，$\theta = 3.0°$

5.20 一来福枪子弹具有枪口速度 680 ft/s. (a)要使来福枪子弹射程最远，那么出射角应为多少(忽略空气阻力)？(b)计算最大射程.

解 ☞ (a)由题 5.19 (a)当 $\sin2\theta = 1$，即 $\theta = 45°$ 可得到最大射程，(b) $x_{max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(680\text{ ft/s})^2}{32\text{ ft/s}} = 14450$ ft.

5.21　一高尔夫球被打击后具有初速度 30 m/s,出射角是 60°.(a)它能达到多高?(b)假设地面是水平的,它的落地点距出发点多远?

解　☞ (a)取向上为正,$v_{0y}=30\sin60°=15\sqrt{3}$m/s.在最大高度,$v_y=0$.有 $v_y^2=v_{0y}^2+2ah$,$0=675-19.6h$. $h=\frac{675}{19.6}=34.4$(m)

(b)由题 5.19(a)

$$x=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}=\frac{900(\sqrt{3}/2)}{9.8}=79.5(\text{m})$$

5.22　证明枪射出的子弹当出射角是 60°时它达到的高度是出射角 30°时达到高度的 3 倍,但最终水平射程是相等的.

证　☞ 假设两个不同角度所对应的初速度 v_0 是相同的.最大高度满足条件 $v_y=0$.有 $v_y^2=v_{0y}^2-2gy$,得 $y_{max}=v_{0y}^2/(2g)$.注意到 $v_{0y}=v_0\sin\theta_0$,有 $y_{max}=(v_0^2\sin^2\theta)/2g$. $y_{max}(60°)/y_{max}(30°)=\sin^2 60°/\sin^2 30°=3$.为了证明水平射程是相同的,我们注意到在距离公式[题 5.19(a)]中,$\cos60°\sin60°=\cos30°\sin30°$因而 30°和 60°射程相同.

5.23　图 5-11,一抛射体以水平速度 330 m/s 从高为 80 m 的崖顶上被抛出.(a)抛射体落在崖脚下的地面上需花多长时间?(b)落地点距崖脚多远?(c)落地时速度是多少?

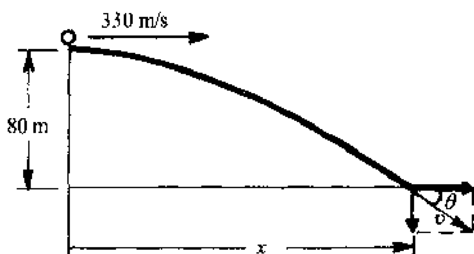


图 5-11

解　☞ (a)水平和竖直方向的运动是独立的.在竖直方向,取向下为正,有 $y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2$,$80\text{ m}=0+\frac{1}{2}(9.8\ m/s^2)t^2$,$t=4.04$ s.

(b)水平方向的运动,有 $a=0$ $\bar{v}_x=v_{fx}=330$ m/s. $x=v_xt=(330\text{ m/s})(4.04\text{ s})=1330$ m.

(c)最后速度的水平分量是 330 m/s.竖直方向速度 $v_{fy}=v_{0y}+a_yt$,$t=4.04$ s 时,$v_{fy}=0+(9.8\text{ m/s}^2)(4.04\text{ s})=40$ m/s.

所以,合速度 v(见图 5-11)为 $v=\sqrt{(40\text{ m/s})^2+(330\text{ m/s})^2}=332$ m/s.角度 θ 由 $\tan\theta=40/330$ 给出.$\theta=69°$.

5.24　飞行表演飞机以 15 m/s 的速度飞行、离地面 100 m,如图 4-3.如果从飞机上释放一袋面粉,从释放点到落地点的水平距离是多少?

解　☞ 同 5.23 的过程,有 $y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2$,即 $100\text{ m}=0+\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)t^2$,$t=4.5$ s.而 $x=v_xt=(15\text{ m/s})(4.5\text{ s})=68$ m,因为面粉袋的初速度和飞机的速度一致.

5.25　一棒球以 100 m/s 的初速度被抛出,出射角是 30°.问棒球到达跟抛出点同一高度时离抛出点距离是多少?

解　☞ $x=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}=\frac{10^4(\sqrt{3}/2)}{9.8}=890$ (m)

5.26　一卡车以 30 m/s 恒定速度沿一水平直线公路上行驶.一抛射体从行驶的卡车上被抛出,当卡车行进 80 m 后,抛射体又返回到卡车上.问抛射体被抛出时相对于卡车速度是多少?与水平面的夹角是多少?

解　☞ 抛射体在空中停留的时间必须是 $t=x/v_x=(80\text{m})/(30\text{m/s})=2.67$ s.且初速度 v_0 满足 $y=v_0t+at^2/2$,有 $y=0$,$t=2.67$ s;因此有 $4.9t=v_0 \Rightarrow v_0=13.1$ m/s,$\theta=90°$.

5.27　图 5-12,α 粒子从一放射性材料射出穿过小缝 S,进入到两平行铁板 A 和 B 构成的空间中,A、B 之间有一定电压.因为两铁板之间有恒定电场,每个 α 粒子具有恒定加速度 $a=4\times10^{13}\text{m/s}^2$ 如果 $v_0=6\times10^6$m/s,且 $\theta=45°$,试求图中的 h 和 R.

解　☞ 电场力取代了重力,取向上为正,受力是 $B\rightarrow A$,已知 $v_0=6\times10^6$m/s;$\theta_0=45°$;$a_y=-4\times$

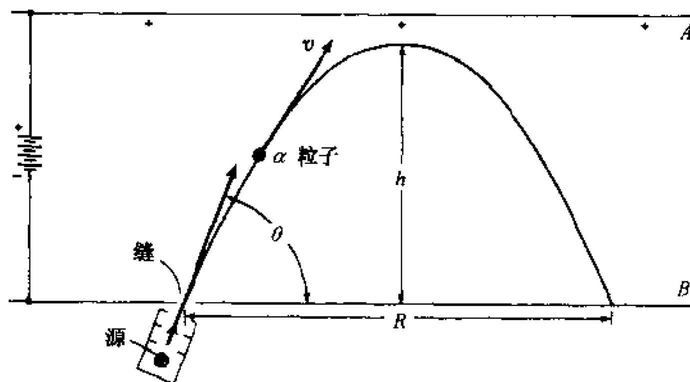


图 5-12

10^{13} m/s^2; $a_x = 0$. 有 $x = v_{0x}t = v_0\cos\theta_0 t = (4.24\times10^6 \text{m/s})t$; 同理有 $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = (4.24\times10^6\text{m/s})t - (2.0\times10^{13}\text{m/s}^2)t^2$

$$v_y = v_{0y} + a_yt = (4.24\times10^6\text{m/s}) - (4.0\times10^{13}\text{m/s}^2)t$$

在最高点, $y = h$, $v_y = 0$, $t = 1.06\times10^{-7}$s. 因而有 $h = (4.24\times10^6)(1.06\times10^{-7}) - (2.0\times10^{13})(1.06\times10^{-7})^2 = 0.225$ m. 水平范围 R 与 α 粒子又返回到 B 的 x 有关. 根据对称性, 有 $2t = 2.12\times10^{-7}$s. 因而 $R = (4.24\times10^6\text{m/s}).(2.12\times10^{-7}\text{s}) = 0.90$ m.

5.28 一球从高为35 m的塔上被向上抛出, 图5-13, 初速度是 $v_0 = 80$ m/s, 抛射角是 $\theta = 25°$. (a)求到达地面的时间及 P 到落地点之间的距离 R, (b)求落地时球速大小及其方向.

解 ☞ (a)在落地点, $y = -35$ m, $x = R$. 从 $y = -35 = (80\ \sin25°)t - \frac{1}{2}(9.8)t^2$, $t = 7.814$ s, $x = R = (80\ \cos25°)(7.814) = 566.55$ m.

(b)在相撞时, $v_y = 80\ \sin25° - (9.8)(7.814) = -42.77$ m/s 及 $v_x = v_{0x} = 80\cos 25° = 72.5$ m/s. 因而 $v = (42.77^2 + 72.5^2)^{1/2} = 84.18$ m/s 且 $\tan\beta = -42.77/72.5$, $\beta = -30.54°$.

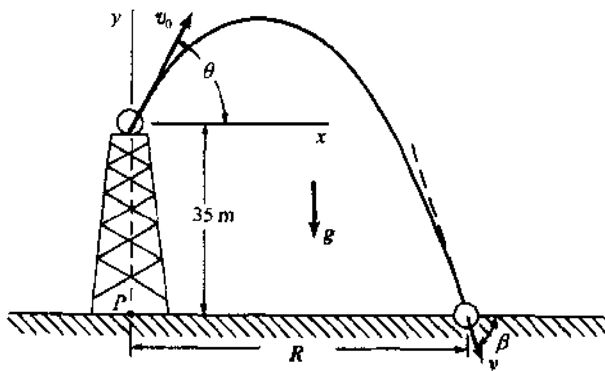


图 5-13

5.29 图5-14图5-12情况一致, 除了一点, 即 α 粒子进入小缝 S 是从不同放射源 A_1A_2 出发的, 角度分别是 θ_1 和 θ_2. 两个粒子具有相同的 v_0 和 a. 已知 $v_0 = 6\times10^6$ m/s, $a = 4\times10^{13}$ m/s^2, $\theta_1 = 45° + 1°$, $\theta_2 = 45° - 1°$, 证明所有粒子均会聚于同一点 P, 并求出 R 之值.

解 ☞ 这里我们利用公式 $R = 2v_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0/a$. 注意到第一个 α 粒子有 $\theta_0 = \theta_1 = 46°$, 第二个粒子有 $\theta_0 = \theta_2 = 44°$, 这两个角互为余角. $\cos\theta_1\sin\theta_1 = \sin\theta_2\cos\theta_2$, 所以 R 是相同的. 实际上 $R = 2(6\times10^6\text{m/s})^2(0.719)(0.695)/(4\times10^{13}\text{m/s}^2) = 0.90$ m.

5.30 再次用到图5-14. 求 $h_1 - h_2$

解 ☞ 对于竖直高度，我们有 $v_y^2 = v_{oy}^2 + 2a_y y$，已知 $v_y = 0$；$a_y = -|a| = 4\times10^{13}\,\text{m/s}^2$. 有 $h_1 = \dfrac{(v_0\sin\theta_1)^2}{2|a|} = 0.233$ m，$h_2 = \dfrac{(v_0\sin\theta_2)^2}{2|a|} = 0.217$ m.

$h_1 - h_2 = 0.016$ m $= 16$ mm

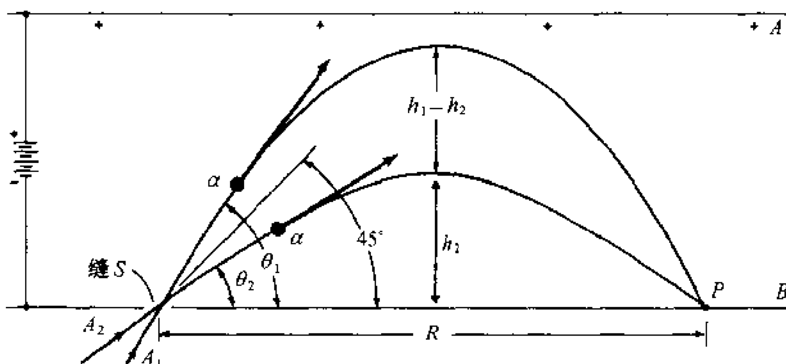


图 5-14

5.31　一球以初速度 $v_0 = 15.0$ m/s 被向上抛出，抛射角是 30°. 抛球者正好站在一高山顶端，顶端向下的斜面倾斜角是 20°. 问球何时落在斜面上？

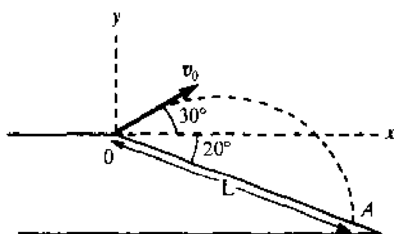


图 5-15

解 ☞ 我们选抛出点为原点(图 5-15). 球的运动方程是 $x = v_0\cos30°\,t = (13.0\ \text{m/s})t$，$y = v_0\sin30° - \frac{1}{2}gt^2 = (7.5\ \text{m/s})t - (4.9\ \text{m/s}^2)t^2$. 且有斜面的直线方程为 $y = -x\tan20° = -0.364\ x$. 我们寻找一个时刻正好球的坐标 $(x、y)$ 满足这个方程. 因此，我们将 x、y 代入方程得 $(7.5\ \text{m/s})t - (4.9\ \text{m/s}^2)t^2 = 0.364[(13.0\ \text{m/s})t]$，即 $12.2\ t = 4.9\ t^2$. 解得：$t = 0$ (对应于 $x = y = 0$) 或 $t = 2.49$s

5.32　参照题目 5.31，试计算球在斜面的落地点距抛出点的距离是多少.

解 ☞ 参见图 5-15，我们需要先求出位移 OA 的 x 和 y 分量：$x = (13.0\ \text{m/s})(2.49\ \text{s}) = 32.4$ m；$y = -0.364\ x = -11.8$ m. 有 $L = \sqrt{x^2 + y^2} = 34.5$ m(或 $L = x/\cos20° = 34.5$).

5.33　参见题目 5.31. 计算球落地时的速度.

解 ☞ 球落地前的速度，$\boldsymbol{v_A}$：

$v_{Ax} = v_0\cos30° - 13.0$ m/s　$v_{Ay} = v_0\sin30° - gt = 7.5\ \text{m/s} - (9.8\ m/s^2)$

$(2.49\ \text{s}) = -16.9$ m/s　有 $v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = 21.3$ m/s

$\theta_A = \arctan\left|\dfrac{v_{Ay}}{v_{Ax}}\right| = 52.4°$　在 x 轴下方.

5.34　一轰炸机，见图 5-16，正以速度 $v_1 = 72$ m/s，高度 $h = 103$ m 作水平飞行. 如图，在原点正上方处，炸弹 B 被释放，欲炸卡车 T，而卡车正以恒速沿一水平公路(x 轴)行驶. 在炸弹释放时卡车行驶到 $x_0 = 125$ m(距 O 点)处. 试求 v_2 之值及炸弹 B 的空中飞行时间.(设卡车高为 3 m.)

解 ☞ 对于炸弹的 x 和 y 方向的运动，有 $x = v_{0x}t = v_1 t = (72\ \text{m/s})t$　$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 = 103\ \text{m} - (4.9\ \text{m/s}^2)t^2$

而炸弹飞行的时间($y = 3$ m)，有

$3\ \text{m} = 103\ \text{m} - (4.9\ \text{m/s})t^2$，　$\dfrac{100}{4.9} = t^2$，　$t = 4\ 52$ s 有

$x=(72\ \text{m/s})(4.52\ \text{s})=352\ \text{m}$

$$v_2=\frac{x-x_0}{t}=\frac{325\ \text{m}-125\ \text{m}}{4.52\ \text{s}}=44.2\ \text{m/s}$$

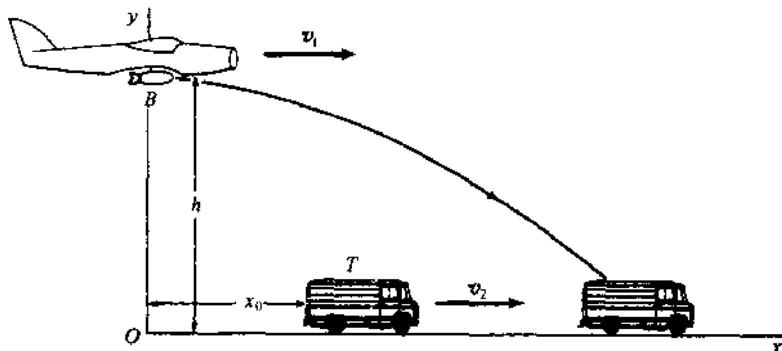


图 5-16

5.35 一抛射体,如图 5-17,以速度 v_0,出射角 θ 向上发射.(a)它将打在建筑物顶上的哪一点 $P(x,y)$上?(b)试求在点 P 速度的大小和方向.设 $\theta=35°$,$v_0=40\ \text{m/s}$,$\alpha=30°$,及 $h=15\ \text{m}$.

解 ☞ 首先注意($\dot{x}\equiv v_x$,$\dot{y}\equiv v_y$)

$\dot{x}_0=v_0\cos35°=32.7661\ \text{m/s}$, $\dot{y}_0=v_0\sin35°=22.943\ \text{m/s}$ 及,屋顶的方程

$$y=h-x\tan\alpha=15-(0.57735)x \tag{1}$$

(a)用 $x=\dot{x}_0t$ 去掉 $y=\dot{y}_0t-4.9\ t^2$ 中的 t,有

$$y=\left(\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}\right)x-\frac{4.9x^2}{\dot{x}_0^2} \tag{2}$$

对于抛射体的路径.从方程(1)和(2)中,有 $0.004564x^2-1.277558x+15=0$. $x=12.28\ \text{m}$ $y=h-(12.28)\tan\alpha=7.90\ \text{m}$.时间由 $12.28=32.7661\ t$ 给出,$t=0.375\ \text{s}$.

(b)在 P 点,$\dot{x}=\dot{x}_0=32.766\ \text{m/s}$, $\dot{y}=\dot{y}_0-9.8\ t=22.943-(9.8)(0.375)=19.268(\text{m/s})$,有 $v=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}=38.0\ \text{m/s}$, $\tan\beta=\dot{y}/\dot{x}=0.588$,$\beta\approx30.46°$,其中 β 是速度 v 在 P 点的方向.

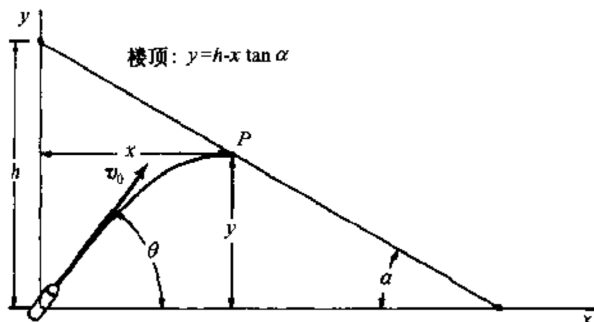


图 5-17

5.36[c] 在题 5.35 中,角度 θ 可被调整.试求抛射体在最短时间内打到屋顶的发射角度 θ.

解 ☞ 再一次用 $y=\dot{y}_0t-\frac{1}{2}gt^2=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2$ 和 $y=h-x\tan\alpha$.

计算这两个方程.有$\frac{1}{2}gt^2-v_0(\cos\theta\tan\alpha+\sin\theta)t+h=0$.利用三角函数 $\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$

$$\frac{1}{2}gt^2-\left[\frac{v_0}{\cos\alpha}\sin(\theta+\alpha)\right]t+h=0 \tag{1}$$

对于最短时间 t，我们有 $dt/d\theta=0$. 对(1)求导，且有 $dt/d\theta=0$，有 $-\left[\frac{v_0}{\cos\alpha}\cos(\theta+\alpha)\right]_{t\min}=0$该表达式中 $\cos(\theta+\alpha)=0$，解得 $\theta=90°-\alpha$.

该结果意味着抛射体应该取垂直屋面的方向发射. 如果我们将 $\theta+\alpha=90°$代入(1)式，可求得 $t_{\min}=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2gh\cos^2\alpha}}{g\cos\alpha}$

或 $v_0<\sqrt{2gh}\cos\alpha$，$t_{\min}$是复数. 换言之，若 $v_0<\sqrt{2gh}\cos\alpha$，无论 θ 为何值，抛射体不可能到达地板，最小时间的概念没有意义.

5.37　参见图 5-18，抛射体以初速 $v_0=35$ m/s，抛射角 $\theta=23°$抛出. 卡车沿 x 轴以恒速 15 m/s 移动. 在抛出时，卡车的尾部坐标是 $x=45$ m. 试求抛射体击中卡车尾部所花的时间，设卡车足够高.

解 ☞ 本题中，发射体在追上卡车的瞬间击中卡车，此时卡车尾部经过的距离是$x_1=45+vt$，等于抛射体在水平方向的距离，$x=(v_0\cos\theta)t=32.22\ t$，有

$$t=\frac{45}{32.22-15}=2.614\ \text{s}$$

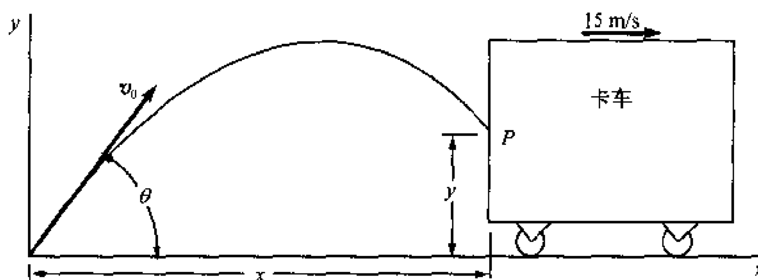


图 5-18

5.38　如果卡车(题 5.37 中)的高度是 2.0 m，那么将发生什么情况?

解 ☞ $t=2.614$ s 时，由于 $v_0\sin\theta=13.67$ m/s，抛射体追上卡车的尾部时的高度 $y=(13.67)(2.614)-\frac{1}{2}(9.8)(2.614)^2=2.25$ (m)，即高出卡车顶端 25 cm. 既然抛射体在水平方向的速度比卡车快，于是它将不会击中车尾.

当抛射体的高度是 2 m 时，所花时间 t_2 可由 $2=(13.67)t_2-\frac{1}{2}(9.8)t_2^2$ 给出，即 $t_2=2.635$ s，而 $2.635-2.614=0.021$ (s)(追上车尾后的时间). 抛射体击中车顶距车尾的距离是$(32.22-15)\cdot(0.021)=0.36(\text{m})=36(\text{cm})$.

5.39　同问题 5.37，求 v_0 大小，所有条件不变，只是抛射体击中车尾高 3 m 处.

解 ☞ 抛射体到车尾的时间由下式给出

$$45+15t=(v_0\cos\theta)\ t,\quad t=\frac{45}{v_0\cos\theta-15}$$

此时 $y=3=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}(9.8)t^2=(v_0\sin\theta)\left(\frac{45}{v_0\cos\theta-15}\right)-\frac{1}{2}(9.8)\left(\frac{45}{v_0\cos\theta-15}\right)^2$ 代入 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的具体数值，得出

$v_0^2(4.55)-v_0(60.3)-3532=0$ 解之，得 $v_0=35.3$ m/s.

5.40[c]　一粒子在 xy 平面内的运动由 $x=25+6t^2$；$y=-50-20t+8t^2$ 决定. 试求下列初始值：x_0，y_0，$\dot{x}_0$，$\dot{y}_0$，v_0

解 ☞ 在 $t=0$，$x=x_0=25$ m；$y=y_0=-50$ m. 有 $v_x=\dot{x}=12t$ 及 $v_{0x}=\dot{x}_0=0$ m/s. $v_y=\dot{y}=-20+16t$ 和 $v_{0y}=\dot{y}_0=-20$ m/s，$v_0=(v_{0x}^2+v_{0y}^2)^{1/2}=20$ m/s

5.41[c]　求 a 的大小和方向，粒子的加速情况同题 5.40.

解 ☞ $a_x=\dot{v}_x=12\ \mathrm{m/s^2}$；$a_y=\dot{v}_y=16\ \mathrm{m/s^2}$，$\tan\theta_a=\dfrac{a_y}{a_x}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3}$

$\theta_a=53°$也即意味着在 x 轴偏上 $53°$，而 $a=(12^2+16^2)^{1/2}=20\ \mathrm{m/s^2}$.

5.42 写出该粒子的路径方程，问题同 5.40.

解 ☞ 我们在下列两方程中消去时间：

$t^2=(x-25)/6$，或 $t=[(x-25)/6]^{1/2}$，代入得 $y=-50-20[(x-25)/6]^{1/2}+8(x-25)/6$，即 $6y=-500+8x-120[(x-25)/6]^{1/2}$.

5.43[c] 一粒子在 xy 平面内运动，分速度的 x 分量和 y 分量由

$$\dot{x}=b_1+c_1t\ \text{及}\ \dot{y}=b_2+c_2t \tag{1}$$

给出，其中 x、y 单位是 m，t 单位是 s. (a) b_1 和 b_2，c_1 和 c_2 的单位和大小分别是什么？(b)得出 x 和 y 的表达式.(c)求出 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的表达式，求出它们大小和方向.(d)用单位矢量来表示 $\boldsymbol{v}$.

解 ☞ (a)方程(1)显示要求 b 和 b_2 必须以 m/s 作单位，c_1 和 c_2 须以 $|\mathrm{m/s^2}|$ 作单位，此即加速度单位.

(b) $x=x_0+b_1t+\dfrac{1}{2}c_1t^2$，$\quad y=y_0+b_2t+\dfrac{1}{2}c_2t^2$

其中 x_0 和 y_0 是 x、y 在 $t=0$ 的值

(c) (1)式对 t 求导，有 $\ddot{x}=c_1$，$\ddot{y}=c_2$.有 $a=(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)^{1/2}=(c_1^2-c_2^2)^{1/2}$，$\tan\alpha=\dfrac{\ddot{y}}{\ddot{x}}=\dfrac{c_2}{c_1}$其中 α 角是 $\boldsymbol{a}$ 同 x 轴之夹角.注意到 $\boldsymbol{a}$ 在大小和方向上是恒定的.对于速度，有

$$v=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}=[(b_1+c_1t)^2+(b_2+c_2t)^2]^{1/2}$$

$\tan\beta=\dfrac{b_2+c_2t}{b_1+c_1t}$其中 β 是 $\boldsymbol{v}$ 同 x 轴之夹角(d)

$$\boldsymbol{v}=(b_1+c_1t)\boldsymbol{i}+(b_2+c_2t)\boldsymbol{j}$$

5.44[c] 一粒子在 xy 平面内运动的路径由 $y=10+3x+5x^2$ 决定.速度的 x 分量 $\dot{x}=4\ \mathrm{m/s}$，是恒量，在 $t=0$ 时 $x=x_0=6$ m.(a)写出 x、y 关于 t 的方程.(b)求 $\ddot{y}$ 及 $\ddot{x}$，即粒子加速度分量.

解 ☞ (a) $\dot{y}=3\dot{x}+10x\dot{x}$；$\quad \dot{x}=4\ \mathrm{m/s}$ 及 $x_0=6$ m.

有 $x=x_0+\dot{x}t=6\ \mathrm{m}+(4\mathrm{m/s})t$.

$y=10+(18+12t)+5(6+4t)^2=208\ \mathrm{m}+(252\ \mathrm{m/s})t+(80\ \mathrm{m/s^2})t^2$

(b) $\ddot{x}=0$，$\quad \ddot{y}=160\ \mathrm{m/s^2}$

5.45 一球 B_1，从 xy 平面的原点被向上抛出，初速度是 $v_1=100$ m/s，出射角是 $\theta_1=40°$. $t_1=10$ s后，可以证明，球到了点 $P(x_1,y_1)$，其中 $x_1=766.0$ m，$y_1=152.8$ m.一些时间以后，另一球 B_2，也是从原点被向上抛出，初速度是 v_2，出射角 $\theta_2=35°$.(a)当球 B_2 将经过点 $P(x_1,y_1)$时求 v_2 的值，(b)如果两球在 $P_1(x_1,y_1)$相遇，求 B_2 被抛出的时刻.

解 ☞ (a)令(x_1,y_1,t_1)表示球 B_1 的坐标和时间(x_2,y_2,t_2)表示球 B_2 的坐标和时间.当 B_2 经过 $P(x_1,y_1)$时，有 $x_2=(v_2\cos35°)t_2=766.0$，$\quad y_2=(v_2\sin35°)t_2-4.9t_2^2=152.8$

消去 t_2，可得

$$152.8=(766.0)\tan35°-(4.9)\left(\frac{766.0}{v_2\cos35°}\right)^2$$

可得 $v_2=105.69$ m/s.

(b) 将 v_2 的值代入 $x_2=(v_2\cos35°)t_2=766.0$ m，得 $t_2=8.848$ s.因此，B_2 在抛出 8.848 s后以 $v_2=105.69$ m/s，$\theta_2=35°$经过点 $P(x_1,y_1)$，而 B_1 在抛出 10 s后经过 P 点，因此，如要两球相撞，B_2 须延迟 $10-8.848=1.152$ s 抛出.

5.46[c] 一粒子在xy平面内的运动由$x=10+12t-20t^2$及$y=25+15t+30t^2$给出，试求

$x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ 之值及 $\boldsymbol{v}_0$ 的大小和方向.

解 ☞ 在 $t=0$ 时刻, $x=x_0=10$; $y=y_0=26$. 对 x、y 求导, 有 $\dot{x}=12-40t$; $\dot{y}=15+60t$; $\dot{x}_0=12$; $\dot{y}_0=15$. $v_0=(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2)^{1/2}=19.2$, $\theta=\arctan\dfrac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}=51.3^\circ$. 在 x 轴上方.

5.47[c] 参见题 5.46, 试求 $\ddot{x}$、$\ddot{y}$ 及 $\boldsymbol{a}$.

解 ☞ 我们对 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 的表达式求导, 有 $\ddot{x}=-40$, $\ddot{y}=60$. 加速度是恒定的, $a=\sqrt{40^2+60^2}=72$. $\boldsymbol{a}$ 的方向为 $\beta=\arctan\left|\dfrac{60}{40}\right|=56.3^\circ$ 在负 x 轴上方.

5.48 参见题 5.46 及 5.47, 说明运动是否总是沿一条直线.

解 ☞ 否. 因为 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 方向不同, 路径一定不是直线, 而是抛物线, 参见图 5.57.

5.49[c] 如果粒子受到一恒力, 那么运动方程有没有可能是 $x=5+10t+17t^2+4t^3$, $y=8+9t+20t^2-6t^3$?

解 ☞ $\dot{x}=10+34t+12t^2$; $\dot{y}=9+40t-18t^2$; $\ddot{x}=34+24t$; $\ddot{y}=40-36t$

由于加速度不是恒定, 同受恒力矛盾, 故上述运动方程是不可能的.

5.2 相对运动

5.50 一电梯以恒速 4 m/s 向上运动. 一灯泡从电梯天花板上的灯座上掉下来. 一人在楼内观察, 看见灯泡上升了 (4/9.8) s 又下降了 (4/9.8) s, 在 $t=(4/9.8)$ s 时灯泡相对于人静止. 试计算从电梯内观察, $t=(4/9.8)$ s 时灯泡的速度.

解 ☞ 取向上为正, $V_{灯/电梯}=V_{灯/楼}-V_{电梯/楼}=0-4=-4$ m/s. 取电梯为惯性参考系, 有

$$V=V_0+at=0+(-9.8)\left(\frac{4}{9.8}\right)=-4\ (\text{m/s})$$

5.51 一船以 10 km/h 的速度向东行驶. 第二艘船以东偏北 30°行驶, 问第二艘船速为多大时, 它相对于第一船始终向北行驶?

解 ☞ 设第一艘船速度 $\boldsymbol{v}_1$, 第二艘船速度 $\boldsymbol{v}_2$, 设第二艘船相对于第一艘船速度为 $\boldsymbol{v}_{21}$, 有 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_{21}+\boldsymbol{v}_1$ (图 5-19), 其中 $\boldsymbol{v}_{21}$ 是向北的. 因而有 $v_2\sin30^\circ=v_1=10$ km/h, 有 $v_2=20$ km/h.

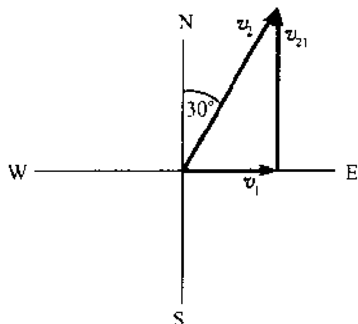


图 5-19

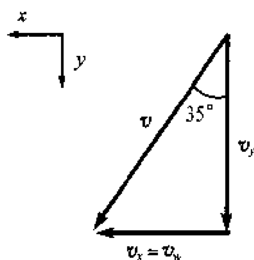


图 5-20

5.52 在一场暴雨中, 发现雨滴下落的方向与竖直方向夹角是 35°. 风速是 4.5 m/s. 设雨滴的速度的水平分量大小同风速大小一致, 那么雨滴速度矢量的竖直分量是多少? 速率是多少?

解 ☞ 设 $\boldsymbol{v}$ 是雨滴的速度, $\boldsymbol{v}_w$ 是风速, $v_w=4.5$ m/s, $v_x=v_w$. 由图 5-20,

有 $v_y=\dfrac{v_w}{\tan35^\circ}=6.35$ m/s, $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=7.84$ m/s

5.53 一小船船头垂直对面河岸行驶. 划船者划船相对于河水的速率是 3.0 m/s. 河水的速率

为 $v_w=4.0$ m/s.(a)画出水速和船速的矢量图,(b)求船相对于河岸的速度矢量,(c)船的速度矢量同船头所指方向之夹角是多少? 船相对于出发点的速率是多少? (d)如果河宽 100 m,那么船到达对岸所花时间是多少?

解 ☞ (a)见图 5-21(a).(b.c)相对于河岸的速度是 $\boldsymbol{v}_{net}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_w$ 既然 $\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{v}_w$ 是垂直的,有 $v_{net}=\sqrt{v_B^2+v_w^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (m/s).角度 φ 为图 5-21(b),有 $\tan\varphi=v_w/v_B$,$\varphi=53.1°$.即船与垂直对岸方向之夹角是 53.1°.(d)设 D 为行驶距离,有 $D/100\ \text{m}=v_w/v_B=4/3$,所以,$D=133$ m.

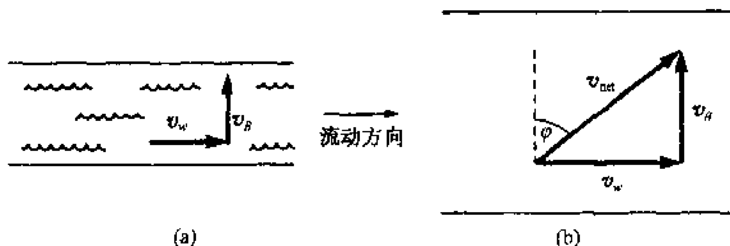


图 5-21

5.54 一游泳者能相对于水以 0.70 m/s 的速率游泳.她想通过 50 m 宽,水流速率是 0.50 m/s的一条河.(a)如果她想垂直河岸游过去,那么她身体以什么样的角度游呢? 她相对于河岸的实际速率是多少? 她游到对岸需花多长时间? (b)如果她要以最短时间游到对岸,她身体以什么样的角度游呢? 她相对于河岸的实际速率是多少? 到达对岸的时间是多少? 到达对岸时她顺流而下多远了?

解 ☞ (a)设 $\boldsymbol{v}_c$ 是水流速度,$\boldsymbol{v}_w$ 是游泳者相对于水的速度,$\boldsymbol{v}_s$ 是游泳者相对于河岸的速度.有 $\boldsymbol{v}_s=\boldsymbol{v}_w+\boldsymbol{v}_c$.垂直到达对岸,$\boldsymbol{v}_s$ 应该和 $\boldsymbol{v}_c$ 垂直.有 $\sin\theta=v_c/v_w$,如图 5-22 所示.给出数据 $v_c=0.50$ m/s,$v_w=0.70$ m/s,$d=50$ m;所以 $\theta=45.6°$.游泳者相对于河岸的速率是 $v_s=v_w\cos\theta=0.49$ m/s,所以她将花 $t=d/v_s=102$ s,到达对岸.(b)为使垂直于河岸的速度分量最大,游泳者应垂直河岸游,她横渡的时间为 $t=d/v_w=71.4$ s,她登陆的地点在出发点的下游 $v_ct=(v_c/v_w)d=35.7$ m 处.

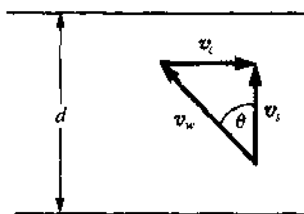


图 5-22

5.55 一防弹轿车 2 m 宽,3 m 长,当它正以 13 m/s 的速度在街上行驶时,一粒子弹以 arctan3/4 的角度向该轿车射去(图 5-23).子弹从轿车的一角进入,从对角线方向的另一角穿出.忽略子弹和轿车的相互作用,试求子弹射穿轿车所需时间.

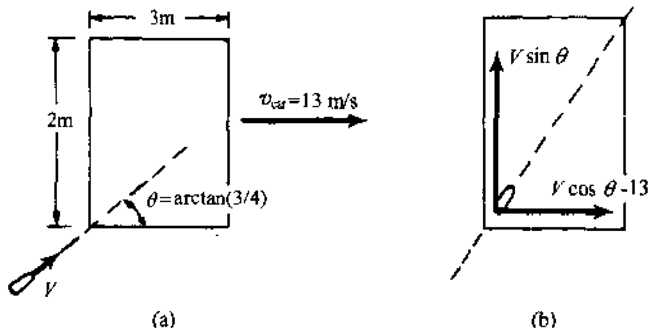


图 5-23

解 ☞ 设子弹的速率为 V.由于轿车是运动的,子弹相对于轿车的速率在轿车长度的方向上是 $V\cos\theta-13$,在宽度方向的相对速率是 $V\sin\theta$[图 5-23 (b)]有 $s=vt$.

$$2=(V\cos\theta-13)t,\quad 3=(V\sin\theta)t$$

消去 V

$$t = \frac{1}{13}\left(\frac{3}{\tan\theta} - 2\right) = \frac{2}{13} = 0.15(\mathrm{s})$$

5.56 雨滴,以与竖直方向 α 角度倾盆而下,有一恒速 $v_r = 10$ m/s.一妇女以 $v_w = 8$ m/s 的速率冒雨前行,她看见雨与竖直方向成 β 角度.求 α 和 β 之间关系.

解 ☞ 从矢量图,图 5-24.

$$\tan\beta = \frac{v_w + v_r\sin\alpha}{v_r\cos\alpha} = \frac{8 + 10\sin\alpha}{10\cos\alpha}$$

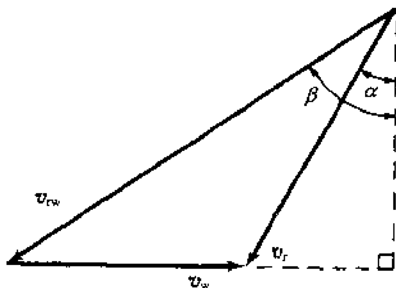


图 5-24

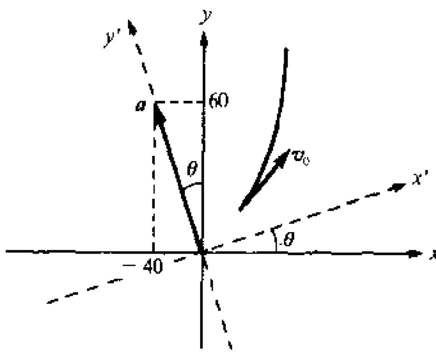


图 5-25

5.57 证明题 5.46 中的抛射轨道是抛物线,选取与恒定加速度矢量方向平行和垂直的 x 轴和 y 轴.

证 图 5-25 显示了这个新的坐标系统;从解析几何可知

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y$$

由此在新坐标系统中的运动方程是

$$\sqrt{13}x' = 3(10 + 12t - 20t^2) + 2(25 + 15t + 30t^2) = 80 + 66t \tag{1}$$

$$\sqrt{13}y' = -2(10 + 12t - 20t^2) + 3(25 + 15t + 30t^2) = 55 + 21t + 130t^2 \tag{2}$$

由两式可得

$$y' = ax'^2 + bx' + c \tag{3}$$

将(3)式变形为

$$y' - \beta = k(x' - \alpha)^2 \tag{4}$$

此式是抛物线的方程,顶点在 $x' = \alpha, y' = \beta$ 处,主轴平行于 y'轴.

5.58 观察者 O 从摩天大厦的第 30 层楼朝下扔一石块.观察者 O',在一以 $V = 5.0$ m/s的恒速下降的电梯里,当石块扔出时,他刚好经过第 30 层楼.在石块下降了时间 $t = 3.0$ s 以后,求石块相对于 O 的位置、速度及石块的加速度.求石块相对于 O'的位置,速度及加速度.

解 ☞ 对于 O,石块的位置由下式给出

$$x = x_0 + v_0t + at^2/2.$$

其中在第 30 层楼处 $x = 0$,取向下为正.在 $t = 3.0$ s,

$$x = 0 + 0 + \frac{9.8\ \mathrm{m/s^2} \times (3.0\ \mathrm{s})^2}{2} - 44\ \mathrm{m}$$

又

$$v = v_0 + at, \quad v = 0 + 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 3.0\ \mathrm{s} = 29\ \mathrm{m/s}$$

对于自由落体的加速度,就像静止的观察者 O 所看到的那样,是恒定的.因而有 $a = g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$.
O'所对应的x',相对于 x 来说,有 $x' = x - Vt$.在 3.0 s 后,$x' = 44\ \mathrm{m} - 5.0\ \mathrm{m/s} \times 3.0\ \mathrm{s} = 29$ m.因

此,石块在 3.0 s 后处于 O'下方 29 m 处. 相对于 O'的速度是 $v'=v-V$;在 $t=3.0$ s,

$$v' = 29 \text{ m/s} - 5.0 \text{ m/s} = +24 \text{ m/s}$$

既然 V 是恒定的,$a'=a$,有 $a'=+g=+9.8 \text{ m/s}^2$.观察者 O'所观察到的石块加速度同 O 所看到的一样.(总之,在任何惯性系,加速度均一致.)

5.59 一辆向北行驶的卡车正在下坡,坡度为 0.10(倾角为 arctan0.10=5.7°)车速为 90 km/h.在山脚下有一个转弯,之后的公路是水平的,且方向是北偏东 30°.一辆有雷达的警车以 80 km/h 沿水平公路驶近卡车.卡车相对于警车的速度矢量是什么?

解 ☞ 我们规定一个坐标系,x 轴向东,y 轴向北,z 轴垂直向上.设 $\boldsymbol{V}_T$ 是卡车相对于地面的速度矢量,$\boldsymbol{v}_p$ 是警车相对于地面的速度矢量.根据题意,有

$$\boldsymbol{V}_T = O\boldsymbol{x} + (90 \text{ km/h})(\cos 5.7°)\boldsymbol{y} - (90 \text{ km/h})(\sin 5.7°)\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{v}_p = (-80 \text{ km/h})(\sin 30°)\boldsymbol{x} - (80 \text{ km/h})(\cos 30°)\boldsymbol{y} + 0\boldsymbol{z}$$

化简得

$$\boldsymbol{v}_T = (89.6\boldsymbol{y} - 8.94\boldsymbol{z}) \text{ km/h}, \boldsymbol{v}_p = (-40.0\boldsymbol{x} - 69.3\boldsymbol{y}) \text{km/h}$$

卡车相对于警车的速度矢量 $\boldsymbol{u}_T$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{u}_T = \boldsymbol{v}_T \ \boldsymbol{v}_p = (40.0\ \boldsymbol{x} + 158.5\boldsymbol{y} - 8.9\ \boldsymbol{z}) \text{ km/h}$$

5.60[c] 一鸟,以恒定加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 在水平方向飞行(相对于大地坐标系 x, y),假设从它嘴中掉下一条虫.问被鸟所见的虫的路径是怎样的?

解 ☞ 在鸟的非惯性参考系 x, y(图 5-26)中,虫的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a}_0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0 = 常量$$

因而虫的加速度是恒定的,它的路径是一直线(假设它是从静止被抛下).该直线相对于水平面的斜率是 $\tan\theta = g/a_0$

5.61[c] 参见题 5.60 和图 5.26,(a)求从地面上所看到的虫的轨迹,(b)证明两种路径的描述是等价的.

解 ☞ (a)在大地参照系 xy 中,虫有恒加速度 $y=-g$ 和初速度 $x=v_0$,其中 v_0 是虫被释放时(令此时 $t=0$)鸟的速度.因而有

$$x = x_0 + v_0 t, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

所以轨迹是一条抛物线.

(b)假设 $t=0$ 时,两坐标系重合.在时刻 t,O'将沿 x 轴方向移动距离 $v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$,于是虫在两坐标系中的坐标之间关系是

$$x = x' + (v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2), \quad y = y' \tag{2}$$

在 x', y'系中的轨迹由(2)式代入(1)式得到

$$x' + vt + \frac{1}{2}a_0 t^2 = x_0 + vt, \quad y' = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

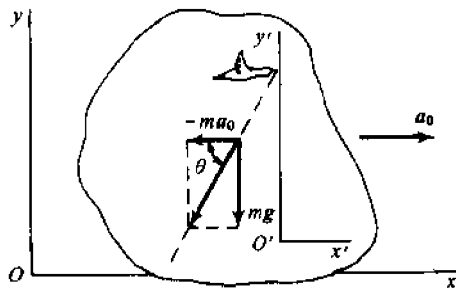


图 5-26

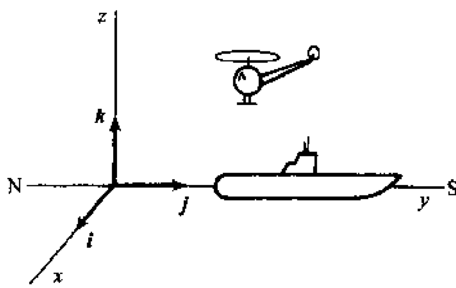


图 5-27

或

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} = \frac{g}{a_0}$$

它是一条斜率是 g/a_0 的直线,同题5.60一致.

5.62 一直升机试图下降停在一潜水艇平台上,此时潜水艇正以 17 m/s 的速度向南行驶.风速为 12 m/s,向西.如果潜水艇船员看到直升飞机正以 5 m/s 速度下降,求它的速度大小.(a)相对于水,(b)相对于空气(见图5-27).

解 ☞ 以1代表飞机,2代表水,3代表艇,4代表空气,则

(a) $\boldsymbol{v}_{12} = \boldsymbol{v}_{32} + \boldsymbol{v}_{13} = 17\boldsymbol{j} + (-5)\boldsymbol{k} = (17\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k})$(m/s)

(b) $\boldsymbol{v}_{14} = \boldsymbol{v}_{12} + \boldsymbol{v}_{24} = \boldsymbol{v}_{12} - \boldsymbol{v}_{42} = (17\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) - 12\boldsymbol{i} = (-12\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k})$(m/s)

第六章　平面运动(Ⅱ)

6.1　圆周运动;向心力

6.1　一0.3kg的物体与一根长为1.5 m的线相连,该物体以6 m/s的速率在水平面上作圆周运动.(a)物体受到的向心力是多少?(b)绳中张力是多少?(忽略重力)

解 ☞ (a) $a=\frac{v^2}{R}=\frac{(6\ \mathrm{m/s})^2}{1.5\ \mathrm{m}}=24\ \mathrm{m/s^2}$

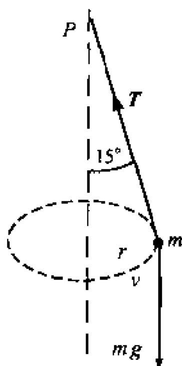


图 6-1

(b) 绳子张力提供物体作圆周运动所需向心力.该力大小是

$T=ma=(0.3\ \mathrm{kg})(24\mathrm{m/s^2})=7.2\ \mathrm{N}$

6.2　一小球系在一长为24 cm长线的末端,线固定在P点,整个系统作圆锥摆运动,如图6-1.球在P点下方作圆周运动,而线与竖直方向夹角为15°.试求球的速率.

解 ☞ $T\cos15°=mg$,　$T\sin15°=\frac{mv^2}{r}$,　$\tan15°=\frac{v^2}{r\cdot g}$

因为有

$$r=24\sin15°=24(0.259)=6.22\ \mathrm{cm}$$

$$\tan15°=\frac{v^2}{6.22(980)},\quad v=40.4\ \mathrm{cm/s}$$

6.3　在氢原子玻尔模型中,电子围绕原子核作圆周运动(半径是0.5×10^{-10} m).向心力是带正电的原子核与带负电的电子之间的吸引力.电子以2.3×10^6 m/s的速率运动,所需要的向心力是多大?(电子的质量9×10^{-31} kg.)

解 ☞ 力$=(9\times10^{-31}\ \mathrm{kg})(2.3\times10^6\mathrm{m/s})^2/(5.0\times10^{-11}\mathrm{m})=9.5\times10^{-8}\mathrm{N}$

6.4　汽车绕半径为80 m作圆周运动,如果没有打滑,且地面摩擦系数为0.81,求该汽车达到的最大速度?

解 ☞ 如图6-2所示.设mg是汽车重力,支持力是$N=mg$.摩擦力提供所需向心力F_c.

$$F_c=\mu_sN=0.81\ mg,\quad 且\ F_c=\frac{mv^2}{r}$$

$$v=\sqrt{0.81\times80\times9.8}=25.2(\mathrm{m/s})$$

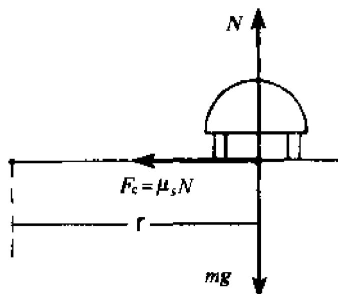


图 6-2

6.5　汽车作半径为200 ft的圆周运动,摩擦因数μ_s是1.0.

解 ☞ $\mu_smg=\frac{mv^2}{r}$,　$\mu_s=\frac{v^2}{rg}$

$$v=\sqrt{\mu_sgr}=\sqrt{1.0\times32.2\ \mathrm{ft/s^2}\times200\mathrm{ft}}=80\ \mathrm{ft/s}$$

$$=80\ \mathrm{ft/s}\times\frac{30\ \mathrm{mi/h}^*}{44\ \mathrm{ft/s}}=54.5\ \mathrm{mi/h}$$

6.6　一小轿车以25 m/s的速度在水平面内作半径为120 m的圆周运动.那么防止小轿车打滑所需轮胎和地面之间最小的静摩擦系数是多少?

解 ☞ $F=m\frac{v^2}{r}=F_f\leqslant\mu_smg$,　$\mu_s\geqslant\frac{v^2}{gr}=\frac{(25\ \mathrm{m/s})^2}{(9.8\mathrm{m/s^2})(120\ \mathrm{m})}=0.53$

---

* 1 mi = 1.609 km.

6.7　汽车要以 90 km/h 的速度作半径为 200 m 的圆周运动.那么不靠摩擦而靠斜面提供向心力所需斜面倾角是多少?

解　☞ 如图 6-3, $w = mg = N\cos\theta$ 及 $F_c = \frac{mv^2}{r} = N\sin\theta$ 从两式中可得出 $\tan\theta = v^2/rg$.将 km/h 换算成 m/s,有

$$\tan\theta = \frac{\left(\frac{90\text{km/h} \times 1000\ \text{m/km}}{3600\text{s/h}}\right)^2}{200\ \text{m} \times 9.8\ \text{m/s}^2} = 0.319$$

$$\theta = 17.7°$$

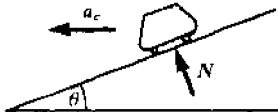


图 6-3

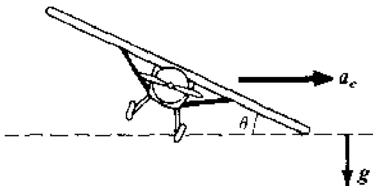


图 6-4

6.8　如图 6-4 所示,一飞机以恒速飞行,且倾角为 θ,使它能作半径为 r 的水平圆周运动.空气升力的方向与机翼和机身垂直.此升力相当于圆椎摆的摆线提供的张力或倾斜路面的正压力,(a)用物理量 v, r, g 来表示倾斜角度 θ,(b)如果 $v = 60\text{m/s}$, $r = 1.0$ km那么所需倾角 θ 是多少?

解　☞ (a)与题 6.2 和 6.7 一样 $\tan\theta = v^2/rg$

(b) $\theta = \arctan \dfrac{60^2}{(1.0 \times 10^3)(9.8)} = 20.2°$

6.9　一轿车作半径为 48 m 的圆周运动.如果马路的坡度与水平方向成 15°,那么轿车运动没有滑动趋势时所能到达最大速率是多少?

解　☞ 运动方程是

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg},\quad \tan 15° = \frac{v^2}{48(9.8)}$$

$$v = 0.268(48)(9.8)\ \text{m/s} = 11.2\text{m/s} = (11.2\ \text{m/s})(0.001\ \text{km/m})(3600\ \text{s/h})$$
$$= 40.3\ \text{km/h}$$

6.10　当一辆质量为 m 的轿车在水平地面上作圆周运动时,它与地面之间的最大摩擦力为 0.7 mg(摩擦因数为 $\mu = 0.7$).它作半径为 15 m 的圆周运动时能达到的最快速度是多少?

解　☞ 向心力 mv^2/r 是由摩擦力提供的.

$$mv^2/r = f,\quad f = 0.7\ mg,\quad \text{所以}\ v^2 = 0.7\ rg,\quad v = 10\ \text{m/s}$$

6.11　一集装箱车内有一板条箱.板条箱和地板之间的摩擦因数为 0.6.那么集装箱作半径为 200 m 的圆周运动时所能到达的最大速度是多少?(板条箱没有滑动).

解　☞ (同题 6.5)

$$v_{max}^2 = \mu gr = (0.6)(9.8\ \text{m/s}^2)(200\ \text{m})$$
$$= 1176\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_{max} = \sqrt{1176\text{m}^2/\text{s}^2} = 34.3\ \text{m/s}$$

6.12　一男孩骑自行车以 10 m/s 的速度作半径为 22 m 的圆周运动,男孩和车两者总重量是 80 kg.(a)地面给自行车的向心力是多大?(b)地面给自行车向上的支持力是多少?见图 6-5.

解 ☞ (a) $F_c=\frac{mv^2}{r}=\frac{80(10)^2}{22}=364(\mathrm{N})$

(b) $N=mg=80(9.8)=784(\mathrm{N})$

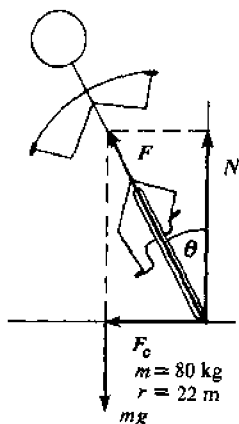


图 6-5

6.13 参见题 6.12.自行车同竖直方向的夹角是多少?

解 ☞ 自行车没倒,说明对其重心的力矩必为 0(见第 9 和第 10 章),这意味着地面对车的作用力线必经过其重心.所以有

$$\tan\theta=\frac{F_c}{N}=\frac{364}{784}=0.4643,\quad \theta=25^\circ$$

6.14 质量为 0.2 g 的苍蝇落在距留声机中心 12 cm 处,并以 $33\frac{1}{3}$ r/min 的速率转动.(a)作用在苍蝇上的向心力大小是多少?(b)若苍蝇不滑动,留声机和苍蝇之间的静摩擦因数最小是多少?

解 ☞ (a) $v=\frac{2\pi r}{T}=2\pi fr=2\pi\left(\frac{33.33\mathrm{min}^{-1}}{60\ \mathrm{s/min}}\right)(12\times10^{-2}\mathrm{m})=0.419\ \mathrm{m/s}$

$$F=ma=m\frac{v^2}{r}=\frac{(0.2\times10^{-3}\ \mathrm{kg})(0.419\ \mathrm{m/s})^2}{0.12\ \mathrm{m}}=2.92\times10^{-4}\mathrm{N}$$

(b) $F_f=2.92\times10^{-4}\mathrm{N}\leqslant\mu_s mg,\quad \mu_s\geqslant\frac{2.92\times10^{-4}\mathrm{N}}{(0.2\times10^{-3}\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}=0.149$

6.15 求(a)宇宙飞船围绕月球转动的速率,(b)宇宙飞船围绕月球转动的所需周期.月球半径是 1.74×10^6m,月球表面的重力加速度为 1.63 m/s^2.(假设飞船就在月球表面附近飞行.)

解 ☞ (a) $\frac{v^2}{R_m}=\frac{GM_m}{R_m^2}\equiv g_m$

$$v=\sqrt{g_mR_m}=\sqrt{(1.63\ \mathrm{m/s^2})(1.74\times10^6\mathrm{m})}=1.68\times10^3\mathrm{m/s}=1.68\mathrm{km/s}$$

(b)轨道周长是

$$d=2\pi R_m=(6.28)(1.74\times10^6\mathrm{m})=1.09\times10^4\mathrm{km}$$

周期为 $t=\frac{d}{v}=\frac{1.09\times10^4\mathrm{km}}{1.68\times\mathrm{km/s}}=6.5\times10^3\mathrm{s}=108\ \mathrm{min}$

6.16 在赤道,重力加速度 g 比两极要小.其原因是地球自转产生向心加速度,由万有引力对应的加速度减去向心力所对应的加速度就得到 g 的有效值 g_{eff}.(a)计算赤道处由于地球自转所引起的 g 的减少量,(b)如果赤道上的物体要处于失重状态,那么所需地球的自转周期是多少?(c)该周期同一绕地球转动的卫星的周期相比,结果会怎样?

解 ☞ (a) 由 $R_e=6.37\times10^6$m 及 $T=24$ h $=86400$ s,有 $a=v^2/R_e=4\pi^2R_e/T^2=3.37\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$.所以 $a/g=3.44\times10^{-3}$.既然 $g_{\mathrm{eff}}=g-a$,重力加速度相对减少量是 $(g-g_{\mathrm{eff}})/g=a/g=0.344\%$.

(b)为了使 $g_{\mathrm{eff}}=0$,需要 $a=g=4\pi^2R_e/T_1^2$.可求得 $T_1=2\pi\sqrt{R_e/g}=5.06\times10^3\mathrm{s}=84.4\mathrm{min}$.

(c)因为卫星有 $ma=mg$,及 $g_{\mathrm{eff}}=0$,因而它周期等于 T_1.

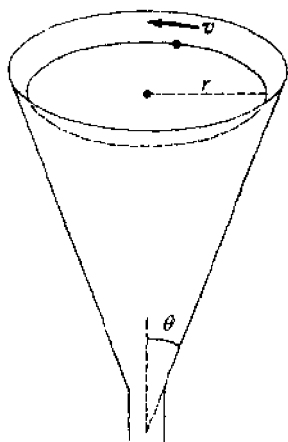


图 6-6

6.17 一质点在一漏斗内表面沿水平的圆周路径滑动,如图6-6.漏斗内表面无摩擦.那么该质点要保持这样的运动,其速率应为多大(用 r,θ 表示)?

解 ☞ 漏斗内表面相当于角度为 $90^\circ-\theta$ 的

斜面，有 $v^2/rg=\tan(90°-\theta)=\cot\theta$，$v=\sqrt{rg\cot\theta}$

6.18　一轿车以 60 m/s 的速率作半径 300 m 的圆周运动[图 6-7(a)].(a)计算当轿车转过圆心角 60°时所对应的速度矢量变化，(b)试比较轿车的瞬时加速度大小和转过圆心角 60°的时间内的平均加速度大小.

解　☞ (a) 从图 6-7(b)知，$\Delta \boldsymbol{v}=60$ m/s，$\Delta\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{v}_A$ 有 120°夹角.(b)瞬时加速度大小 $a=\frac{v^2}{r}=\frac{60^2}{300}=12\ (\mathrm{m/s^2})$. 平均加速度 $\boldsymbol{a}=\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$，有

$$\Delta t=\frac{\Delta s}{v}=\frac{r\Delta\theta}{v}=\frac{300(\pi/3)}{60}=\frac{5\pi}{3}(\mathrm{s})$$

所以

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{60}{5\pi/3}=11.5(\mathrm{m/s^2})$$

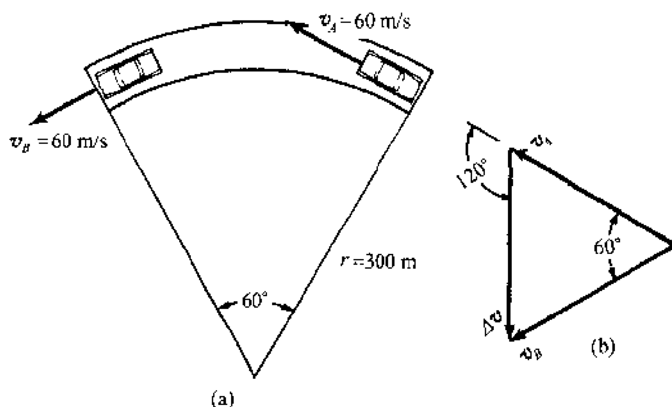


图 6-7

6.19　一工程师驾车作半径为 200 m 的圆周运动，他注意到轿车上的单摆同竖直方向夹角是 15°. 此时速度表盘读数应该是多少?

解　☞ $T\sin\theta=\frac{mv^2}{r}$；$T\cos\theta=mg$ 其中 T 为张力. 有

$$\tan\theta=\frac{v^2}{rg},\quad v=\sqrt{rg\tan\theta}=23\mathrm{m/s}=82.5\ \mathrm{km/h}$$

6.20　一小虫如图 6-8(a)所示，开始时位于静止的保龄球的最高点，并开始无摩擦地滑动. 试证明它脱离球面时所对应角度 $\theta=\arccos\frac{2}{3}\approx42°$

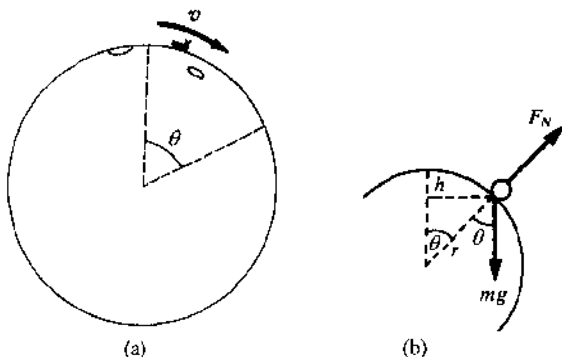


图 6-8

解　☞ 向心力由下式给出：

$$m\frac{v^2}{r}=mg\cos\theta-F_N \tag{1}$$

在角度 θ,重力势能在减小,$mgh = mgr(1-\cos\theta)$,应该等于增加的动能 $mv^2/2$;有

$$\frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta) \tag{2}$$

由(1)和(2)得出

$$3mg\cos\theta - F_N = 2mg \tag{3}$$

在与球面脱离接触的瞬间,$F_N = 0$,(3)式给出 $\cos\theta = \frac{2}{3}$.

6.21 一位 180lb 的飞行员正在竖直面内作半径为 2000 ft 的圆周运动,此时速率为 350 mi/h.求他在圆周底部时,座位给他的支持力是多少?

解 ☞ $F - mg = \frac{mv^2}{r}$, $F = \frac{mv^2}{r} + mg$

单位换算 350 mi/h = 513 ft/s,有

$$F = \frac{180\text{lbf}(513\text{ft/s})^2}{32.3\text{ft/s}^2 \times 2000\text{ ft}} + 180\text{lbf} = 915\text{ lbf}$$

6.22 上题中,飞行员在最低点承受的加速度是 g 的几倍?

解 ☞ 根据向心加速度公式 $a_c = \frac{v^2}{r}$

$$a_c = \frac{(513\text{ft/s})^2}{2000\text{ ft}} = 132\text{ ft/s}^2$$

除以 $g(32.2\text{ft/s}^2)$,有 $a_c = \dfrac{132\text{ ft/s}^2}{\frac{32\text{ ft/s}^2}{1g}} = 4.1\ g$

6.23 一道路设计者希望驾驶者经过山顶时有一种"失重"的体验.问轿车绕过半径为 20 m 的弧形山顶时速度必须多大?

解 ☞ 体验失重,重力 mg 必须等于向心力 mv^2/r,解之

$$v = 14\text{m/s}$$

6.24 一巨大单摆摆长为 15 m,末端摆球质量为 200 kg.如果单摆被移至角度 37°处,并释放,那么摆线提供的最大张力是多大?

解 ☞ 摆球到达最低点时张力最大,为 $mg + mv^2/r$,这时,摆球下降高度 $h = 15 - 15\cos37° = 3.0$ (m).其速率变成 $v = (2gh)^{1/2}. = (6g)^{1/2}$.张力为

$$T = 200g + 200(6g)/15 = 2740\text{ N}$$

6.2 万有引力定律;卫星的运动

6.25 两个 16 lb 的物体相距 2ft.它们之间的吸引力是多少?

解 ☞ 美国工程单位,16 lb⇒0.497 slug,牛顿的万有引力定律公式 $F = G[(m_1m_2)/d^2]$,$G = 3.44\times10^{-8}\text{lbf.ft}^2/\text{slug}^2$.有

$$F = \left(3.44\times10^{-8}\frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{slug}^2}\right)\left(\frac{0.497\text{slug}\times0.497\text{slug}}{(2\text{ft})^2}\right) = 2.12\times10^{-9}\text{lbf}$$

在国际单位制中,$G = 6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2} = (6.67\times10^{-11})\frac{90(90)}{(0.40)^2} = 3.38\times10^{-6}(\text{N})$$

6.26 计算两个 90 kg 的金属球中心相距 40 cm 远时,相互之间的万有引力.

解 ☞ $F = G\frac{m_1m_2}{r_2} = (6.67\times10^{-11})\frac{90(90)}{(0.40)^2} = 3.38\times10^{-6}(\text{N})$

6.27 计算地球质量,假设它是一个半径为 6370 km 的球体.

解 ☞ 设 M 是地球的质量,m 是地球表面某个物体的质量.那么物体的重力是 mg.也等于和地球之间的万有引力 $G(Mm)/r^2$,

因而有 $mg = G[Mm/r^2]$,

$$M = \frac{gr^2}{G} = \frac{(9.8\text{m/s}^2)(6.37\times10^6\text{m})^2}{6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2} = 6.0\times10^{24}\text{kg}$$

6.28　地球表面固体的平均密度是 $\rho = 4\times10^3\text{kg/m}^2$. 假设地球密度均是 ρ, 计算引力常量 G.

解　☞ 地球的质量为 $m_e = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R_e^3$. 代入 $g = Gm_e/R_e^2$, 解得

$$G = \frac{3g}{4\pi\rho R_e} = \frac{3\times9.8\text{ m/s}^2}{4\pi\times4\times10^3\text{ kg/m}^3\times6.4\times10^6\text{m}} = 9\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

6.29　质量 $m_1 = 1kg$ 的物体在月球表面的重力是地球表面的 1/6. 计算月球的质量 m_2. 月球半径是 1.738×10^6 m.

解　☞ 在月球表面, m_1 重力为 $\frac{1}{6}(9.8N)$

$$W_1 = G\frac{m_1m_2}{r^2},\quad \frac{1}{6}(9.8) = 6.67\times10^{-11}\frac{1\times m_2}{(1.738\times10^6)^2}$$

$$m_2 = \frac{(9.8)(1.738\times10^5)^2}{(6)(6.67\times10^{-11})} = 7.4\times10^{22}(\text{kg})$$

6.30　地球半径是 6370 km. 质量为 20 kg 的物体在地球表面被提升到 160 km 的高度. (a)在此高度物体的质量是多少? (b)在此高度物体重力是多少?

解　☞ (a)质量同地球表面质量一致.

(b)我们一旦远离地球表面, 重力就随远离地心距离的改变而改变. 事实上, $w = GmM/r^2$, 其中 m, M 是物体和地球的质量. 因为 G、m、M 是常数, 所以 $w_2/w_1 = r_1^2/r_2^2$, 对于 $r_1 = 6370$ km 和 $r_2 = 6530$km, 有 $w_1 = (20\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) = 196\text{N}$. $w_2 = 186.5\text{N}$. 我们注意到一个事实就是 $w = mg$ 中, m 相对于重力加速度 g 在两种不同高度是个常量. 因而有 $g_2/g_1 = r_1^2/r_2^2$.

6.31　地球半径是 6370 km, 金星的半径是 3440 km. 如果在地球上重 200 N 的物体, 在金星表面重多少? 由于重力而产生的加速度是多少? 金星的质量是地球的 0.11 倍.

解　☞ 万有引力定律, $w = GmM/r^2$, 有 $w_2/w_1 = (M_2/M_1)(r_1^2/r_2^2)$. 设 1 对应地球, 2 对应月球, 有 $w_2 = 0.11(6370/3440)^2(200\text{N}) = 75$ N. 加速度可从 $w_2/w_1 = g_2/g_1$ 得到, $g_2 = (75/200)(9.8\text{N}) = 3.7\text{ m/s}^2$.

6.32　月球绕地球转动的轨道半径约为 3.8×10^8 m, 绕一圈需 27 天. 从这些数据可得地球质量是多少?

解　☞ 两球之间的万有引力提供月球的向心力; 所以有 $mv^2/r = GMm/r^2$, M 是地球质量. 有 $M = v^2r/G = \omega^2r^3/G$. $\omega = 1$ 圈/27 天 $= 2.7\times10^{-6}$rad/s, $r = 3.8\times10^8$m, $G = 6.7\times10^{-11}$. 解之 $M = 6.0\times10^{24}$kg(与题 6.27 比较)

6.33　太阳的质量大约是地球的质量的 3.2×10^5 倍. 太阳到地球距离是月球距地球距离的 400 倍. 那么太阳对月球的吸引力是地球对月亮吸引力的多少倍? (假设太阳-月球距离与太阳-地球距离相等.)

解　☞ 设 m 是月球质量, M_s 是太阳质量, M_e 是地球质量, r_{ms} 是太阳和月球球心之间的距离, r_{me} 是地球和月球球心之间距离. F_{ms} 是太阳、月球吸引力, F_{me} 是地球、月球之间的吸引力.

$$F_{ms} = GM_sm/r_{ms}^2$$

$F_{me} = GM_em/r_{me}^2$.

$$\frac{F_{ms}}{F_{me}} = \frac{M_sr_{me}^2}{M_er_{ms}^2},\quad F_{ms}/F_{me} = 2$$

6.34　试估计密度为 3.0 g/cm^3 球体的大小, 假设你在该球体表面以 40 m/s 速度扔出一高尔夫球, 它将不会掉下.

解　☞ 逃逸速率 v_0 由下式给出.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GmM}{R}$$

以 $M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$ 代入得 $R=v_0\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}}$

如果 $\rho=3\times10^3\text{kg/m}^3$,则 $R=0.77\times10^3 v_0$,因为 $v_0=40\text{m/s}$,所以

$$R\approx3\times10^4\text{m}=30\text{km}$$

6.35 (a)证明对于一个圆周轨道,有 $\frac{M_s}{M_p}=\left(\frac{R_p}{R_m}\right)^3\left(\frac{T_m}{T_p}\right)^2$ 其中 M_s 是太阳质量,M_p 是某行星质量,R_p 是行星到太阳距离,R_m 是月球距行星距离,T_m 是月球绕行星转动周期,T_p 是行星绕太阳周期.(b)如果该行星是地球,$R_p=1.00\times10^8\text{km}$,$R_m=3.85\times10^5\text{km}$,$T_m=27.3$ 天,$T_p=365.2$ 天,计算 M_s/M_p.

解 ☞ (a)牛顿第二定律,及万有引力定律,有

$$\frac{4\pi^2M_pR_p}{T_p^2}=\frac{GM_sM_p}{R_p^2}\quad 及\quad \frac{4\pi^2mR_m}{T_m^2}=\frac{GM_pm}{R_m^2}$$

其中 m 是卫星质量.有 $\frac{M_s}{M_p}=\frac{(4\pi^2R_p^3)/GT_p^2}{(4\pi^2R_m^3)/GT_m^2}=\left(\frac{R_p}{R_m}\right)^3\left(\frac{T_m}{T_p}\right)^2$

(b)代入具体数据,有

$$\frac{M_s}{M_p}=\left(\frac{1.50\times10^8}{3.85\times10^5}\right)^3\left(\frac{27.3}{365.2}\right)^2=3.30\times10^5$$

6.36 (a)试求围绕质量为 M 行星做半径为 r 的圆周运动的卫星轨道周期,(b)对于一级轨道($r\approx r_p$).证明对于给定的行星密度$\langle\rho\rangle$,卫星的轨道周期与行星大小无关.

解 ☞ (a)应用牛顿第二定律,有

$$\frac{mv^2}{r}\equiv\frac{4\pi^2rm}{T^2}=\frac{GMm}{r^2}$$

其中 m 是卫星质量,v 是轨道速率,T 是轨道周期.解出上述等式,得到

$T=\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm}}$ 或 $T^2\propto r^3$,这就是开普勒第三定律.(b)既然 $M=4\pi\langle\rho\rangle r_p^3/3$,上述周期表达式可变为

$$T=\frac{2\pi r_p^{3/2}}{\sqrt{(4\pi G\langle\rho\rangle r_p^3/3)}}=\sqrt{\frac{3\pi}{G\langle\rho\rangle}}$$

该式说明了,低轨道卫星的周期仅仅决定于该行星的平均密度.

6.37 土星环由无数小颗粒组成,每个颗粒都有自己的轨道.土星环的最内侧距土星中心距离 70000 km;土星环的最外侧距土星中心距离 135000 km.试求外层颗粒周期对内层颗粒周期的倍数.

解 ☞ 设内、外层轨道半径及周期分别为 R_i、R_o、T_i 和 T_0,利用开普勒第三定律[题 6.36(a)],有

$$\frac{T_o}{T_i}=\left(\frac{R_o}{R_i}\right)^{3/2}=\left(\frac{135}{70}\right)^{3/2}=2.68$$

也就是说 $T_o=2.68T_i$.

6.38 参见题 6.37,分析表明最外层的颗粒有 17 km/s 的速率.求土星的质量.用公里及地球质量的倍数表示求出的结果.

解 ☞ 利用牛顿第二定律及万有引力定律,对于外层质量为 m 的颗粒,有

$$\frac{mv_0^2}{R_0}=\frac{GM_sm}{R_0^2}$$

其中 M_s 是土星质量.有

$$M_s=\frac{v_0^2R_0}{G}=\frac{(17\times10^3\text{m/s})^2(1.35\times10^8\text{m})}{6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}}=5.85\times10^{26}\text{kg}=97.7\,M_e$$

6.39 月球表面的重力加速度是地球表面的 1/6.假设月球和地球有相同的组成,能求出月球和地球半径之比是多少吗?

解 ☞ $g=Gm/R^2$.

$$\frac{1}{6}=\frac{g_m}{g_e}=\frac{R_e^2M_m}{R_m^2M_e}=\frac{R_e^2}{R_m^2}\frac{R_m^3}{R_e^3}=\frac{R_m}{R_e}$$

或 $R_m=\frac{1}{6}R_e$.

6.40 质量均为 8 g 的两个硬币在桌面上,且相距 50 cm.一个硬币的重力是两硬币之间万有引力的多少倍?

解 ☞ 两硬币之间的万有引力是 Gm^2/d^2;用 mg 去除以该值,比值 $=gd^2/Gm=9.8(0.50)^2/(6.67\times10^{-11})(0.008)=4.6\times10^{12}$

6.41 在月球中心和地球中心的连线上有一点,在该点处两球的万有引力正好抵消.求该点离地球中心的距离 x.(令 m_e 和 m_m 分别代表地球和月球质量,D 代表地—月之间的距离.)

解 ☞ $\frac{Gm_e}{x^2}=\frac{Gm_m}{(D-x)^2}$, $x^2(m_e-m_m)-2Dm_ex+m_eD^2=0$

$$x=\frac{D[m_e-(m_em_m)^{1/2}]}{m_e-m_m}$$

6.42 通讯卫星被放置在赤道上方某轨道上,并相对地上某一点静止.这样的同步轨道离地球表面多高?($R_e=6400$ km, $M_e=5.98\times10^{24}$kg)

解 ☞ 卫星必须具有和地球相同的角速度,$\omega=1$ r/d $=7.27\times10^{-5}$rad/s,且万有引力提供向心力.$GMm_s/(R_e+h)^2=m_s\omega^2(R_e+h)$,$h=35800$ km,约为 5.6 R_e.

6.43 三个相同质量为 M 的质点位于 xy 平面的(0,0),(0,0.20 m),(0.20 m,0)处,求在原点质点所受万有引力.

解 ☞ $F_1=F_2=\frac{GM^2}{0.04}=1.67\times10^{-9}M^2$, $F=(1.67\times10^{-9}M^2)(i+j)$N

6.44 图 6-9 显示了一均匀球体,内有一半径为$\frac{R}{2}$的球形空洞,该球体缺损以前质量为 M,证明质量为 m 的质点与缺损球体之间的吸引力为 $F=\frac{GMm}{D^2}\left[1-\frac{1}{8}\left(1-\frac{R}{2D}\right)^{-2}\right]$.

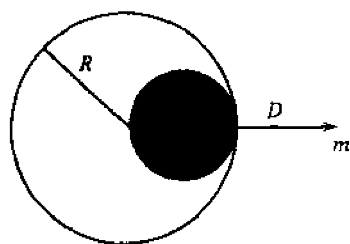


图 6-9

解 ☞ $F'=\frac{GMm}{D^2}$ (缺损前大球与小球的引力)被去掉球体,具有半径 $R/2$,提供力$F''=\frac{G(M/8)m}{(D-R/2)^2}$

因为有 $F+F''=F'$,$F=F'-F''$.所以

$$F=\frac{GMm}{D^2}\left[1-\frac{1}{8}\left(1-\frac{R}{2D}\right)^{-2}\right]$$

6.45 假设一吸引力是指向中心的,且与半径之关系是($F\propto1/r$),证明如一粒子受到该吸引力且围绕一轨道运动,该粒子速率与半径无关,但其周期正比于半径.

解 ☞ 设一常数 c,有 $F=-c/r$.利用牛顿第二定律,有 $mv^2/r=c/r$.$v=\sqrt{c/m}$.即与半径 r 无关.有 $T=2\pi r/v=2\pi r\sqrt{m/c}$.即转动周期正比于半径.

6.46[c] 一长度 L 的棒的两端位置是 $x=a$ 和 $x=L+a$.试求在 $x=0$ 处一质点 m 受到该棒的万有引力(已知每单位长度的棒的质量为 $\mu=A+Bx^2$).

解 ☞ 图 6-10.$dF=\frac{Gm(\mu dx)}{x^2}$.有

$$F=Gm\int_a^{a+L}(A+Bx^2)\frac{dx}{x^2}$$
$$=Gm\left[A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)+BL\right]$$

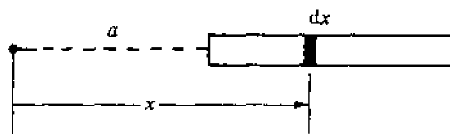


图 6-10

6.47[c] 重解题 6.46,如果 $\mu = Ax + Bx^2$.

解 ☞ $F = Gm\int_a^{a+L}(Ax + Bx^2)\frac{dx}{x^2} = Gm\left[A\ \ln\left(1 + \frac{L}{a}\right) + BL\right]$

6.48 如果月—地距离是 3.8×10^5km,求月球绕地球一圈所需时间(用天表示)($M_e = 5.98 \times 10^{24}$kg.)

解 ☞ 利用题 6.36(a)公式

$$T = \frac{2\pi(3.8 \times 10^8)^{3/2}}{\sqrt{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24})}}\ \frac{1\ \text{d}}{24 \times 3600} = 27\ \text{d}$$

6.49[c] 图 6-11 所示,天平两端各挂 1 kg 的物体,右端物体比左端物体低 10.00 m.(a)右边物体受万有引力比左边物体受万有引力的差额是多少?(b)左边必须增加几克,以维持两边平衡?

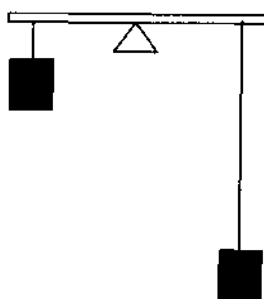


图 6-11

解 ☞ (a)离地心距离 R 物体 m 受万有引力为 $W = (GM_em)/R^2$,距离分别为 R_1 和 $R_2 = R_1 + dR$ 两物体受万有引力之差为

$$dW = W_2 - W_1 = \left(\frac{dW}{dR}\right)_{R_1} dR = \frac{-2GM_em}{R_1^3}dR$$

微小差距是$\frac{dW}{W_1} = \frac{-2dR}{R_1}$.代入 $R_1 = 6.37 \times 10^6$m, $dR = -10$m.有

$$dW/W_1 = (20\text{m})/(6.37 \times 10^6\text{m}) = 3.14 \times 10^{-6}$$

(b)为了维持图 6-11.中两物体平衡,我们必须增加左边物体的质量 $dm = (dW/W_1)m = (3.14 \times 10^{-6})(1\ \text{kg}) = 3.14$ mg

6.3 一般的平面运动

6.50[c] 描述沿一任意平面曲线运动所对应的运动学和动力学方程.

解 ☞ 在一般的运动中(图 6-12)假设一粒子沿弧线走过长度 $s = s(t)$.那么,该粒子具有速率 $v = \frac{ds}{dt}$.切线方向的加速度 $a_s = \frac{d^2s}{dt^2}$,法线方向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\omega^2$ 其中 ρ 为轨道的曲率半径.$\omega = v/\rho$ 是角速度.据牛顿第二定律:$F_n = ma_n$, $F_s = ma_s$.其中 F_n 是合力的法向分量,F_s 是合力的切向分量.

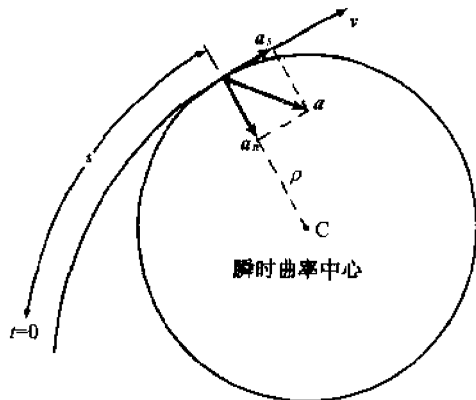


图 6-12

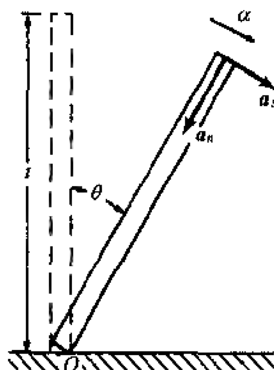


图 6-13

6.51[c] 正在倒下的长杆角加速度如图 6-13 所示为 $\alpha = k\sin\theta$,其中 θ 是杆与竖直方向之夹角,k 是一常数.杆从 $\theta = 0$ 静止开始运动.试求(a)杆顶端的切向加速度,(b)杆顶端的法向加速度,用 k、θ 和 l(杆长)表示.

解 ☞ (a) $a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(lw)=l\alpha=lk\sin\theta$,

(b) 从 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=\alpha$, $\mathrm{d}\omega=k\sin\theta\mathrm{d}t=k\sin\theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{k}{\omega}\sin\theta\mathrm{d}\theta$, 有 $\int_0^\omega\omega\mathrm{d}\omega=k\int_0^\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\omega^2=2k(1-\cos\theta)$, 有 $a_n=lw^2=2kl(1-\cos\theta)$

6.52[c] 一物体在一平面内做曲线运动,试求物体在极坐标系中的(a)速度,(b)加速度.

解 ☞ (a)考虑一沿曲线 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(t)$(图 6-14 所示)的粒子的运动.在曲线上的一点,单位矢量 $\hat{r}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta,\qquad \boldsymbol{\theta}=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta$$

速度矢量由 $\mathrm{v}=\frac{d\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(R\hat{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\hat{r}+R\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$ 给出.但

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{i}(\sin\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{j}(\cos\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

其中 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}4t}$.所以有 $\boldsymbol{v}=\dot{R}\hat{r}+R\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$

可以看出,速度的径向分量为 $\dot{R}$,横向分量为 $R\omega$.

(b) $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\hat{r}+R\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t})=\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}\hat{r}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}+R\frac{\mathrm{d}^2\hat{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 以 $\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 代入.有

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}(\omega\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\mathrm{d}t}=\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}}+\omega\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t}=\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}}+\omega[-\boldsymbol{i}(\cos\theta)\omega-\boldsymbol{j}(\sin\theta)\omega]$$
$$=\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}}-\omega^2\hat{\mathbf{r}}$$

得到

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{R}-R\omega^2)\hat{\boldsymbol{r}}+(R\alpha+2\dot{R}\omega)\boldsymbol{\theta}$$

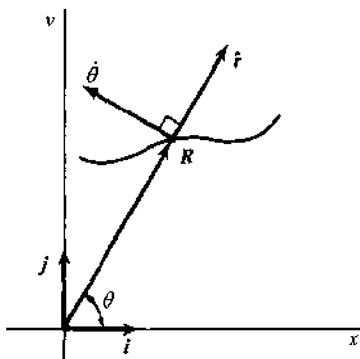


图 6-14

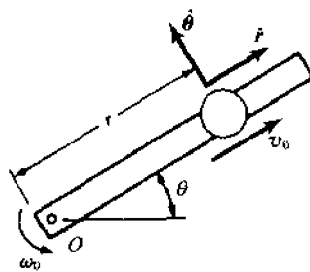


图 6-15

6.53[c] 一珠子以恒定速率 v_0 相对于棍滑动.(图 6-15) $v_0=\dot{r}$,其中 r 是珠子离棍端的距离.同时,棍绕过端点的轴以角速度 w_0 转动.试求(a)珠子的速度,(b)珠子的加速度,(c)珠子的路径.

解 ☞ 利用题 6.52 之结果($\dot{\theta}=\alpha=0$)

(a) $\boldsymbol{v}=v_0\hat{\boldsymbol{r}}+rw_0\hat{\boldsymbol{\theta}}$

(b) $\boldsymbol{a}=-rw_0{}^2\hat{\boldsymbol{r}}+2v_0w_0\hat{\boldsymbol{\theta}}$

(c) $\dot{r}=v_0$, $\dot{\theta}=\omega_0$ 从时间 0 到 t 积分,我们得 $r=r_0+v_0t\quad\theta=\theta_0+\omega_0t$

其中 r_0, θ_0 是初始值.消去 t,可得

$$r-r_0=\frac{v_0}{\omega_0}(\theta-\theta_0)$$

轨迹是螺旋线.

6.54[c] 一海岸护卫舰在雾中通过雷达发现在某一位置 P 处有一非法捕捞船,P 位于舰西面 12.5 km 处.捕捞船闻迅后立即以 12.5 km/h 的速度逃窜.舰长预测到捕捞船速度大小但不知其方向.他寻了一小时,然后绕 P 点开始作螺旋形运动,速率为 48.5 km/h.确保沿 P 方向的速度分量达到 12.5 km/h,那么从了解情况到追上捕捞船所需最长

时间是多少?

解 ☞ 从图 6-16, $v_r=\frac{dr}{dt}=12.5\ \text{km/h}$

$$v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{(48.5)^2-(12.5)^2}=46.85(\text{km/h})$$

从第一个方程得, $r=12.5t$, 其中我们用了初始条件: $t=1$ 小时 时, $r=12.5$ km. 将 r 代入第 2 个方程, 有　$12.5t\frac{d\theta}{dt}=46.85$,　$\int_0^\theta d\theta=3.75\int_1^t\frac{dt}{t}$,　$\theta=3.75\ln t$

舰的螺旋形路线在某些时刻肯定经过捕捞船的沿半径的路径. 设在某一个时刻 $t=\tau$, 两船到 p 的距离是相同的, 则舰追上了捕捞船. 对于 $t=\tau$, 因为 $\theta\leqslant 2\pi$, $3.75\ln\tau\leqslant 2\pi$, 所以

$$\tau\leqslant e^{2\pi/3.75}=5.34\ \text{h}$$

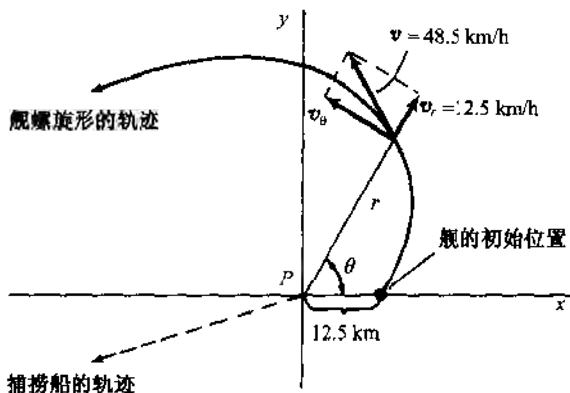


图 6-16

6.55　一湿雨伞如图 6.17(a)所示, 现绕伞柄以恒定速度转动, 44 秒转 21 圈. 如果伞的直径是 1 m, 伞边距离地面高度 1.5 m, 求雨滴从伞边下落到地面时的位置.

解 ☞ 伞的角速度是

$$\omega=\frac{21\times 2\pi\text{rad}}{44\text{s}}=3\text{rad/s}$$

那么雨滴沿伞边飞出去的切向速度是 $v_0=r\omega=(0.5)(3)=1.5(\text{m/s})$.

计算雨滴到地时间: $h=\frac{1}{2}gt^2$;

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2(1.5)}{9.8}}=0.553(\text{s})$$

雨滴水平方向的运动距离是 $x=v_0t=(1.5)(0.55)=0.83(\text{m})$; 那么雨滴最后落在伞中心外 $R=\sqrt{(0.5)^2+(0.83)^2}=0.97(\text{m})$ 的圆周上.

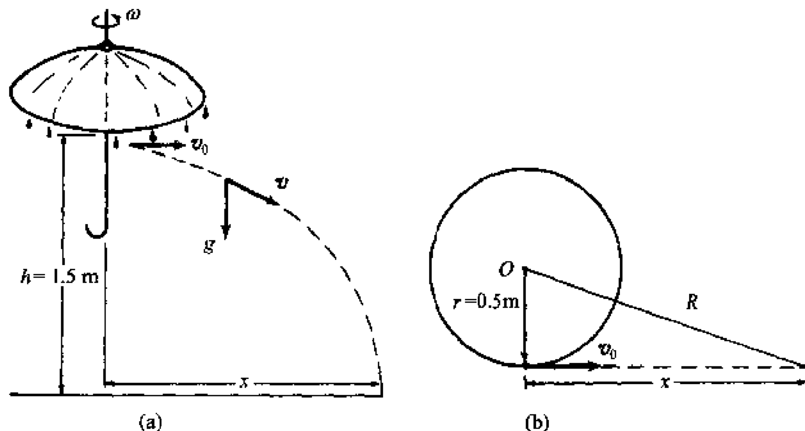


图 6-17

6.56 图 6-18，物体下降，回转轮绕绳转动，因而它上升，试求线速度和角速度之间关系，及线加速度和角加速度之间的关系.

解 ☞ 设 θ 是回转轮初始位置的角度.

$$y_1 = y_{10} - r\theta, \quad y_2 = y_{20} + R\theta - r\theta$$

绕在小轮上绳子长度是 $r\theta$，大轮上绳子长度是 $R\theta$，对 y_1 和 y_2 两次求导；

$$v_1 = \dot{y}_1 = -r\dot{\theta} = -r\omega, \quad v_2 = \dot{y}_2 = (R-r)\dot{\theta} = (R-r)\omega$$

$$a_1 = \ddot{y}_1 = -r\ddot{\theta} = -r\alpha, \quad a_2 = \ddot{y}_2 = (R-r)\ddot{\theta} = (R-r)\alpha$$

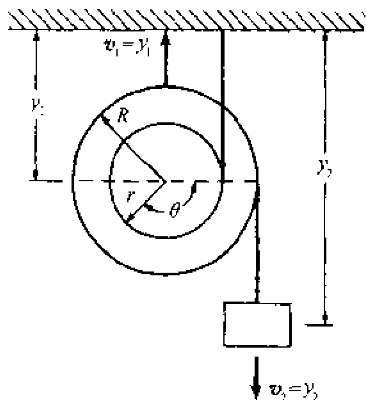


图 6-18

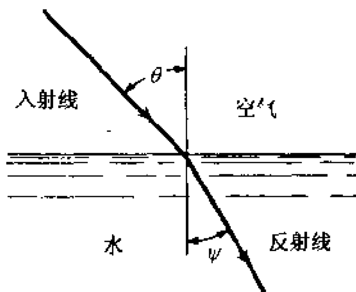


图 6-19

6.57 图 6-19 显示了光从空气进入水时的折射现象，按照斯涅耳定律($\sin\theta = n\sin\Psi$)，光线入水时改变方向. 设入射角 θ 以 10rad/s 的速度增加，$n = 1.3$. 求 $\theta = 30°$ 时折射光线的角速度 ω 及角加速度 α.

解 ☞ 对折射定律 $\sin\theta = n\sin\Psi$. 两次微分，可得 $\omega = \dot{\psi}, \alpha = \ddot{\psi}, \ddot{\theta} = 0$.

$$\dot{\theta}\cos\theta = n\dot{\psi}\cos\psi$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\theta}\cos\theta}{n\cos\psi} = \frac{\dot{\theta}\cos\theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \quad -\dot{\theta}^2\sin\theta = n\ddot{\psi}\cos\psi - n\dot{\psi}^2\sin\psi$$

$$\ddot{\psi} = \frac{n\dot{\psi}^2\sin\psi - \dot{\theta}^2\sin\theta}{n\cos\psi}$$

代入相关数据

$$\dot{\psi} = \frac{10(\sqrt{3}/2)}{\sqrt{(1.3)^2 - (1/2)^2}} = 7.22(\text{rad/s})$$

$$\ddot{\psi} = \frac{[(7.22)^2 - (10)^2](1/2)}{\sqrt{(1.3)^2 - (1/2)^2}} = -20.0(\text{rad/s}^2)$$

6.58 一长杆斜靠在一静止的半柱状物体上，图 6-20，它右端相对于地面滑动，速度是 v. 试求(a)杆的角速度 ω，(b)角加速度 α(用 v. x. R 来表示).

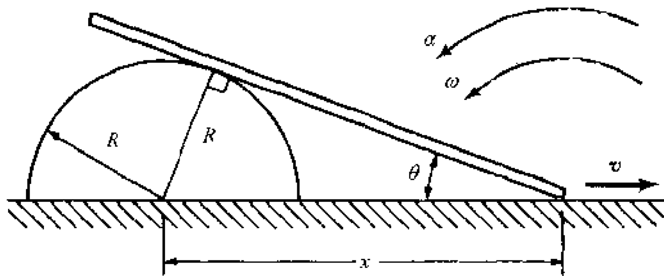


图 6-20

解 ☞ (a)由几何学知识, $x = R/\sin\theta$, 又 $\omega = -\dot{\theta}$. 因而有.

$$v = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{\sin\theta}\right) = \frac{-R\dot{\theta}\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\omega R\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\omega = \frac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta} = \frac{Rv}{x\sqrt{x^2-R^2}}$$

(b) $\alpha = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Rv}{x\sqrt{x^2-R^2}}\right) = \frac{-Rv^2(2x^2-R^2)}{x^2(x^2-R^2)^{3/2}}$

6.59[c] 质量为 m 的粒子沿一曲线无摩擦地移动, 曲线方程是 $y^2 = ax^3$, 粒子具有恒速 v. 试求曲线对粒子的反作用力.

解 ☞ 曲线轨迹的曲率半径是

$$\rho = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = \frac{[1+(9/4)ax]^{3/2}}{(3/4)a^{1/2}x^{-1/2}}$$

在粒子的运动中, 曲线提供了一向心力, 使得粒子保持运动. (见图 6-12). 因而.

$$F = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{3}{4}a^{1/2}x^{-1/2}\left(1+\frac{9}{4}ax\right)^{-3/2}mv^2$$

6.60 一个质量为 2 kg 的质点以 44 m/s 的速度沿一曲线路径运动. 在曲线上某点, 作用在质点上的合力与曲线的切线夹角为 60°, 该力大小是 30 N, 如图 6-21 所示. 在该点处, 求(a)曲率半径, (b)质点切向加速度.

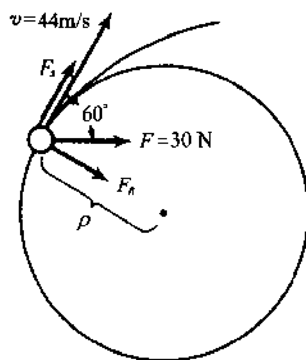


图 6-21

解 ☞ (a) $\rho = \frac{mv^2}{F_n} = \frac{2(44)^2}{30\sin 60°} = 149$ m

(b) $a_s = \frac{F_s}{m} = \frac{30\cos 60°}{2} = 7.5$ (m/s^2)

6.61[c] 一小虫正以恒速 v 沿自行车轮辐条爬行, 轮半径 a, 自行车以恒速 V 沿公路行驶, 求小虫的加速度(观察者为站在路边的人.)

解 ☞ 选取随轮中心转动的坐标系, 在这坐标系中, 加速度与在地面上观察结果相同, 因为两系统有恒定相对速度. 利用题 6.52 的结果. $\omega = V/a$, $\dot{R} = v$. 有

$$a_r = -R\frac{V^2}{a^2}, \quad a_\theta = 2v\frac{V}{a}$$

第七章　功　和　能

7.1　力所做的功

7.1　3N 的力在力的方向上作用 12 m 的距离，求力所做的功.

解　☞ 因力与距离在同一方向，所以 $W = FS = (3\text{N})(12\text{m}) = 36\text{J}$.

7.2　有一 25 N 的水平力沿桌面拖动箱子. 求当箱子移动 80 cm 时力所做的功?

解　☞ 功等于力乘以在力的方向上移动的距离. 本题力与移动的距离方向相同，所以 $W = (25\ \text{N})(0.80\ \text{m}) = 20\text{J}$.

7.3　一小孩用与水平方向成 37°向下的力 6N 推动玩具盒，玩具盒移动了 4.0 m. (a)小孩做了多少功? (b)若小孩用与水平方向成同样角度但偏向上的力推动玩具盒移动相同的距离，小孩做的功增大还是减小?

解　☞ (a)功 $= FS\cos\theta = 6(4)(0.80) = 19.2\text{J}$. (b)做功减小. 因为物体受到的支持力减小，摩擦力减小从而所需的 F 减小.

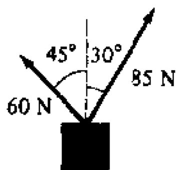


图 7-1

7.4　图 7-1 是作用在盒子上的沿地面的两个力的俯视图：(a)若盒子沿虚线移动 70 cm，求各个力所做的功. (b)求盒子在该方向运动两力所做的总功.

解　☞ (a)每种情况下取力沿位移方向的分量：$(85\cos30°\text{N})(0.70\ \text{m}) = 51.5\ \text{J}$, $(60\cos45°\text{N})(0.70\ \text{m}) = 29.7\ \text{J}$. (b)功是标量，把两力所做的功相加得 81.2 J.

7.5　用水平力 F 在地板上以恒定的速度拖动 20 kg 的纸盒. 若纸盒与地板的摩擦系数为 0.60，求该力拖动纸盒 3.0 m 所做的功.

解　☞ 因为水平方向速度恒定，纸盒在水平方向受力平衡：$F = f = \mu F_N$. 支持力等于重力，$20(9.8) = 196(\text{N})$. 所以 $W = Fx = 0.60(196)(3.0) = 353\ (\text{J})$.

7.6　一盒子在地面被一根与水平方向成 60°角的绳子拖动. 绳子的拉力为 100 N，盒子被拉动 15 m. 求做了多少功?

解　☞ 只有拉力水平方向的分量 $T_x = 100\cos60°$ 做功. 所以 $W = T_x x = (100\cos60°)(15) = 750\ (\text{J})$.

7.7　一物体被一大小为 75 N 方向沿水平向上 28°的力沿地面拖动. 求该力拖动物体 8 m 所做的功.

解　☞ 所做的功等于位移 8 m 与力在位移方向分量 $(75\text{N})\cos28°$ 的乘积. 功 $= [(75\text{N})\cos28°](8\text{m}) = 530\ \text{J}$.

7.8　重 20 kg 的盒子与地面的滑动摩擦因数为 0.40. 求一拉力拉动盒子在地面上移动 8.0 m 所做的功. 拉力与水平方向成 37°向上.

解　☞ 该力做的功为 $xF\cos37°$，其中 $F\cos37° = f = \mu F_N$. 该题中 $F_N = mg - F\sin37°$，所以 $F = \mu mg/(\cos37° + \mu\sin37°)$. 由于 $\mu = 0.40$ 以及 $m = 20\ \text{kg}$，$F = 75.4\ \text{N}$ 所以 $W = (75.4\cos37°)(8.0) = 482\ (\text{J})$.

7.9　若拉力变成推力且方向与水平方向成 37°向下，再次求解 7.8 题.

解　☞ $W = (F\cos37°)(x) = F_x x$；且与 7.8 题中一样，$F\cos37° = \mu F_N$；但现在 $F_N = mg + F\sin37°$；求解 F 得：$F = \mu mg/(\cos37° - \mu\sin37°) = 140\ \text{N}$，$F_x = 112\ \text{N}$. 所以 $W = 112(8.0) = 896(\text{J})$. [这与 7.3(b)所得的结果一致.]

7.10 把一 3 kg 的物体升高 40 cm 需克服阻力做多少功?

解 ☞ 要使重 3 kg 的物体匀速上升,必须给物体一向上的且大小与重力 $mg=(3)(9.8)\text{N}$ 相等的力.该力所做的功即为克服重力所做的功:克服重力做功 $= mgh = [(3)(9.8)\text{N}](0.40\text{ m}) = 11.8\text{ J}$.

7.11 把一重 20 lb 的物体举高 4.0 ft 需克服重力做多少功?

解 ☞ 与 7.10 类似,克服重力做功 = (重力)(高度) = (20 lbf)(4ft) = 80ft·lbf*.

7.12 一重 4 kg 的物体被慢慢升高 1.5 m.(a)需克服重力做多少功?(b)若物体下降而不是被升高呢?

解 ☞ (a)向上的拉力方向与位移方向一致且与重力平衡. $F = mg = 39.2\text{ N}$. $W = Fh = (39.2\text{ N})\cdot(1.5\text{m}) = 58.8\text{ J}$.

(b)若物体下降,F 与位移方向相反, $W = -Fh = -(39.2\text{ N})(1.5\text{ m}) = -58.8\text{ J}$.

7.13 重 400 lb 的砖块被升高到 28 ft 高的支架的顶部,必须克服重力做多少功?

解 ☞ $W = mgh = (400\text{ lbf})(28\text{ ft}) = 11200\text{ ft·lbf}$.

7.14 一砖块在一定力的作用下沿 30°的斜面向上运动,三个力如图 7-2 所示. F_1 沿水平方向且大小为 40N. F_2 垂直于斜面且大小为 20N. F_3 平行于斜面大小为 30N.求砖块(以及砖块上力的作用点)沿斜面向上移动 80 cm 各力所做的功.

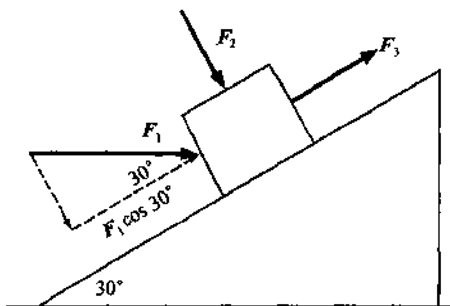


图 7-2

解 ☞ F_1 在位移方向的分量为 $F_1\cos30° = (40\text{N})(0.866) = 34.6\text{N}$. 所以 F_1 做的功为 $(34.6\text{N})\cdot(0.80\text{m}) = 28\text{J}$.(注意长度的单位用米.)

因 F_2 在位移的方向没有分量, F_2 不做功. F_3 在位移方向的分量为 30 N.所以 F_3 做功为 $(30\text{N})\cdot(0.80\text{ cm}) = 24\text{J}$.

7.15 计算用一机械把 40 L 的焦油提升 20 m 所做的有用功.1 cm^3 的焦油质量为 1.07 g.

解 ☞ 因所有焦油颗粒均被提升相同的高度, $h = 20\text{ m}$,所以 $W = Mgh$,其中 M 是焦油的总质量.因 $M = (40\text{L})(10^3\text{cm}^3/\text{L})(1.07\times10^{-3}\text{kg/cm}^3) = 42.8\text{ kg}$, $W = (42.8\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m}) = 8389\text{ J} = 8.389\text{ kJ}$.

7.16 一块规则的长方形大理石板长 3.4 m 宽 2.0 m,质量为 180 kg.石板原来放在平地上,若要使之一端立起来需做多少功?

解 ☞ 重力做功可看作质量集中在质心.把物体立起来所需做的功等于克服重力做的功即 $W = (mg)h$,其中 h 是质心升高的高度. $W = (180\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(1.7\text{ m}) = 3.0\text{ kJ}$.

7.17 在图 7-3 中,计算重力 mg 对质量为 m 的粒子所做的功.粒子(在外力的作用下)(a)从 A 到 B,(b)从 B 到 A,(c)从 A 到 B 到 C,(d)直接从 A 到 C,(e)从 A 到 B 到 C 再到 A.

解 ☞ (a)对于路径 AB, mg 与运动方向相反.所以 $W_{AB} = -mgy$.

(b) $W_{BA} = -W_{AB} = mgy$

(c) $W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = -mgy + 0 = -mgy$

(d) 重力在运动方向的分量为 $-mg\cos\phi$, $\overline{AC} = \Delta S = y/(\cos\phi)$.

$$W_{AC} = (-mg\cos\phi)\left(\frac{y}{\cos\phi}\right) = -mgy$$

(e) $W_{ABCA} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = -mgy + 0 + mgy = 0$

---

* 1ft·lbf = 1.356 J.

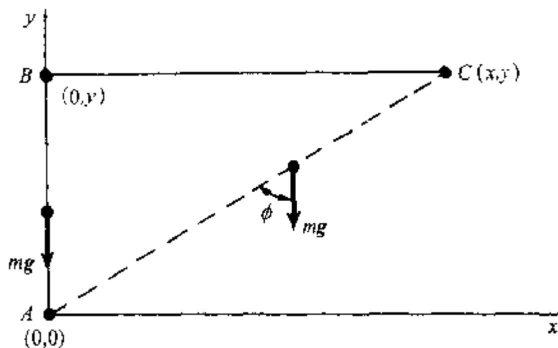


图 7-3

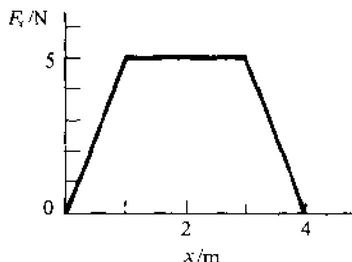


图 7-4

7.18　作用在物体上沿 x 方向上的力与 x 的函数关系如图 7-4 所示.求力在下列各段所做的功:(a)$0\leqslant x\leqslant 1$ m,(b)$1\leqslant x\leqslant 3$ m,(c) $0\leqslant x\leqslant 4$ m.

解　☞ 做的功为 F_x-x 曲线所包围的面积.(a)这一段的面积是底为 1 高为 5 的直角三角形,所以 $W=2.5$ J.(b)矩形的面积为 $2(5)=10$ J.(c)图 7-4 中曲线包围的总面积为 $W=15$ J.

7.19　作用在物体上的沿 x 方向的力与 x 的关系如图 7-5 所示.求力在以下各段所做的功 (a)$0\leqslant x\leqslant 3$ cm,(b)$3\leqslant x\leqslant 5$ cm,(c)$0\leqslant x\leqslant 6$ cm.

解　☞ (a)$W=(0.03\text{ m})(5\text{N})/2=0.075$ J(b) $W=-0.02(3)/2=-0.03$ (J).

(c) 5～6 cm 间所做的功为 $0.01(3)=0.030$ (J);把这一结果与(a)、(b)的结果相加求出 6 cm 距离内的总功为 0.075 J $=75$ mJ.

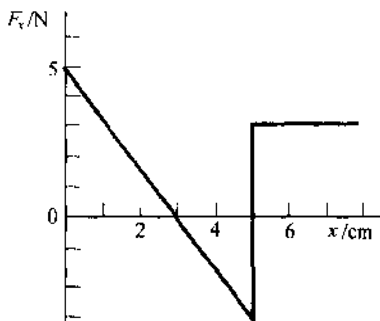


图 7-5

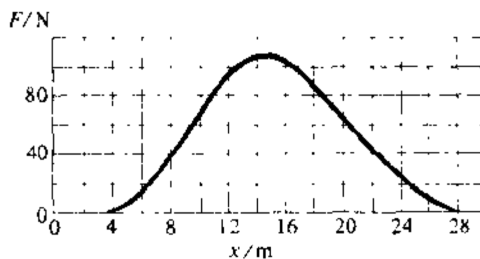


图 7-6

7.20　一小孩对车的沿 x 方向的力随位置的变化关系如图 7-6 所示,求小孩对车做了多少功?

解　☞ 所做的总功等于该曲线下所包围的面积.曲线下大约含有 34 个正方形,包括完整的和不完整的正方形,所以功大约等于(34 个正方形)(40 J/正方形)=1360 J.

7.21　40 N 的力沿与水平方向成 37°向上的方向拉动小车沿水平面前进 8 m,求力所做的功.

解　☞ 功 $=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=FS\cos\theta=(40\text{N})(8\text{m})(0.8)=256\text{J}$.

7.22　要把一 5.0 kg 的小孩举高 40 cm,需做多少功.

解　☞ 功 $=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=(5\times 9.8)(0.40)=19.6$(J).

7.23　若 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}+C_z\boldsymbol{k}$,求(a)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$,(b)$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$.

解　☞ 由 1.85 题,两矢量的标积通过分量的相乘求得.所以(a)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+(0)(B_y)+(0)(B_z)=A_xB_x$,(b)$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z$.

7.24　若 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

解　☞ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(3)(0)+(-4)(6)+(0)(2)=-24$.(若 $\boldsymbol{A}$ 代表以牛顿为

单位的力,$\boldsymbol{B}$ 代表以米为单位的位移,则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 代表以焦耳为单位的功.)

7.25　若 $\boldsymbol{C}=3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{D}=-8\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$.

解 ☞ $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}=(0)(-8)+(3)(0)+(-2)(5)=-10$.

7.26　恒定的合力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$ 作用在物体上使之产生一从原点出发到 $\boldsymbol{S}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的位移.求力对物体做功的两种表达式.

解 ☞ $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}$;根据 1.83 题 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=FS\cos\theta$,其中 $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+f_z^2}$, $S=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角.或者

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=F_x x+F_y y+F_z z$$

7.27　一质量为 m 的硬币沿桌面滑动距离为 D.若桌面与硬币间的摩擦因数为 μ,求摩擦力对硬币所做的功.

解 ☞ 根据定义,$\Delta W=\boldsymbol{f}\cdot\Delta\boldsymbol{x}$.因 f 与运动方向相反,即与 Δx 的方向相反.f 的大小为 $\mu F_N=\mu mg$,所以 $W=-\mu mgD$.

7.28　一重为 5.0 kg 的盒子在水平力的作用下以 20 cm/s 的恒定速率在地面上运动.若盒子与地面间的摩擦系数为 $\mu=0.30$,求每秒(a)拉力所做的功,(b)摩擦力所做的功,(c)每秒作用在盒子上力的总功.

解 ☞ 因速度一定,所以根据牛顿第一定律 $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{f}$,其中 $f=\mu mg=0.30\ (5.0)(9.8)=14.7$ (N).(a)$\Delta W=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{x}$ 得 $W=(14.7\ \text{N})(0.20\text{m})=2.94$ J.(位移即为 1 s 内移动的距离 0.20 m.)(b)$\Delta W=\boldsymbol{f}\cdot\Delta\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{x}$,所以 $W=-2.94$ J.(c)总功等于(a)、(b)的结果之和,等于零.

7.2　功;动能;势能

7.29　什么是动能定理?

解 ☞ 质点的动能定理指合力对质点所做的功等于质点动能的变化:$W_{i\to f}=K_f-K_i=\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$.(有时 K 也写成 KE.)

7.30　证明沿一直线以一恒定加速度(在一恒力作用下)运动的质点的动能定理成立.

解 ☞ $v_B^2=v_A^2+2as$, $\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}mv_A^2+Fs$, $K_B=K_A+W_{AB}$或 $W_{AB}=K_B-K_A$.

7.31　动能定理如何扩展到包括与保守力(如重力)有关的势能?

解 ☞ 设 W_P 表示与势能 U(或 PE)有关的力所做的功.W' 表示其它力所做的功.根据动能定理,$W'_{i\to f}+W_{p,i\to f}=K_f-K_i=\Delta K$.根据 U 的定义:$-W_{p,i\to f}\equiv U_f-U_i=\Delta U$.所以 $W'_{i\to f}=(U_f-U_i)+(K_f-K_i)=\Delta U+\Delta K$ 即为考虑势能以后的动能定理.

7.32　一汽车行驶的速度为 100 km/h.若汽车质量为 950 kg,求其动能.

解 ☞ $KE=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(950\ \text{kg})\left(\frac{10^5\ \text{m}}{3600\ \text{s}}\right)^2=3.67\times10^5\text{J}=0.367\ \text{MJ}$

7.33　一些运动项目的优秀成绩如下所示.忽略空气阻力并且假设每个物体沿最佳角度 45°抛出,计算每种情况下物体的初始动能.(a)铅球:质量 = 7.26 kg,抛出距离 = 22.0 m,(b)铁饼:2.00 kg,70.9 m,(c) 链球:7.26 g,79.3 m,(d)标枪:0.800 kg,94.6 m,(e)跳远:60.0 kg,8.90 m,(f)棒球:0.145 kg,130 m.

解 ☞ 由于物体从地面以 v_0 的速度被抛出所能到达的最远距离为 $R_{max}=v_0^2/g$.因为在发射的高度无其它信息,我们可以使用上述公式.初始动能 $k_0=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mgR_{max}$.(a)$K_0=783$ J,(b)$K_0=695$ J,(c) $K_0=2.82$ J,(d)$K_0=371$ J,(e)$K_0=2.62$ kJ,(f)$K_0=92.4$ J.

7.34　一质量为 150 g 的物体某一时刻的速度为$\boldsymbol{v}=(2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j})$m/s.求其动能.

解 ☞ $k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}(0.150)(2^2+6^2)=3.0(\text{J})$

7.35 质量为 800 g 的物体速度从 $\boldsymbol{v}_0 = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ 变到 $\boldsymbol{v}_f = (-6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$ m/s. 动能变化多少?

解 ☞ 运用 $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$, $v_f^2 = 40$ 以及 $v_0^2 = 25$. 所以动能的变化 $= 0.800(40 - 25)/2 = 6.0$ (J).

7.36 使质量为 1300 kg 的汽车从静止加速到 20 m/s 经过距离为 80 m, 需要多大的力?

解 ☞ $W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}(1300\ \text{kg})(20\ \text{m/s})^2 = 260$ kJ. 但 $W = FS = F(80\ \text{m})$; $F = 3.25$ kN.

7.37 质量为 50 kg 的箱子沿倾角为 30°的斜面滑下. 箱子的加速度为 2.0 m/s², 斜面长 10 m. (a)箱子到达斜面底部的动能为多大? (b)克服摩擦做了多少功? (c)求箱子在下滑过程中受到摩擦力的大小.

解 ☞ (a)我们用 m 和 a 表示箱子的质量和加速度. 当箱子从静止到沿斜面下滑 s, 其动能 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2as) = mas$. 因 $m = 50$ kg, $a = 2.0$ m/s², $s = 10$ m, 所以 $K = 1000$ J.

(b)重力对箱子所做的功为 $W_g = mgh$, 其中 h 是箱子下降的垂直距离. 对于倾角为 θ 的斜面, $h = s\sin\theta$, 所以 $W_g = mgs\sin\theta$. 根据 $\theta = 30°$ 以及其它已知的值, 得到 $W_g = 2450$ J. 另外只有摩擦力对箱子做功, 用 W_{fr} 表示摩擦力做功, 得到 $W_g + W_{fr} = K$. 所以 $W_{fr} = K - W_g = 1000 - 2450 = -1450$(J). 克服摩擦力做功为 $|-1450\ \text{J}| = 1450$ J. (c)摩擦力做功为 $W_{fr} = -F_{fr}s$, 所以 $F_{fr} = -W_{fr}/s = -(-1450)/(10) = 145$(N).

7.38 根据 7.37 题, (a)求箱子与斜面间的滑动摩擦因数, (b)在斜面底部有一滑动摩擦因数与斜面相同的平面. 箱子在静止之前还能滑行多远?

解 ☞ (a)因箱子与斜面保持接触, 支持力 $N = mg\cos\theta$. 所以摩擦力 $F_{fr} = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$. 求解 μ_k 得 $\mu_k = F_{fr}/(mg\cos\theta) = 145/[(50)(9.8)(0.866)] = 0.342$. (b)在水平面上摩擦力为 $F'_{fr} = \mu_k mg$. 箱子滑动的距离 s' 使得摩擦力做的功 W_{fr} 等于动能 K 的负值. 即 $-\mu_k mgs' = -K$, 所以 $s' = K/(\mu_k mg) = 1000/[(0.342)(50)(9.8)] = 5.97$(m).

7.39 一辆质量为 1200 kg 的小车在速度为 30 m/s 时刹车至停止. 若轮胎与道路间的摩擦力为 6000 N, 则小车停止之前行驶了多长路程?

解 ☞ $W = \Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}(1200\ \text{kg})(30\ \text{m/s})^2 = -540$ kJ. $W = -fx = -(6\ \text{kN})x$; $x = 90$ m.

7.40 把一质量为 1.0 kg 的物体从 2 m 的高度升到 20 m 的高度, (a)求重力所做的功, (b)提升该物体的外力所做的功.

解 ☞ (a) $W = -\Delta U = -[(1.0)(9.8)(20) - (1.0)(9.8)(2)] = -176.4$ (J). 这是负功, 因为力的方向与运动方向相反.

(b)由 7.31 题得 $W' = \Delta K + \Delta U = \Delta K + 176.4$ J. 与重力做功不同, 外力所做的功与物体速度的改变有关. 如果物体没有加速度($\Delta K = 0$), 则 $W' = 176.4$ J, 为重力功的负值.

7.41 沿一斜面推一 200 kg 的小车. 若把小车推到距起点 1.5 m 高的斜面顶部, 且不计摩擦, 求推力所做的功.

解 ☞ 重力之外的所有力所做的总功等于重力势能与动能之和. 因为除重力外只有沿斜面向上推小车的力 F 做功, 所以 $W_F = \Delta U + \Delta K = (mgh - 0) + (0) = (200\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(1.5\ \text{m}) = 2.94$ kJ.

7.42 若在题 7.41 中斜面底到顶部的距离为 7 m 且摩擦力为 150 N, 方向与运动方向相反. 求推力所做的功.

解 ☞ 现在必须同时考虑摩擦力 $f = 150$ N 和力 F 所做的功. 因 $W_F + W_f = \Delta U + \Delta K = 2.94$ kJ. 并且 $W_f = -(150\ \text{N})(7\text{m}) = -1.05$ kJ, 所以 $W_F = 3.99$ kJ.

7.43 一梯子长 3.0 m 重 200 N, 重心距梯子底部 120 cm. 梯子顶部重 50 N, 计算把梯子从水平位置竖起来需要外力做多少功?

解 ☞ 该功(克服重力)由两部分组成, 使重心位置升高 1.20 m 以及使一端位置升高 3.0 m. 所以

做的功 = (200 N)(1.20 m) + (50 N)(3.0 m) = 390 J.

另一种方法:系统重心的位置距地面为

$$\bar{x} = \frac{(200\text{N})(1.20\text{ m}) + (50\text{N})(3.0\text{ m})}{250\text{ N}} = \frac{390}{250}\text{m}$$

把 250 N 的物体提升 390/250 m 的距离需 390 N·m = 390 J 的功.

7.44 一辆重 100 000 lb 的货车以某一恒定的速度沿 1.2% 的斜坡行进 2500 ft. 求克服重力所做的功.

解 ☞ 克服重力做功仅仅使重力势能增加,$\Delta U = mgh$,其中 $h = 0.012(2500\text{ ft}) = 30\text{ ft}$. 所以

$$\Delta U = (100\ 000\text{ lbf})(30\text{ ft}) = 3.0\times10^6\text{ft}\cdot\text{lbf}$$

7.45 若 7.44 题中有一恒定的 440 lbf 的摩擦力阻碍货车的运动,求挂钩所做的功.

解 ☞ 设挂钩所做的功为 W_F,摩擦力所做的功为 W_f,所以 $W_F + W_f = \Delta U + \Delta K$(见 7.31 题). 因速度恒定,$\Delta K = 0$,$W_f = -(440\text{ lbf})(2500\text{ ft}) = -1.1\times10^6\text{ft}\cdot\text{lbf}$,所以 $W_F = \Delta U - W_f = 4.1\times10^6\text{ft}\cdot\text{lbf}$.

7.46 一圆柱形水池高 10 m 内径为 4 m. 则在下列两种情况下使容器注满水需做多少功? (a)水从容器底注入,(b)水从容器顶部注入.

解 ☞ 因 $\rho g\pi r^2 h = (10^3\text{kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)\pi(2\text{m})^2(10\text{m}) = 1.23\text{ MN}$,所以容器中注入 1.23 MN 的水. (a) 1.23 MN 的水重心位置从 0 升高到 5 m;所需的功 = (1.23 MN)(5m) = 6.15 MJ. (b)重心位置从 0 升高到 10 m(然后再下降 5 m 的高度);所需的功 = 2×6.15 = 12.30 MJ.

7.47 一重 200 N 的盒子被沿着长 10 m 高为 3 m 的斜面拖动、平均用力(平行于斜面)为 120 N. (a)需做多少功? (b)盒子的势能变化多少? 动能变化多少? (c)求盒子所受的摩擦力.

解 ☞ (a)拉力做功 $W_{i\to f} = \bar{F}s = (120)(10) = 1200(\text{J})$. (b)势能的变化为 $\Delta U = U_f - U_i = wh - 0 = (200)(3) = 600(\text{J})$. (c)因盒子开始时静止最终也静止,$\Delta K = 0$. 非保守力所做的总功为 $W_{i\to f} + W$,W 为摩擦力对盒子所做的功. 所以 $\Delta K + \Delta U = W_{i\to f} + W$, $0 + 600 = 1200 + W$, $W = -600$ J 因为 $W = -fs$(摩擦力与盒子运动方向相反),所以

$$f = \frac{-600}{-10} = 60(\text{N})$$

7.48 一块重 20 N 的石块从 16 m 的高度落下陷入地下 0.6 m 的深度. 从能量角度,求石块与地面的平均作用力 f. 如图 7-7 所示.

解 ☞ A 与 C 之间非保守力做功 $W' = -fh'$.

$$\Delta K + \Delta U = W', 0 + [mg(-h') - mgh] = -fh'$$

$$f = \frac{mg(h + h')}{h'} = \frac{20(16.6)}{0.6} = 553\text{ N}$$

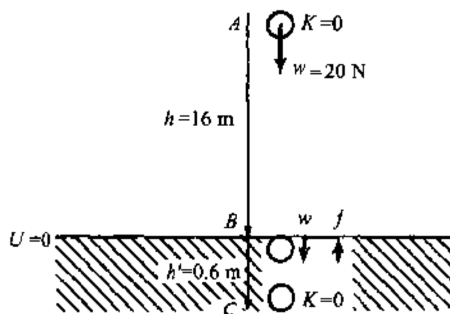


图 7-7

7.49 手枪以 400 m/s 的速度发射一颗重 3 g 的子弹. 枪管长 130 m. (a)子弹获得多少动能? (b)子弹在枪管中运动时受到多大的平均作用力? (c)该力等于膨胀气体对子弹的推力吗?

解 ☞ (a)子弹离开枪管时的动能为 $K_f = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.003)(400)^2 = 240$ (J). (b)对子弹所做的功等于子弹动能的变化. $W = \bar{F}x = K_f - K_i$,其中 $\bar{F}$ 是子弹受到的平均力(沿 x 方向). 由于开始时子弹静止,所以 $\bar{F} = \frac{K_f - K_i}{x} = \frac{240 - 0}{0.13} = 1846$ (N).

(c)不等. 因子弹在枪管中还受到摩擦力的作用.

7.50 一子弹以 153 m/s 的速度射向木板.穿过木板后子弹的速度变为 130 m/s.另一颗子弹,大小和质量均与前一颗相同,但以 92 m/s 的速度射向木板.求第二颗子弹穿过木板后的速度.设板的阻力与子弹的速度无关.

解 ☞ 木板对两子弹所做的功相同,所以使它们减少的动能相等.

$$\frac{1}{2}m(153)^2-\frac{1}{2}m(130)^2=\frac{1}{2}m(92)^2-\frac{1}{2}mv^2,\quad v^2=1955,\quad v=44.2\ \mathrm{m/s}$$

7.51 一小孩想使重 2.0 kg 的包裹以足够大的速度沿斜面到达斜面顶部.斜面长3.0m,倾角为 20°.包裹与斜面间的滑动摩擦系数为 0.40.求小孩至少应使包裹具有多大的初动能?

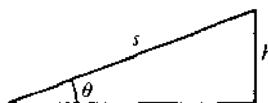


图 7-8

解 ☞ 斜面如图 7-8 所示.若包裹走完斜面的全长 s,摩擦力做功为 $-\mu_k Ns$.而且包裹的重力势能将增加 mgh.要到达斜面顶部,包裹的初始动能 $\frac{1}{2}mv_0^2\geqslant mgs(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)$.因 $\theta=20°$, $m=2.0$ kg, $s=3.0$ m, $\mu_k=0.40$,所以 $\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)_{\min}=(2.0)(9.8)(3.0)[(0.342)+(0.40)\cdot(0.940)]=42.2$ (J).

7.52 一辆质量为1200 kg 的小车的司机发现小车在经过一段130 m 长的水平路面时速度由 20 m/s 降为 15 m/s.求与运动方向相反的力.

解 ☞ $W_F=-Fs=-\Delta K$, F 为所求的力且 $s=130$ m. $\Delta K=\left(\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2\right)=\frac{1}{2}(1200\ \mathrm{kg})(225\ \mathrm{m^2/s^2}-400\ \mathrm{m^2/s^2})=-105$ kJ.所以 $Fs=105$ kJ, F = 0.81 kN.

7.53 重 10 lb 的滑板沿一表面粗糙的斜面滑下,斜面长 100 ft 且与水平面成 30°角,滑板最终速度为 52ft/s.求克服摩擦力所做的功.

解 ☞ $W'=\Delta U+\Delta K$,其中 W' 是除重力外的其它所有的力所做的功,本题中即为摩擦力做的功 W_f.由于 $W_f=(0-mgL\sin30°)+\left(\frac{1}{2}mv^2-0\right)$, $mg=10$ lb, $L=100$ ft, $m=0.311$ slug $v=52$ ft/s.代入数值得到, $W_f=-80$ ft·lbf.

7.54 由能量守恒的观点求解 7.53 题.

解 ☞ 沿斜面滑下时重力势能减小 $mgL\sin30°=500$ft·lbf.到达斜面底部时动能为 $\frac{1}{2}mv^2=420$ ft·lbf,所以由于摩擦产生的热能为 80 ft·lbf.因热能增加,所以摩擦力所做的负功为 $W_f=-80$ ft·lbf.

7.55 重 2000 kg 的电梯由静止从第一层到第四层,升高 25 m.当电梯经过第四层时速度为 3.0 m/s.电梯受一恒定的摩擦力 500 N,求提升机械所做的功.

解 ☞ $W'=\Delta U+\Delta K$,其中 $W'=W_F+W_f$,分别为拉力和摩擦力所做的功.所以, $W_F-fh=(Mgh-0)+\left(\frac{1}{2}Mv^2-0\right)$,其中 $M=2000$ kg, $h=25$ m, $f=500$ N 代入数值得到 $W_F-12.5$ kJ $=490$ kJ + 9kJ, $W_F=511.5$ kJ.

7.56 由能量守恒的观点求解 7.55 题.

解 ☞ 提升机械提供能量对电梯做正功 W_F.能量表现为三种形式:重力势能、动能和热能.势能增加了 $Mgh=490$ kJ;动能的增加为 $\frac{1}{2}Mv^2=9$kJ;热能的增加(摩擦力做负功)为 $fh=12.5$ kJ.把能量相加得 $W_F=511.5$ kJ.

7.57 质量为 900 kg 的小车与路面的滑动摩擦因数为 0.80.小车在刹车之前沿路面以 25 m/s的速度前进,则小车停止之前走了多远?

解 ☞ $W_f=\Delta U+\Delta K$,其中 W_f 是摩擦力做的功且 $\Delta U=0$.所以 $-\mu_k mgL=\left(0-\frac{1}{2}mv^2\right)$,所以 $v^2=(25\ \mathrm{m/s})^2=2\mu_k gL=2(0.8)(9.8\ \mathrm{m/s^2})L$.解得 $L=40$ m.

7.58 在图 7-9 所示的装置中,物体与斜面的摩擦因数为 0.2.(a)力 F 推动物体沿斜面向上

移动 4 m 的距离做了多少功？(b)若力 F 撤消，则物体沿斜面滑下，求物体返回原来位置时的速度.

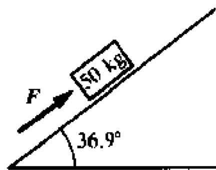


图 7-9

解 ☞ (a)重力 $W=50\times9.8=490(\mathrm{N})$, $W\sin36.9^\circ=294$ N, $W\cos36.9^\circ=392$ N, 摩擦力 $f=\mu W\cos36.9^\circ=0.2\times392=78.4(\mathrm{N})$. 所以功 $W_F=(294+78.4)\times4=1.49$ kJ, 到达顶部时刚好没有动能.

(b)物体在顶部的势能 $=294\times4=1176(\mathrm{J})$, 克服摩擦做功 $=78.4\times4=313.6$ (J), $(1176-313.6)\mathrm{J}=862.4\mathrm{J}=\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}(50)v^2=862.4$, $v^2=34.496\ \mathrm{m^2/s^2}$, $v=5.87$ m/s.

7.59 一滑雪运动员从长 80 ft, 倾角为 30°的山坡滑下后从一水平的短滑台上腾空而起. 若跳起时的速度为 45 ft/s, 求山坡上的摩擦因数.

解 ☞ 势能 $=wh=m\times32\times80\sin30^\circ=1280\ m(\mathrm{ft\cdot lbf})$跳起时的动能 $=\frac{1}{2}m(45)^2=1012.5m\ \mathrm{ft\cdot lbf}$ 所以损耗的能量 $=267.5\ m\ \mathrm{ft\cdot lbf}$

$f\times80=267.5\ m$, $f=\mu_k mg\cos30^\circ$

$\mu_k(m\times32\times0.866)80=267.5\ m=\mu_k=\frac{267.5}{80\times32\times0.866}=0.121$

7.60 抽水机把水从湖中抽到湖上 20 m 的容器中. 则要把 5m³ 的水注入该容器抽水机要做多少功？一立方米的水质量为 1000 kg.

解 ☞ 抽水机所作的功等于水所增加的势能. $W=\Delta U=mgh=(5000\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(20\mathrm{m})=0.98$ MJ.(与 7.46 题相比，该题中容器的高度与 20 m 相比可以忽略.)

7.3 机械能守恒

7.61 什么是机械能守恒定律？

解 ☞ 由题 7.31 知 $W'=\Delta U+\Delta K$, 其中 W' 为所有非保守力所做的功, U 为所有保守力的势能函数. 若 $W'=0$, 则 $\Delta U+\Delta K=(U_f-U_i)+(K_f-K_i)=0$ 或写成 $U_f+K_f=U_i-K_i$(机械能守恒定律)

注意允许有非保守力作用(例如：作用在沿光滑环形金属丝滑动的小珠上的正压力)，但只要其不做功，该守恒定律成立.

7.62 一质量为 2.0 kg 的物体在撞到地面以前动能为 400 J, 如果忽略阻力，求该物体开始下落时的高度.

解 ☞ $U_f+K_f=U_i+K_i, 0+K_f=mgh+0, h=\frac{k_f}{mg}=\frac{400}{(20)(9.8)}=20.4$ (m)

7.63 质量为 40 g 的物体从距地面 250 m 的高度处由静止开始落下. 求(a)物体撞到地面之前的动能, (b)物体撞到地面前的速度.

解 ☞ (a)物体下落过程中重力势能转化为动能.

$$\text{势能}=mgh=(0.040\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(0.25\ \mathrm{m})=0.098\ \mathrm{J}$$

所以，物体撞到地面之前的动能为 0.098 J.

(b) $\mathrm{KE}=\frac{1}{2}mv^2$, $0.098=\frac{1}{2}(0.04)v^2$, $v^2=4.9$, $v=2.21$ m/s

7.64 一个小孩从高 20 m 的山坡上以 15 m/s 的速度扔出一块质量为 0.15 kg 的石块. 求石块落入山坡下的水中时动能和速度的大小.

解 ☞ 在山坡上的(动能 + 势能) = 在水面处的动能

$$(0.15\times9.8\times20)+\frac{1}{2}(0.15)(15)^2=\frac{1}{2}(0.15)v^2$$

在水面的动能 $=29.4+16.9=46.3(\mathrm{J})$, $\frac{1}{2}(0.15)v^2=46.3$, $v=24.8$ m/s

7.65 一质量为0.5 kg的小球下落过程中经过高1.5 m的窗户.求该球经过窗户过程中动能的增加量？若小球在窗户顶部的速度为3.0 m/s,求小球到达窗户底部时的速度.

解 ☞ $\Delta U+\Delta K=0$; $\Delta U=-mgh=-7.35$ J, $\Delta K=7.35$ J; $\Delta K=\left(\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_t^2\right)$, $v_t=3$ m/s,所以$\frac{1}{2}mv_b^2=7.35$ J+2.25J=9.60J.解得 $v_b=6.20$ m/s.

7.66 海平面空气中氮分子内平均平动动能为6.2×10^{-21}J.一个氮分子质量为4.7×10^{-26} kg.如果氮分子被向上发射且不与其它空气分子相撞,该氮分子能上升多高？其初始速度为多少？

解 ☞ 首先假设上升的高度不是很高而不必使用万有引力定律, $F=GMm/r^2$.这里直接运用 $F=mg$ 和 $U=mgh$.若假设错了,可以从 h 的值得到验证.若分子的运动不受阻碍,则 $\Delta U+\Delta K=0$ 且到达顶点时减少的动能等于获得的重力势能.所以 $6.2\times10^{-21}\text{J}=mgh=(4.7\times10^{-26}\text{kg})(9.8\text{ m/s}^2)h$, $h=13.5$ km.这与地球的半径(6400 km)相比很小,所以我们的假设成立.氮分子的速度可以由$K=\frac{1}{2}mv^2=6.2\times10^{-21}$J 获得, $v=514$ m/s.

7.67 图7-10中一单摆从 A 点开始释放,则小球经过点 C 时的速度是多少？

解 ☞ 绳的拉力不做功(根据7.61题知).与小球到达 C 点,势能减少 mgh_a,其中 $h_a=0.75$ m,并且在 C 点获得$\frac{1}{2}mv_c^2$ 的动能.根据 $mgh_a=\frac{1}{2}mv_c^2$,消去 m,得到 $v_c^2=2gh_a=2(9.8\text{ m/s}^2)(0.75\text{ m})=14.7\text{ m}^2/\text{s}^2$, $v_c=3.83$ m/s.

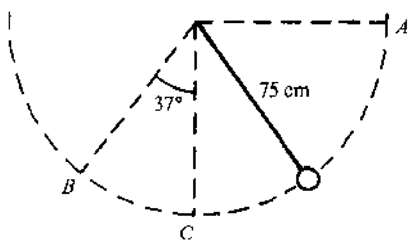


图 7-10

7.68 根据图 7-10,求小球在 B 点的速度.

解 ☞ 设 C 点为零势能参考点,由守恒定律得 $mgh_a+\frac{1}{2}mv_a^2=mgh_b+\frac{1}{2}mv_b^2$,因为 $v_a=0$, $h_a=0.75$ m, $h_b=(0.75)(1-\cos37^\circ)=0.15$ m,方程就写成 $v_b^2=2gh_a-2gh_b=11.76\text{ m}^2/\text{s}^2$, $u_b=3.43$ m/s.

7.69 某摆球的质量为0.5 kg,被系在一根长2 m的绳上.现把摆拉开36.9°的角(如图7-11)并释放.求(a)对应于最低位置的最大势能,(b)当绳与竖直方向夹角为10°时的势能,(c)最大摆速以及(d)绳与竖直方向夹角为10°时的摆速.

解 ☞ $h=2-2\cos36.9^\circ=2-1.6=0.4$(m).

(a)最大势能$=(0.5\times9.8)0.4=1.96$(J).(b)当 $\theta=10^\circ$, $h_{10}=2-2\cos10^\circ=2(1-0.9848)=0.0304$(m),此时的势能$=(0.5\times9.8)\times0.0304=0.149$(J)

(c)在底部时 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)v_{\max}^2=1.96$, $v_{\max}=2\times1.4=2.8$ m/s.

(d)$(1.96-0.149)\text{J}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)v_{10}^2$, $v_{10}^2=7.24$, $v_{10}=2.69$ m/s

7.70 质量为0.8 kg的摆球与2 m长的绳子相连并被拉至与竖直方向成36.9°的角(见图7-11).求摆球释放后经过平衡位置时的速度.

解 ☞ $h=2-1.6=0.4$(m) 重力做的功=减少的势能. 减少的势能$=mgh=0.8\times9.8\times0.4=3.136$ (J).根据动能定理$\frac{1}{2}mv^2=mgh$, $v^2=2gh=2\times9.8\times0.4=7.84(\text{m}^2/\text{s}^2)$, $v=2.8$ m/s.

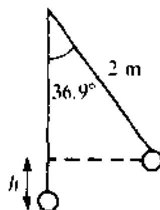


图 7-11

7.71 一辆玩具汽车从图7-12(a)中的位置1处从静止出发,沿线路12324无摩擦运动,求要使汽车不从轨道上掉下来的最小高度 h.

解 ☞ 当 h 在临界值时,汽车将在位置 3 处与轨道失去接触.所以此时轨道的支持力消失且 $mg = mv_3^2/r$, $v_3^2 = gr$.根据能量守恒,位置 1 处汽车的势能与位置 3 处的动能相等:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_3^2, \quad h = \frac{v_3^2}{2g} = \frac{r}{2}$$

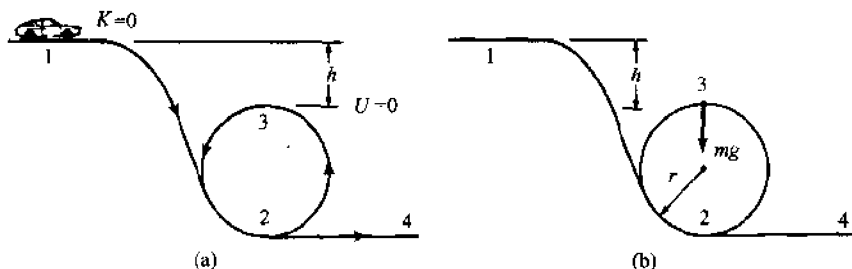


图 7-12

7.72 根据 7.71 题,求汽车在位置 4 处的速率.

解 ☞ 对位置 1 和位置 4 运用能量守恒定律,

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_4^2 - mg(-2r), \quad v_4^2 = 2g(h + 2r) = 5gr, \quad v_4 = \sqrt{5gr}$$

7.73 如图 7-13 所示的轨迹,AB 段是半径为 1.0 m 的圆周的四分之一.一滑块从 A 点滑下且在 A 与 B 之间没有摩擦.(a)滑块到达四分圆的底部 B 点时的速度有多大? (b)水平面不光滑.滑块滑至距 B 3.0 m 的地方停下,求滑动摩擦因数.

解 ☞ (a)由能量守恒得到方程$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = mgh_A$,所以 $v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$.因为 $h_A - h_B = 1.0$ m,得到 $v_B = \sqrt{2(9.8)(1.0)} = 4.43$(m/s)

(b)若滑块停止时滑动距离为 d,由动能定理有 $W_{fr} = -\mu_k mgd = -\frac{1}{2}mv_B^2$.所以 $\mu_k = \left(\frac{1}{2}mv_B^2\right)/(mgd) = mg(h_B - h_A)/(mgd) = (h_B - h_A)/d$.所以当 $d = 3.0$m, $\mu_k = \frac{1}{3} = 0.333$.

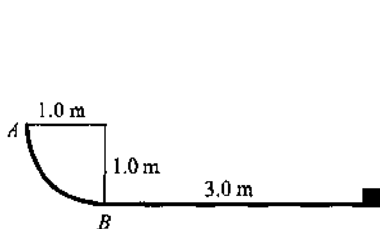


图 7-13

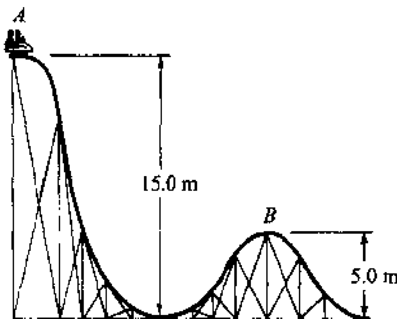


图 7-14

7.74 图 7-14 是设计过山车轨道路线的平面图.每次车从 A 点由静止开始运动且运动过程中不受摩擦力.轨道在各点对车产生很小的正压力(推力),否则小车就会离开轨道.求 B 点弯曲半径的最小安全值.

解 ☞ 用 v_A 和 v_B 表示小车在 A、B 两点的速度,用 h_A 和 h_B 表示这两点的高度.若车的质量为 m,表示能量守恒的方程为$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$.因 $v_A = 0$,所以 $v_B^2 = 2g(h_A - h_B)$.B 点所需的向心力为 mv_B^2/R,R 是 B 点弯曲的半径.要使轨道对车的作用力为正,向心力必须比车的重力 mg 小.所以$\frac{mv_B^2}{R} \leqslant mg$,求解 R,得

$$R \geqslant R_{\min} = \frac{v_B^2}{g} - 2(h_A - h_B)$$

因 $h_A = 15.0$ m 和 $h_B = 5.0$ m，得 $R \geqslant 2(10) - 20.0$ m.

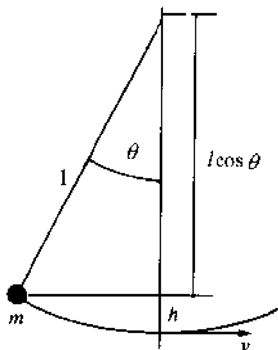


图 7-15

7.75　证明若一单摆被拉离平衡位置 θ 角后释放，经过平衡位置时的速度为 $v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$，其中 l 是摆的长度.

解　☞ 运用能量守恒定律

减少的势能 = 增加的动能，$mgh = \frac{1}{2}mv^2$，$gh = \frac{1}{2}v^2$　由图 7-15，

$$h = l \quad l\cos\theta,\quad g(l - l\cos\theta) = \frac{1}{2}v^2,$$

$$2gl(1-\cos\theta) = v^2$$

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

7.76　一物体从半径为 R 的光滑圆柱体表面 P_1 点从静止开始移动(图 7-16). 在 P_2 点物体离开圆柱体. 求图中 θ_1 和 θ_2 关系的方程.

解　☞ 因支持力对物体不做功，所以物体能量守恒.

$$(K+U)_{P_1} = (K+U)_{P_2},\quad 0 + mgR\cos\theta_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR\sin\theta_2$$

$$v_2^2 = 2gR(\cos\theta_1 - \sin\theta_2)$$

在 P_2 点，表面的支持力变为零，所以该时刻物体重力的径向分量提供向心力. 根据牛顿第二定律，

$$mg\sin\theta_2 = \frac{mv_2^2}{R},\ mg\sin\theta_2 = \frac{m}{R}[2gR(\cos\theta_1 - \sin\theta_2)],\ \sin\theta_2 = 2\cos\theta_1 - 2\sin\theta_2,\ \sin\theta_2 = \frac{2}{3}\cos\theta_1$$

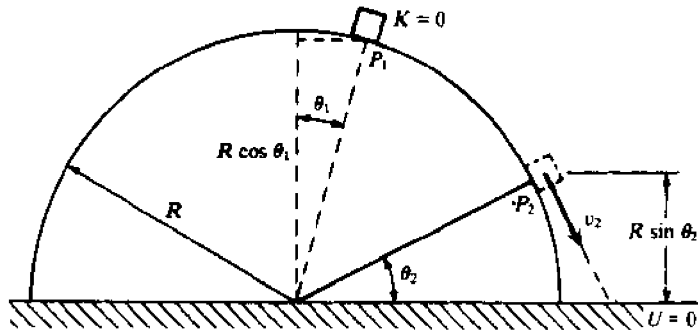


图 7-16

7.77　经过打击后的高尔夫球以 130 ft/s 的速度飞出. 若小球达到的最大高度为 180 ft，求其在最高点的速度.

解　☞ $U_i + K_i = U_f + K_f$，取小球在地面时 $U_i = 0$，

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2,\ \frac{1}{2}v_0^2 = gh + \frac{1}{2}v^2,\ \frac{1}{2}(130)^2 = 32(180) + \frac{1}{2}v^2$$

$$130^2 - 64(180) = v^2,\ 16900 - 11520 = v^2,\ v^2 = 5380\ \text{ft}^2/\text{s}^2,\ v - 73.3\ \text{ft/s}$$

7.78　当质量为 300 g 的物体挂在竖直弹簧的末端，弹簧长为 40 cm. 当换成 500 g 的物体时，弹簧伸长了 10 cm. 求该弹簧的劲度因数.

解　☞ 因为当质量增加 0.20 kg 时弹簧的长增加 0.10 m，$k = F/x = 0.20(9.8)/0.10 = 19.6$ (N/m).

7.79　弹簧挂 200 g 的物体时伸长 10 cm，则把弹簧从平衡位置拉长 5 cm 需做多少功？再拉长 5 cm 则还需做多少功？

解 ☞ 劲度系数 $=k=F/x=0.20(9.8)/0.10=19.6(\mathrm{N/m})$，则把弹簧拉长 5 cm 需做功 $kx^2/2=19.6(0.05)^2/2=0.0245(\mathrm{J})$. 再拉长还需再做功为 $[19.6(0.10)^2/2]-0.0245=0.0735(\mathrm{J})$.

7.80 若弹簧挂 80 g 的物体时伸长 4.0 cm，则把弹簧的伸长从 10 cm 增加到 20 cm 时拉力做多少功？伸长的长度从原长开始测量.

解 ☞ 与 7.79 题的步骤相同. $k=(9.8\times0.08)/0.04=19.6(N/m)$. 拉力做功分别为 0.0980 J 和 0.392 J. 所以结果为 0.294 J.

7.81 弹簧秤测量力，单位是牛顿. 弹簧可伸长 20 cm，测力范围为 0 到 60 N. 求下列情况下弹簧的势能：(a)弹簧读数为 40 N，(b)弹簧伸长 20 cm，(c)把 4 kg 的物体挂在弹簧上.

解 ☞ $F=kx$, $60\ \mathrm{N}=k(0.2\ \mathrm{m})$, $k=300\ \mathrm{N/m}$

(a) $40=300x \quad x=(4/30)\mathrm{m}$ 势能 $=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(300)(4/30)^2=2.67(\mathrm{J})$

(b) 势能 $=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(300)(0.2)^2=6(\mathrm{J})$

(c) 4 kg 物体重 39.2 N, $39.2=kx=300x$, 势能 $=\frac{1}{2}(300)(39.2/300)^2=2.56(\mathrm{J})$

7.82 一物块从高 0.6 m 的桌面落下. 落在理想的、质量可忽略不计且竖直放置的弹簧上，弹簧的劲度系数为 2.4 kN/m. 弹簧开始时高 25 cm，在物块弹离前被压的最低高度为 10 cm. 求该物块的质量.

解 ☞ $(\text{物体势能}+\text{弹簧势能})_{\text{初始}}=(\text{物体势能}+\text{弹簧势能})_{\text{末}}$. 因为在最高位置和最低位置动能 $=0$，所以 $m(9.8)(0.6)+0=m(9.8)(0.10)+\frac{1}{2}(2.4\times10^3)(0.15)^2$ 解得 $m=5.51$ kg.

7.83 如图 7-17 所示的弹簧劲度系数为 k 且被压缩了 x_0. 物体 M 可以自由离开弹簧的末端，且可忽略与桌面的摩擦. 若系统释放，求物体离开弹簧时的速度.

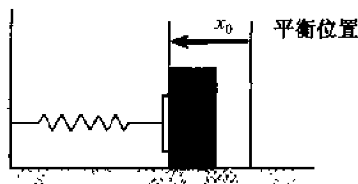


图 7-17

解 ☞ 弹簧所有的压缩(势)能转化为物体的动能；$kx_0^2/2=mv^2/2$，所以 $v=x_0(k/M)^{1/2}$.

7.84 图 7-17 中质量为 M 的物体系在弹簧的末端做无摩擦运动. 当弹簧从如图所示位置释放，系统在平衡位置左右 $\pm x_0$ 间振动. 求弹簧的伸长为(a)零，(b) $2x_0/3$ 时物体的速度. 劲度系数为 k.

解 ☞ (a)由 7.83 题，$v=x_0(k/M)^{1/2}$. (b) $kx_0^2/2=$ 物体动能 + 弹簧的势能，所以 $kx_0^2/2=Mv^2/2+k(2x_0/3)^2/2$. 所以 $v=x_0(5k/M)^{1/2}/3$.

7.85 一竖直放置的弹簧劲度系数 200 N/m，在其顶部有一轻平板. 当板上放有 500 g 的物体时，弹簧被压缩 0.0245 m. 若物体再被压缩 0.0755 m 后释放，则物体会从该位置飞起多高？

解 ☞ 劲度系数 $k=F/y=200$ N/m. 若物体上升高度超过 0.10 m，就会脱离弹簧. 这样，开始时的势能 $U_s=$ 物体最后的势能 U_g，设 U_g 在最低位置处为零. 所以 $200(0.10)^2/2=0.5(9.8)h$ 得 $h=0.20$ m. 所以物体离开弹簧的假设是正确的.

7.86 设 300 g 的物体从 40 cm 的高处落到 7.85 题所说的弹簧上且与平板相撞. (a)弹簧被压缩多长？(b)当物体与弹簧反弹时弹簧被拉长多少？

解 ☞ 物体从顶部落下时势能减少 U_g. 该能量转化为弹簧的弹性势能 U_s. (a)设弹簧被压缩了 y，所以 $mg(0.4+y)=200y^2/2$，得 $y=0.124$ m. (b)此时由(a)得到的弹性势能减少 mgh，其中 h 是反弹距离. 所以 $k(0.124)^2/2=k(h-0.124)^2/2+mgh$，所以 $h=0.219$ m. 弹簧被拉长 $h-y=0.095$ m.

7.87 质量为 100 g 的物体固定在劲度系数为 10 N/m 的弹簧上. 物体先被举到弹簧没有形变的状态然后释放. 运用机械能守恒计算物体撞到下方 150 m 处的桌面时的速度.

解 ☞ 图 7-18 表示出系统刚被释放以及物体刚刚撞到桌面的情形. 系统的势能写成 $U=mgh+\frac{1}{2}ks^2$; h 是物体距桌面的高度, s 是弹簧伸长的距离. 当物体被释放时, $h=h_i=0.15$ m, $s=s_i=0$, 速度 $v=v_i=0$. 当物体撞到桌面时, $h=h_f=0$, $s=h_i=0.15$m, $v=v_f$. 根据能量守恒 $K_f+U_f=K_i+U_i$ 或 $\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}kh_i^2=0+mgh_i$ 求解 v_f 得 $v_f=\sqrt{2gh_i-(kh_i^2/m)}$. 因为 $k=10$ N/m, $m=0.100$ kg, 得到

$$v_f=\sqrt{2(9.80)(0.15)-[(10)(0.15)^2/(0.1)]}=0.831(\text{m/s})$$

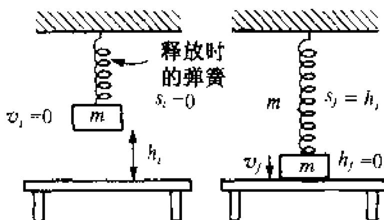


图 7-18

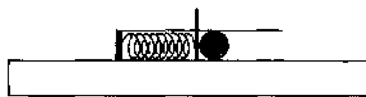


图 7-19

7.88 一质量可以忽略的弹簧劲度系数为 600 N/m, 且被放在一周围光滑的导管中(如图 7-19所示). 该管被固定在桌面上水平位置. 该弹簧被压缩 10.0 cm 并被穿过管壁的挡针所固定. 现把 200 g 的小球与弹簧靠在一起, 小球直径与弹簧相同, 如图 7-19 所示. 若把挡针移去释放弹簧, 求小球获得多大的速度?

解 ☞ 用 x 代表弹簧自由端的位置, 弹簧处于自由状态时 $x=0$, 弹簧伸长时 $x>0$. 开始时弹簧被压缩($x=-0.100$ m)且球处于静止($v_0=0$). 当小球达到其末速度 v_f 且弹簧上是拉力而不再是推力时, 弹簧与小球分开. 此时 $x_f=0$. 能量守恒定律要求 $\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}kx_f^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2$. 因为 $v_0=0$, $x_f=0$, 所以 $v_f=|x_0|\sqrt{\frac{k}{m}}$

代入 $k=600$ N/m 以及 $m=0.200$ kg, 求得

$$v_f=(0.10)\sqrt{(600)/(0.200)}=5.48\ \text{m/s}.$$

7.89 根据 7.88 题, 若导管竖直放置, 求小球与弹簧脱离接触时的速度.

解 ☞ 同样当弹簧恢复原长时小球与弹簧脱离. 此时小球向上的速度为 v_f, 根据能量守恒定律 $\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}ky_f^2+mgy_f=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}ky_0^2+mgy_0$. 代入 $v_0=0$ 和 $y_f=0$, 得到 $v_f=\sqrt{\frac{ky_0^2}{m}+2gy_0}$, 因为 $y_0=-0.100$ m, 得

$$v_f=\sqrt{[(600)(-0.1)^2/(0.2)]+(2)(9.80)(-0.1)}=5.30(\text{m/s})$$

7.90 一质量为 m 的物体沿 $+x$ 轴运动, 经过原点时的速度为 v. 物体受到阻力 $F_x=-Ax(A>0)$. 求物体停止时的 x 坐标.

解 ☞ 根据动能定理, 阻力做的功 = 动能的变化:

$$\int_0^{x_f}(-Ax)\mathrm{d}x=0-\frac{1}{2}mv^2,\ -\frac{1}{2}Ax_f^2=-\frac{1}{2}mv^2,\ x_f=v\sqrt{\frac{m}{A}}$$

7.91 重 10 kg 的仪器舱被垂直发射到地表上方 637 km 的高度, 该高度相当于地心到地表距离即地球半径的 1.1 倍. 求该仪器舱在最高位置的重量 W 和势能(PE). (以地球的表面为零势能面.)

解 ☞ 在地球表面重力为

$$mg=10\ \text{kg}\times9.8\ \text{m/s}^2=G\frac{M_E(10\ \text{kg})}{R^2}\ \text{其中}\ R\ \text{为地球半径} \tag{1}$$

$$r=1.1\ R,\ W=G\frac{M_E(10\ \text{kg})}{(1.1R)^2} \tag{2}$$

用(2)式除以(1)式,得到 $W/98=1/1.21$,即 $W=81$ N.

势能 $=GM_E(10\ \text{kg})\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{1.1R}\right)=GM_E(10\ \text{kg})\left(\frac{0.1}{1.1R}\right)=(6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98\times10^{24}\text{kg})\cdot(10\ \text{kg})\times\frac{0.1}{1.1\times6.37\times10^6\text{m}}=57$ MJ(若取 $r=\infty$ 处势能 = 0,则势能 $=[-GM_E(10\ \text{kg})]/1.1R=-570$ MJ.)

7.92 计算物体从地球表面发射的逃逸速度.忽略空气阻力.地球的质量为 5.98×10^{24}kg,半径为 6370 km.

解 ☞ $\Delta PE=GMm(1/R-1/r)$其中 $R=6.37\times10^6$m.因 $r=\infty$,$\Delta PE=GMm/R$.又最终物体速度为零,根据能量守恒得 $\Delta KE+\Delta PE=0$ $\left(0-\frac{1}{2}mv_e^2\right)+\frac{GMm}{R}=0$

$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{2(6.67\times10^{-11})(5.98\times10^{24})}{0.37\times10^6}}=11.2$(km/s)(大约为 25 000mi/h)

7.93 证明:若 $h=r-R$ 与地球半径 R 相比很小,相对于地球表面的重力势能 $PE=GMm\cdot(1/R-1/r)$就变成 $PE=mgh$,其中 g 为重力加速度 h 是垂直高度.

解 ☞ $PE=GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{GMmh}{R(R+h)}=m\frac{GM}{R^2}\frac{h}{(1+h/R)}\approx mgh$

其中 $g=\frac{GM}{R^2}$.

7.94 地球重力场中质量为 m 的物体每公里的势能如图 7-20 所示,其中 r 为物体距地球中心的距离且地球的半径 $R_e=6.4\times10^6$m. $r\to\infty$ 处势能为零.(a)若忽略空气阻力,需多大的能量才能使 1 kg 的物体脱离地球(即:使物体从 $r=R_e$ 到 $r\to\infty$)?(b)物体以多大的速度发射才能脱离地球?

解 ☞ 由图知,把 1 kg 物体发送到无穷远处需 62 MJ 的能量;这个能量由在地表时的动能 K 提供,所以$[(1\ \text{kg})v^2]/2=62\times10^6$J.解之得 $v=11.1$ km/s,这与 7.92 题结果基本一致.

7.95 根据图 7-20.质量为 1 kg 的物体从远离地球的地方开始释放,求物体距离球心 $r=2R_e$ 时的速度,其中 R_e 是地球的半径.为何可以忽略空气阻力的影响?

解 ☞ 从无穷远到 $2R_e$ 处,1 kg 的物体重力势能 U_g 减少 31 MJ.所以$[(1\ \text{kg})v^2]/2=31\times10^6$,$v=7.87$ km/s.在 $r=2R_e$ 处,基本上为真空,摩擦力可以忽略不计.

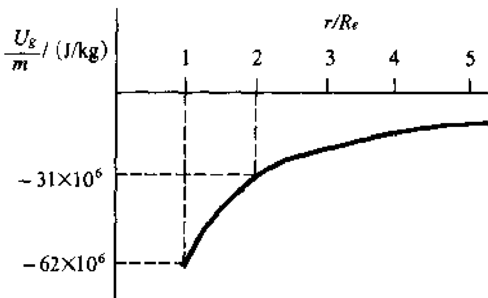


图 7-20

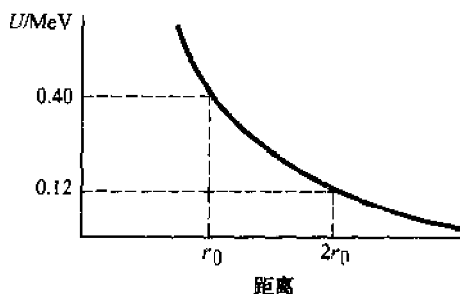


图 7-21

7.96 一质子(带正电)从很远处射向一重核(也带正电).近似认为重核在质子靠近过程中保持静止.两个粒子间的斥力使得质子在靠近核的过程中变慢,最终质子停在 r_0 处且反向运动.若系统的势能随两粒子中心间的距离 r 变化如图 7-21 所示,(a)质子要到达 r_0 至少应以多大的能量发射?(b)质子第一次发射速度为多大?(c)质子到达 $2r_0$ 处速度多大?(质子质量为 1.67×10^{-27} kg;1 ev $=1.6\times10^{-19}$J.)

解 ☞ (a)设核没有动能,在 r_0 处质子的所有动能 K 转化为电势能 U;需要能量为 0.40 MeV $=6.4\times10^{-14}$ J.(b) $mv^2/2=6.4\times10^{-14}$ J 得到 $v=8.75\times10^6$m/s.(c)质子动能为(0.40 − 0.12)MeV,所以 $mv^2/2=(0.28\times10^6)(1.6\times10^{-19})$,得到 $v=7.3\times10^6$m/s.

7.97　在重核附近的质子势能曲线如图 7-21 所示.若质子从 $r = r_0$ 处释放,(a)求质子距核很远时的速度为多大?(b)在 $2r_0$ 处质子的速度为多大?设重核保持静止.(数据见 7.96 题).

解　☞ (a)质子在 r_0 处的势能 U 在无穷远处转变成动能 K.所以 $(0.40\times10^6)(1.6\times10^{-19}) = mv^2/2$, $U = 8.75\times10^6$m/s.(b)从 r_0 到 $2r_0$ 减少的能量转化为动能;$mv^2/2 = (0.28\times10^6\text{eV})(1.6\times10^{-19}\text{J/eV})$,由此得 $v = 7.3\times10^6$m/s.

7.4　附加题

7.98　重 5*l* b 的滑块从四分圆周的表面滑下(图 7-22).若半径为 1.2 ft,且滑块在底部的速度为 6 ft/s.求滑块克服摩擦所做的功.

解　☞ 在顶部 $PE = 5$ lbf × 1.2 ft = 6 ft·lbf.在底部,$KE = \frac{1}{2}(5/32)(6)^2 = 2.8125$ (ft·lbf)克服摩擦所做的功为 6.000 − 2.8125 = 3.19(ft·lbf).

7.99　质量为 3 kg 的滑块沿半径为 1.6 m 的四分圆周从静止滑下(图 7-22).(*a*)若曲面光滑,滑块在底部的速度为多大?(b)若在底部的速度为 4 m/s,在下滑过程中由于摩擦而损耗的能量为多少?(c)当滑块到达水平区域时的速度为 4 m/s,又滑行了 3 m 后停止,求摩擦力的大小.

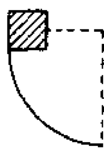


图 7-22

解　☞ (a)在顶部的 PE = 在底部的 KE

$$(3\times9.8\times1.6) = \frac{1}{2}(3)v^2$$

$$v^2 = 2\times9.8\times1.6,\quad v = 5.6\text{ m/s}$$

(b)在顶部的 PE = 在底部的 KE + 克服摩擦所做的功

$(3\times9.8\times1.6) = \frac{1}{2}(3)(4)^2 + |W_f|$,所以 $|W_f| = 23.04$ J

(c) $\frac{1}{2}mv^2 = fS$, $\frac{1}{2}(3)16 = f(3)$, $f = 8N$

7.100　质量为 1200 kg 的小车沿与水平面成 20°长 15 m 的斜面从静止开始滑下.若忽略摩擦,求小车在斜面末端的速度.

解　☞ $\Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + (0 - mgh) = 0$,其中 $h = (15\text{m})\sin20° = 5.13$ m

$$u^2 = 2gh = 100\ \text{m}^2/\text{s}^2,\text{所以 } v = 10.0\text{ m/s}$$

7.101　若小车在与运动相反的方向受到的摩擦力为 3 kN,重新求解 7.100 题.

解　☞ 现在 $W_f = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + (0 - mgh)$,其中 $W_f = -(3\text{ kN})(15\text{m}) = -45$ kJ 是摩擦力所做的功.由题 7.100 知 $h = 5.13$ m.所以 $-45\text{kJ} = \frac{1}{2}(1200\text{ kg})v^2 - (1200\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)\cdot(5.1\text{ m})$,所以 $v = 5.06$ m/s.

7.102　图 7-23 反映了一颗珠子沿导线滑动.要使珠子从 A 点由静止出发,到达 B 点的速度为 200 cm/s,高度 h_1 应为多大?忽略摩擦.

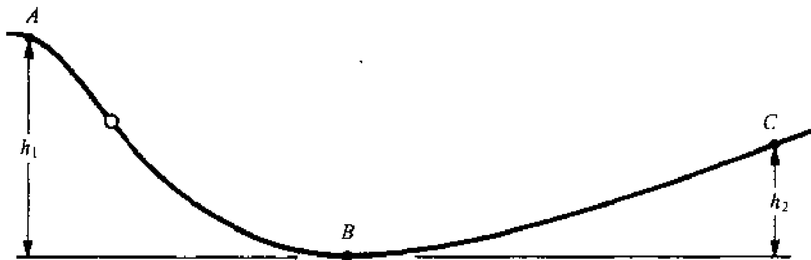


图 7-23

解 ☞ 因不计摩擦且导线对珠子的支持力不做功，所以机械能守恒，$\Delta U+\Delta K=0$.所以 $U_a+K_a=U_b+K_b$，$mgh_1+0=0+\frac{1}{2}mv_b^2$，即 $v_b^2=2gh_1$.代入 $v_b=200$ cm/s 以及 $g=980$ cm/s²，得到 $h_1=20.4$ cm.

7.103 若在图 7-23 中，$h_1=50$ cm，$h_2=30$ cm，AC 间导线长 400 cm.一颗重 3 g 的珠子从 A 点释放到 C 点停止.求与运动方向相反的平均摩擦力的大小.

解 ☞ $W'=\Delta U+\Delta K$，其中 $W'=W_f$，为摩擦力所做的功.所以 $-fL=(mgh_2-mgh_1)+(0-0)$，f 为平均摩擦力，$L=400$ cm 是导线从 A 到 C 间的长度，而且已知在 A 和 C 点的动能为零.代入所有已知的值，得到 $f=147\ \text{dyn}=1.47\times10^{-3}$N.

7.104 一辆汽车沿水平道路从静止开始经加速一直到动能为 K.(a)忽略空气阻力，求使汽车加速的外力所做的功，(b)(a)中的结果符合能量守恒定律吗？

解 ☞ (a)作用在汽车上的外力如图 7-24 所示.静外力为 f_1+f_2(路面对车轮的静摩擦力之和).该静外力使汽车加速 $f_1+f_2=Ma_{cm}$，其中 a_{cm}是汽车重心的加速度.因为轮子瞬时与地面接触的点相对于路面没有运动(不刹车的情况下)，所以力 f_1 和 f_2 不做功.所以 $W=0$.

(b)若系统不受外力做功，那么动能来自哪里？我们可以说是由于"内部的功"W'，使得 $\Delta K=K-0=W'$.更确切的说，W' 是来自于"内部的能量"Φ(汽油燃烧产生的能量).因此可以把能量守恒写成 $\Delta K+\Delta\Phi=0$.[尽管 f_1 和 f_2 对汽车不做功，但我们可以通过计算 f_1+f_2 与汽车移动的距离的乘积求得汽车动能的增加.]

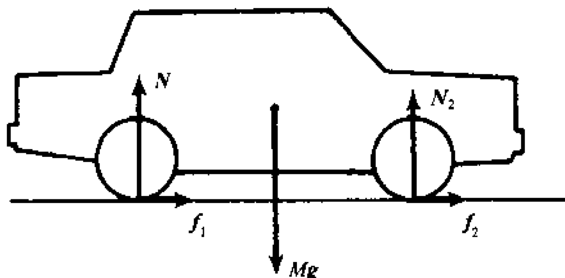


图 7-24

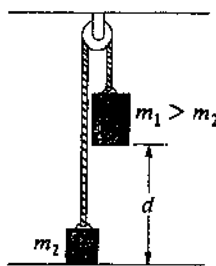


图 7-25

7.105 若两物体从图 7-25 所示的位置释放，(a)求 m_1 落到地面前两物体速度的表达式.忽略滑轮的质量与摩擦，(b)若 m_1 在图中所示的位置有一向下的速度 v_0，再次求物体速度的表达式.

解 ☞ (a)开始时 m_1 的重力势能 = 最后 m_2 的重力势能 + m_1 和 m_2 的动能，所以 $m_1gd=m_2gd+(m_1+m_2)v^2/2$.解得 $v=[2(m_1-m_2)gd/(m_1+m_2)]^{1/2}$.(b)开始时动能 $K=(m_1+m_2)\cdot v_0^2/2$，加到能量方程中得到最终的速度 $v=[2(m_1-m_2)gd/(m_1+m_2)+v_0^2]^{1/2}$.

7.106 在图 7-26 中，弹簧都处于原长.若物体移动 20 cm 到达 B 点再释放，(a)求物体经过 A 点的速度，(b)物体向左能走多远再停止.

解 ☞ (a)由(B 点弹簧的势能)=(A 点物体的动能)得到：$[8(0.04)]/2+[5(0.04)]/2=4.0\,v^2/2$，所以 $v=0.36$ m/s.(b)物体到达 A 点左侧 20 cm 处所有的能量转变成弹性势能.

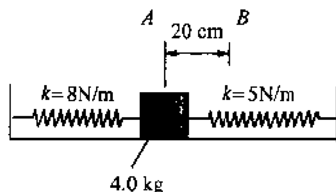


图 7-26

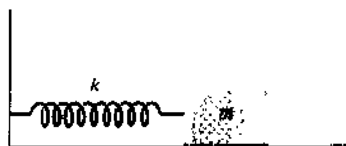


图 7-27

7.107 如图7-27所示,水平桌面上静止放有质量为 m 的滑块.滑块与桌面的静摩擦因数和滑动摩擦因数分别为 μ_s 和 μ_k.滑块与一质量可忽略且劲度系数为 k 的弹簧相连.开始时滑块静止弹簧处于原长.现突然击打滑块,从滑块以 v_0 的速度向右滑动.求滑块停止向右滑动之前运动了多远?

解 ☞ 用 x 表示滑块的位置($x>0$,弹簧伸长).开始时 $x=x_0=0$ 且 $v=v_0$.所以系统的初始能量为 $\frac{1}{2}mv_0^2$.当向右运动停止,$x=x_M$ 且 $v=0$,机械能等于 $\frac{1}{2}kx_M^2$.在向右运动中由于摩擦力做负功,机械能减少.所以 $\frac{1}{2}kx_M^2=\frac{1}{2}mv_0^2-\mu_k mg|x_M-x_0|=\frac{1}{2}mv_0^2-\mu_k mgx_M$.求解关于 x_M 的二次方程式且舍去负根,得到

$$x_M=\sqrt{\left(\frac{\mu_k mg}{k}\right)^2+\frac{mv_0^2}{k}}-\frac{\mu_k mg}{k}$$

7.108 根据7.107题,求出一个标准来判断滑块是向左运动还是仅仅停在最大位移处.当 $m=10$ kg, $k=100$ N/m, $\mu_s=0.30$, $\mu_k=0.15$ 以及 $v_0=1.0$ m/s.判断结果.

解 ☞ 最大静摩擦力为 $\mu_s mg$.若该力等于或者大于向左的回复力 kx_M,滑块就静止在 $x=x_M$.也就是说,当 $kx_M\leqslant\mu_s mg$,滑块保持在 $x=x_M$.如果 $kx_M>\mu_s mg$,滑块就会向回滑动.当 $m=10$ kg, $k=100$ N/m, $\mu_s=0.30$, $\mu_k=0.15$ 以及 $v_0=1.0$ m/s,得到

$$x_M=\sqrt{\left[\frac{(0.15)(10)(9.8)}{(100)}\right]^2+\frac{(10)(1.0)^2}{(100)}}-\frac{(0.15)(10)(9.8)}{(100)}$$
$$=0.3487-0.1470=0.202(\text{m})$$

所以回复力 $kx_M=20.2$ N,而最大静摩擦力 $\mu_s mg=29.4$ N,所以滑块静止在 $x=x_M$ 的位置.

7.109 如图7-28所示,一根光滑杆水平固定在桌面上方.一个10 kg的圆环,可以在杆上做无摩擦滑动.圆环与弹簧相连且弹簧的另一端固定在支点 O.弹簧的质量可以忽略,原长为10 cm且劲度系数为500 N/m.圆环从 S 点由静止开始释放.(a)求圆环经过 A 点的速度,(b)圆环经过 B 点的速度.

解 ☞ 设劲度系数,弹簧的原长以及圆环的质量分别为 k, l_0 以及 m.设 v_i 和 l_i 分别代表初始时刻圆环的速度和弹簧的长度;v 和 l 代表其它时刻圆环的即时速度和弹簧的长度.根据机械能守恒 $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2=\frac{1}{2}mv_i^2+\frac{1}{2}k(l_i-l_0)^2$.因为 $v_i=0$,所以

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}}\left[(l_i-l_0)^2-(l-l_0)^2\right]^{1/2}$$

根据图7-28

$$l_i=\sqrt{(0.20)^2+(0.15)^2}=0.25(\text{m})$$

(a)圆环经过 A 点,$l=l_A=0.20$ m.由于 $l_0=0.10$ m, $k=500$ N/m, $m=10$ kg,得

$$U_A=\sqrt{\frac{500}{10}}\left[(0.25-0.10)^2-(0.20-0.10)^2\right]^{1/2}=\sqrt{50}\sqrt{0.0225-0.0100}$$
$$=0.791(\text{m/s})$$

(b) 圆环经过 B 点,$l=l_B=\sqrt{(0.20)^2+(0.10)^2}=0.2236$ m.所以

$$u_B=\sqrt{50}\left[(0.15)^2-(0.1236)^2\right]^{1/2}=0.601\ (\text{m/s})$$

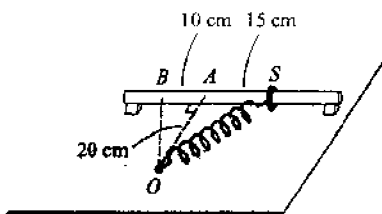


图7-28

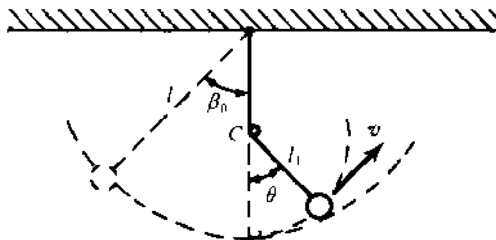


图7-29

7.110 图 7-29 表示长 l 的摆挂在一小钉 C 的竖直上方 $l-l_1$ 处.设摆球初始放在角 β_0 的位置且从静止开始释放.求小球沿半径为 l_1 的圆周运动,且与竖直方向成 θ 角时小球的速度.

解 ☞ 绳上的拉力在小球运动中对小球不做功.只有重力对小球做功.把路径中的最低点作为重力势能的参考点.在图中小球的势能为 $mgl_1(1-\cos\theta)$.因为小球从静止释放初始势能为 $mgl(1-\cos\beta_0)$,能量守恒表达式为 $0+mgl(1-\cos\beta_0)=\frac{1}{2}mv^2+mgl_1(1-\cos\theta)$,解出

$$v=\{2g[l(1-\cos\beta_0)-l_1(1-\cos\theta)]\}^{1/2}$$

7.111 重 W 的物体通过长为 d 的缆绳系在起重机弯曲的杆上[见图 7-30(a)].该起重机与重物以恒定速度 v_0 前进.当起重机被一阻碍物挡住,缆绳上的物体摆出去如图 7-30(b)所示.(a)求物体摆出去的角度,(b)若角度 θ 为 60°且 $d=5$ m,求起重机的初始速度.

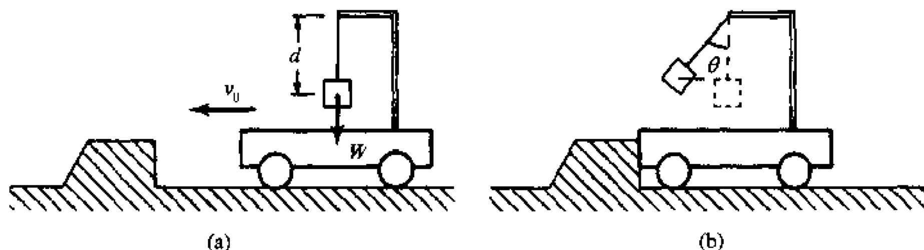


图 7-30

解 ☞ (a)缆绳对物体不做功,所以物体的能量守恒.

$$K_i+U_i=K_f+U_f,\quad \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_0^2+0=0+W(d-d\cos\theta)$$

$$v_0^2=2gd(1-\cos\theta)=4\,gd\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \theta=2\arcsin\left(\frac{v_0}{2\sqrt{gd}}\right)$$

(b)
$$v_0=2\sqrt{gd}\sin\frac{\theta}{2}=2\sqrt{(9.8)(5)}\left(\frac{1}{2}\right)=7\ (\text{m/s})$$

7.112 沿 x 方向的力 $F_x=(21-3x)$N 使物体从 $x=0$ 运动到 $x=7$ m.(a)求力所做的功,(b)若物体从 $x=0$ 到 $x=14$ m,求力所做的功.

解 ☞ 运用积分或 $F-x$ 曲线所包围的面积求得,如图 7-31 所示.(a)功(面积 1)=73.5 J.(b)因力改变符号,所以功(面积 2)为负.曲线围成的所有面积和所做总功为零.

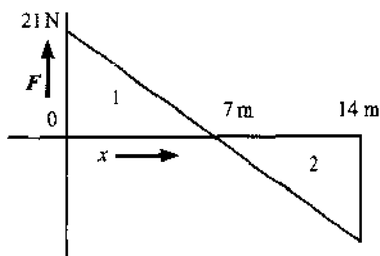


图 7-31

7.113F[c] 质量为 m 的粒子受到沿 x 轴方向的力 $F_x=(3.0+0.50x)$N.求当粒子从 $x=0$ 到 $x=4.0$ m 力所做的功.

解 ☞ 功 $=\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^4(3+0.50x)dx=[3x+0.25\,x^2]_0^4=16$ J.(也可以像7.112题那样用几何的方法求解.)

7.114[c] 一光滑的轨道是竖直平面内半径为 6 m 的四分之一圆周(见图 7-32).重 4 N 的粒子在 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用下从 P_1 运动到 P_2.力 $\boldsymbol{F}_1$ 始终指向 P_2 且大小为 20 N;力 $\boldsymbol{F}_2$ 始终沿水平方向且大小为 30 N;力 $\boldsymbol{F}_3$ 沿轨道的切线方向且大小为$(15-10\,s)$N,s 的单位是米.若粒子在 P_1 点速度为 4 m/s,则在 P_2 点速度为多少?

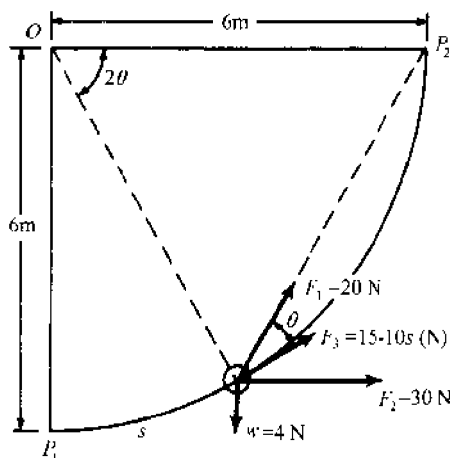


图 7-32

解 ☞ 力 $\boldsymbol{F}_1$ 做功 $W_1=\int_{P_1}^{P_2} F\cos\theta \mathrm{d}s$

由图 7-32, $\mathrm{d}s=(6m)\mathrm{d}(-2\theta)=-12\ \mathrm{d}\theta$, $F_1=20$. 所以,

$$W_1=-240\int_{\pi/4}^{0}\cos\theta \mathrm{d}\theta=240\sin\frac{\pi}{4}=120\sqrt{2}(\mathrm{J})$$

$W_1=(20\mathrm{N})(6\sqrt{2}\mathrm{m})$, 好像积分的路径沿弦 P_1P_2 而不是圆弧. 这是由于 $\boldsymbol{F}_1$ 是保守力, 对于保守力沿两点间的任意路径做功均相等. $\boldsymbol{F}_3$ 做的功为

$$W_3=\int F_3\mathrm{d}s=\int_0^{6(\pi/2)}(15-10s)\mathrm{d}s=[15s-5s^2]^{3\pi}=-302.8\ \mathrm{J}$$

为计算 $\boldsymbol{F}_2$ 和 w 所做的功, 较简便的方向是把路径在力的方向上投影, 而不是反过来. 所以

$$W_2=F_2(\overline{0P_2})=30(6)=180(\mathrm{J}),\ W=(-w)(\overline{P_10})=(-4)(6)=-24(\mathrm{J})$$

总功为 $W_1+W_3+W_2+W=23$ J. 根据动能定理,

$$K_{P_2}-K_{P_1}=23\ \mathrm{J},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9.8}\right)v_2^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9.8}\right)(4)^2=23,\quad v_2=11.3\ \mathrm{m/s}$$

7.115[c] 在 7.114 题中, 粒子仅仅在四个力的作用下运动吗? 为什么?

解 ☞ 不是, 必须有径向的力提供必要向心力. 例如, 在 P_1 点所需的向心力为 $\frac{mv^2}{r}=\frac{(4/9.8)(4)^2}{6}=1.09(\mathrm{N})$, 其中 $F_1\cos45°-W=10.14$ N.

7.116[c] 求一以牛顿为单位的力 $F_x=5.0x-4.0$ 使粒子从 $x=1.0$ m 运动到 $x=3.0$ m 所做的功.

解 ☞ $W=\int F_x\mathrm{d}x=\int_{1.0}^{3.0}(5.0x-4.0)\mathrm{d}x=[2.5x^2-4.0x]_{1.0}^{3.0}=12(\mathrm{J})$

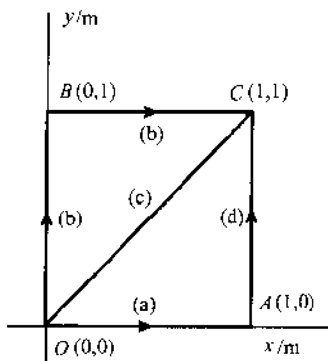


图 7-33

7.117[c] 一作用在粒子上的力随粒子在 xy 平面内位置的变化而变化. 该力单位为牛顿, 表达式为 $\boldsymbol{F}_2=(xy\hat{\boldsymbol{x}}+xy\hat{\boldsymbol{y}})(1\mathrm{N/m^2})$, 其中 x 和 y 的单位是 m. 计算粒子从 0 点到 C 点力所做的功 $\int_O^C \boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, 如图 7-33 所示 (a)沿路径 OAC, 由两线段组成, (b)沿路径 OBC, 由两线段组成, (c)沿线段 OC, (d) $\boldsymbol{F}_2$ 是保守力吗? 为什么?

解 ☞ 对于每个从 O 到 C 的路径, F_2 做功都是

$$W = \int_O^c \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

其中 $\boldsymbol{F}_2 = xy\hat{x} + xy\hat{y}$ 以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \hat{x}\mathrm{d}x + \hat{y}\mathrm{d}y$. 标积 $\boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = xy\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$.

(a)路径 OAC 由线段 OA 和 AC 组成. 沿 OA, $y=0$ 以及 $\mathrm{d}y=0$, 所以

$$\int_{OA} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

沿 AC, $x=1$ m 以及 $\mathrm{d}x=0$, 所以 $\boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = y\mathrm{d}y$, 所以

$$\int_{AC} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 y\mathrm{d}y = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{J})$$

所以沿路径 OAC 的总功为

$$W_{OAC} = \int_{OA} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{AC} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{J} = \frac{1}{2}\mathrm{J}$$

(b)路径 OBC 由线段 OB 和 BC 组成. 沿 OB, $x=0$ 且 $\mathrm{d}x=0$,

所以 $\int_{OB} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$. 沿 BC, $y=1$ m 以及 $\mathrm{d}y=0$, 所以 $\boldsymbol{F}_2 . \mathrm{d}\boldsymbol{s} = x\mathrm{d}x$. 所以

$$\int_{BC} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{J})$$

所以沿路径 OBC 的总功为

$$W_{OBC} = \int_{OB} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{BC} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{J} = \frac{1}{2}\mathrm{J}$$

(c)沿直线段 OC, $y=x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ 以及 $\boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = xy\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 2x^2\mathrm{d}x$.

所以 $$W_{OC} = \int_{OC} \boldsymbol{F}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}(\mathrm{J})$$

(d)因为 $\boldsymbol{F}_2$ 做功与两点间的路径有关, 所以 $\boldsymbol{F}_2$ 是非保守力.

7.118[c] 求距离地球中心距离 $r \geqslant R_e$ 处的重力势(单位质量的 GPE).

解 ☞ 根据定义, 该重力势是把 1 kg 的物体以恒定的速度从给定的位置 r 运动到无穷远处(沿任意路径)重力所做的功. 选取沿径向的路径,

$$GP = \int_r^\infty \left[-\frac{GM_e(1)}{s^2}\right]\mathrm{d}s = -\frac{GM_e}{r}$$

7.119[c] 保守力和与之相关的势能之间的联系如何表示?

解 ☞ 若力 $\boldsymbol{F}$ 可以通过位置 U 的函数关系得到

$$F_s = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} \tag{1}$$

则该力是保守力. 这里 F_s 是力在 $\mathrm{d}s$ 方向的分量, $\mathrm{d}s$ 是从观察点出发的任意小的位移. 这是从保守力做功等于 U 函数变化的负值得到的:

$$W_{AB} = \int_A^B F_s\mathrm{d}s = -(U_B - U_A)$$

写成微分形式为 $\mathrm{d}U = -F_s\mathrm{d}s$. 功 W_{AB} 与连接 A、B 两点的路径无关; 对于一个闭合路径, 该功等于零. 非保守力做的功(如滑动摩擦力)与两端点间的路径有关.

7.120[c] 计算与下列一维势能相关的力 $F(y)$: (a) $U = -wy$, (b) $U = ay^3 - by^2$, (c) $U = U_0\sin\beta y$.

解 ☞ (a) $$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = w$$

(b) $$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = -3ay^2 + 2by$$

(c) $$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} = -\beta U_0\cos\beta y$$

7.121[c] 某粒子的势能为 $U = 20x^2 + 35z^3$. 求作用在该粒子上的力矢量.

解 ☞ $F_x = -\partial U/\partial x = -40x$, $F_y = -\partial U/\partial y = 0$, $F_z = -\partial U/\partial z = -105z^2$; 所以 $\boldsymbol{F} =$

$-40xi - 105z^2\boldsymbol{k}$.

7.122[c] 一粒子在一保守力场中势能为 $U=20xy/z$.求作用在粒子上的矢量力.

解 ☞ $F_x=-20y/z$, $F_y=-20x/z$, $F_z=20xy/z^2$. 所以 $\boldsymbol{F}=(20y/z)\boldsymbol{i}-(20x/z)\boldsymbol{j}+(20xy/z^2)\boldsymbol{k}$.

7.123[c] 力 $\boldsymbol{F}=x^2y^2\boldsymbol{i}+x^2y^2\boldsymbol{j}(N)$作用在粒子上使之在 xy 面内运动.(a)判断 $\boldsymbol{F}$ 是否是保守力,(b)求粒子分别沿 ABC, ADC 和 AC 从 A 到 C 点力 $\boldsymbol{F}$ 做的功.

解 ☞ (a)若 F 是保守力,则

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial F_x}{\partial y}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

但对给出的力, $\frac{\partial Fx}{\partial y}=2x^2y$, $\frac{\partial Fy}{\partial x}=2xy^2$

所以该力不是保守力.

(b)$\boldsymbol{F}$ 做功等于

$$W=\int\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int(x^2y^2\boldsymbol{i}+x^2y^2\boldsymbol{j})\cdot(dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j})=\int x^2y^2dx+\int x^2y^2dy$$

沿 AB, $y=0$ 所以 $W_{AB}=0$. 沿 BC, $dx=0$, $W_{BC}=\int_0^a a^2y^2dy=\frac{a^5}{3}$

所以 $$W_{ABC}=W_{AB}+W_{BC}=\frac{a^5}{3}\text{J}$$

沿 AD, $x=0$, 所以 $W_{AD}=0$. 沿 DC, $dy=0$. 且 $W_{DC}=\int_0^a x^2a^2dx=\frac{a^5}{3}$

所以 $$W_{ADC}=W_{AD}+W_{DC}=\frac{a^5}{3}\text{J}$$

沿 AC, $x=y$ 且 $dx=dy$. 所以

$$W_{AC}=2\int_0^a x^4dx=\frac{2a^5}{5}\text{J}$$

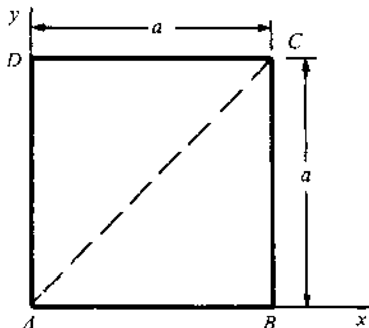


图 7-34

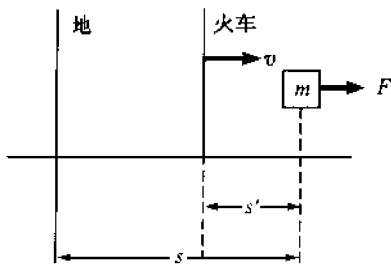


图 7-35

7.124[c] 一质量为 m 的滑块静止放在火车上的光滑桌面上.火车以 v_c 的速度沿平直轨道运动(如图7-35).一乘客用水平力 F 推动滑块沿火车运动的方向移动的时间为 t.(a)相对于火车上的人滑块的末速度为多大?(即相对于桌面的速度)(b)相对于站在火车外的人滑块的末速度有多大?(即相对于地面的速度)(c)相对于车内的人滑块的动能变化了多少?(d)相对于地面上的人滑块的动能变化了多少?(e)用 F、m 和 t 表示相对于车内的人该力使物体移动的位移?(f)相对于地面上的人呢?(g)两种情况下力做功各为多少?(h)在两种情况下比较做的功和获得的动能.(i)从此计算中可以得出什么结论?

解 ☞ 以火车为基本坐标系.

(a)$a'=F/m$,所以 $v'=a't=Ft/m$.(b)速度相加, $v=v_c+v'=v_c+Ft/m$.(c)$\Delta K'=m(v')^2/2=F^2t^2/2m$.(d)$\Delta K=m(v_c+v')^2/2-mv_c^2/2=F^2t^2/2m+v_cFt$.(e)$s'=a't^2/2=Ft^2/2m$.(f)$s=s'+$

$v_c t = Ft^2/2m + v_c t$.(g) $W' = \int F\mathrm{d}s' = \int Fv'\mathrm{d}t = \int F^2 t\mathrm{d}t/m = F^2t^2/2m$,而 $W = \int F\mathrm{d}s = \int Fv\mathrm{d}t$;从(b)中可知,$W = F^2t^2/2m + Fv_c t$.(h) 把 W 与 ΔK 及 W' 与 $\Delta K'$ 比较得 $W = \Delta K$, $W' = \Delta K'$.(i) 对于运动的观察者而言,动能定理仍成立.[(g) 由 $W' = Fs'$, $W = Fs$ 以及(e)、(f) 直接得到.]

第八章　功率和简单机械

8.1 功　率

8.1 什么是功率?

解 ☞ 功率就是做功的效率:

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=Fv\cos\theta$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别是瞬时力和瞬时速度,θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角.如果功率不随时间变化,$P=\frac{W}{t}$.

功率的单位是焦耳/秒或者瓦特 1 W=1 J/s=1 $\mathrm{kg\cdot m^2/s^3}$.功率的另一个单位是马力;1 hp=550 ft·lbf/s=746 W.

8.2 计算把一个重 150 kg 的圆筒在 1 min 内升高 20 m 的平均功率是多少马力?

解 ☞ $\bar{P}=W/t$=平均功率,W 是在 t 时间内做的功.$W=(150\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(20\ \mathrm{m})=29400$ J,$t=60$ s,所以 $\bar{P}=490$ W.又因为 1 hp=746 W,所以 $\bar{P}=(490\ \mathrm{W})/(746\ \mathrm{W/hp})=0.657$ hp.

8.3 一拖拉机以 3.0 m/s 的速度行进时受到恒定的牵引力为 14 kN.则此时拖拉机在该条件下产生的功率是多少千瓦?多少马力?

解 ☞ 功率等于力与速度在力的方向上分量的乘积.

$$P=(14\mathrm{kN})(3.0\ \mathrm{m/s})=42.0\ \mathrm{kW}=(42.0\ \mathrm{kW})\left(\frac{1\ \mathrm{hp}}{0.746\ \mathrm{kW}}\right)=56.3\ \mathrm{hp}$$

8.4 重 4t(4000 kg)的打桩机铁锤 2 s 内被提升 1 m.求发动机提供给铁锤的功率.设铁锤在上升过程中没有加速度.

解 ☞ $P=\frac{W}{t}=\frac{Fs}{t}=\frac{mgs}{t}=\frac{(4.0\times10^3)(9.8)(1.0)}{2.0}=19.6(\mathrm{kW})$

8.5 当船以 20 m/s 的速度被拖动时,拖绳上的拉力为 6 kN.求拖绳拖船的功率.

解 ☞ $P=Fv=(6\times10^3)(20)=120(\mathrm{kW})$

8.6 每千瓦·小时需要 8 美分,一功率是 5.0 hp 的发动机工作 2.0 小时耗资多少?

解 ☞ 耗资 $=(0.08)(5.0)(746\times10^{-3})(2.0)=0.60$ 美元

8.7 计算一台机器把 500 kg 的物体在 60s 内升高 20 m 所消费的功率.

解 ☞ $P=\frac{mgh}{t}=\frac{(500\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(20\ \mathrm{m})}{60\ \mathrm{s}}=1.63\ \mathrm{kW}$

8.8 发动机功率为 40 hp 时使小车沿水平路线以 15 m/s 的速度前进.求作用在小车上的阻力有多大?

解 ☞ 发动机做的正功刚好与阻力 f 做的负功抵消.所以发动机的牵引力与 f 大小相等.根据 $P=Fv$,并使单位一致,$(40\ \mathrm{hp})(746\ \mathrm{W/hp})=F(15\ \mathrm{m/s})$,$F=f=2.0$ kN

8.9 一辆重为 1000 kg 的汽车以 20 m/s 的速度沿倾斜度为 0.03 的斜面向上行驶.若不计摩擦,求所需的功率?以马力为单位.

解 ☞ 因汽车动能不变,故功率应等于重力势能增加的速率.由 $P=mg(\Delta h/\Delta t)$ 而 $\Delta h/\Delta t=v\sin\theta$,$v$ 是沿斜面的速度,θ 是斜面的角度.所以 $P=(1000\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})(20\ \mathrm{m/s})(0.03)=5.88$ kW.利用 0.746 kW=1 hp 得 $P=7.88$ hp.

8.10 一架重 30000 kg 的飞机起飞时速度为 50 m/s,5 min 后飞机的高度为 3 km,速度为 100 m/s.如果 40%的功率用于克服阻力,则 5 min 内需要的平均功率为多少?

解 ☞ 飞机 300 s(5 min)内增加的能量为

$$(PE+KE)_{空中}-KE_{地面}=(30000\times 9.8\times 3000)+\frac{1}{2}(30\,000)(100)^2$$

$$-\frac{1}{2}(30000)(50)^2=882\times 10^6+150\times 10^6$$

$$-37.5\times 10^6=994.5(\text{MJ})$$

$$0.6P=\frac{994.5\ \text{MJ}}{300\ \text{s}},\qquad P=5.525\ \text{MW}$$

8.11 一广告称一种重为 1200 kg 的汽车能在 8.0 s 内速度加速至 25 m/s. 忽略阻力,要产生这样的加速度,发动机的平均功率应为多大?

解 ☞ 对汽车做的功 = 汽车动能的增加 = $\frac{1}{2}mv_f^2$,做功的时间为 8 s. 所以

$$功率=\frac{功}{时间}=\frac{\frac{1}{2}(1200\ \text{kg})(25\ \text{m/s})^2}{8\ \text{s}}=46.9\ \text{kW}=(46.9\ \text{kW})\left(\frac{1\ \text{hp}}{0.746\ \text{kW}}\right)=63\ \text{hp}.$$

8.12 一效率为 90% 的电动机带动一效率为 40% 的起重机工作. 若电动机的功率是5 kW,则起重机以多大的速度升起重 880 lb 的货物?

解 ☞ 总效率 = (40%)(90%) = 36%　有用功率 = (0.36)(5kW) = 1.8kW

$$速度=\frac{有用功率}{力(重力)}=\frac{(1.8\ \text{kW})(1\ \text{hp}/0.746\ \text{kW})(550\ \text{ft}\cdot\text{lbf}\cdot\text{s}^{-1}/1\text{hp})}{880\ \text{lbf}}=1.51\ \text{ft/s}$$

8.13 从船上下载谷物时,升降机把谷物升高 12 m. 谷物在升降机顶部卸下的速度为每秒 2.0 kg,且卸下时谷粒的速度为 3.0 m/s. 求升降机的发动机功率至少为多少马力?

解 ☞ 电动机每秒做功为 $P=mgh+\frac{1}{2}mv^2$

其中 m 是每秒卸下的谷物的质量. 已知 $m=2.0$ kg, $v=3.0$ m/s, $h=12$ m. 代入公式得 $P=244$ W $=0.33$ hp. 发动机输出的功率至少为 0.33 hp.

8.14 水流从水库流向下方 330 ft 处的涡轮机. 涡轮机的效率是 80%,每分钟流过的水为 100 ft^3. 忽略管子内摩擦和水流出时很小的动能,求涡轮机输出的功率是多少马力? 水的密度为 62.4 lb/ft^3.

解 ☞ 每分钟输入到涡轮机上的重力势能来自于 330 ft 高处的 100 ft^3 的水:

$$P_{输入}=(62.4\ \text{lb/ft}^3)(100\text{ft}^3)(330\text{ft})/(60\ \text{s})$$

$$=(34320\ \text{ft}\cdot\text{lbf}\cdot\text{s}^{-1})\left(\frac{1\ \text{hp}}{550\ \text{ft}\cdot\text{lbf}\cdot\text{s}^{-1}}\right)=62.4\ \text{hp}$$

因为涡轮机的效率是 80%,所以 $P_{输出}=0.8P_{输入}=49.9$ hp.

8.15 若小车与地面间的摩擦因数为 0.15,现功率为 40 hp 的发动机带动小车以15m/s速度在水平路面上运动,求小车的质量为多少千克?

解 ☞ 因为路面水平且小车速度恒定,发动机消耗的能量都转化为热能,也就是等于 $|W_f|$. 其中 W_f 是摩擦力做的功. $W_f=-\mu mgx$,其中 $\mu=0.15$, x 是沿水平方向移动的距离. 那么功率 $P_{发动机}=|P_f|=|-\mu mgv|$,即 $(40\ \text{hp})(746\ \text{W/hp})=0.15(9.8\ \text{m/s}^2)(15\ \text{m/s})m$. 解之得 $m=1353$ kg.

8.16 一辆重 2400 lb 的汽车在水平路面上克服阻力以 110 ft/s 的速度行驶时需要的功率为 50 hp. 求汽车受到的阻力. 若功率和阻力保持不变,当路面斜度为 5%,即每 100 ft 升高 5 ft 时,求该车的速度.

解 ☞ $P=fv$; $50\times 550=f(110)$, $f=250$ lbf. 在斜度为 5% 时,阻力(含重力)为 250 lbf + (0.05×2400)lbf = 370 lbf. 现在 $(50\times 550)=370\ v$; $v=(74.3\ \text{ft/s})(60\ \text{mi/h})(88\ \text{ft/s})=50.7$ mi/h.

8.17 有人把一 100 kg 的木块以 0.50 m/s 的速度拖到山坡上. 若山坡与水平面的夹角为 20°,山坡的摩擦系数为 0.9,求人对木块的功率.

解 ☞ 该题中物体动能不变,重力做正功. 根据功能关系: $W_人+W_f=\Delta U$,其中 $W_f=$

$\mu mgL\cos\theta$, $\Delta U = 0 - mgL\sin\theta$, L 是沿斜坡运动的距离，θ 是斜坡的倾角．设木块运动的速度为 v，所以功率 $P_入 = \mu mgv\cos\theta \quad mgv\sin\theta = (100\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(0.5\ \text{m/s})(0.9\cos 20° - \sin 20°)$, $P_入 = 247\ \text{W}$.

8.18 抽水机通过水管源源不断地抽水．如果水通过管口的速度为 v，水流离开管口时单位长度的质量为 k，求水流获得动能的速率．

解 ☞ 在一段很短的时间 Δt 内，流出水的质量为 $k(v\Delta t)$，水获得的动能为 $\frac{1}{2}(kv\Delta t)v^2$．水流获得动能的速率为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}kv^3\Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{2}kv^3$

8.2 简单机械

8.19 什么是机械？机械遵循什么能量规律？

解 ☞ 所谓机械是指为了方便而改变力的大小、方向或应用方式的装置．简单机械包括杠杆，斜面，滑轮，曲轴和螺旋起重机（千斤顶）．

连续运转的机械遵循的能量规律是：输入功＝有用输出功＋摩擦损耗的功．

8.20 定义机械的机械效益．

解 ☞ 机械的实际机械效益（AMA）

$$\text{AMA} = 力的比值 = \frac{机械对重物的作用力}{使用机械所用的力}$$

机械的理想机械效益（IMA）

$$\text{IMA} = 距离比值 = \frac{使用机械的力移动的距离}{重物移动的距离}$$

因为摩擦力的存在，AMA 总是小于 IMA．

8.21 什么是机械效率？

解 ☞ $机械效率 = \dfrac{输出功}{输入功} = \dfrac{输出功率}{输入功率} = \dfrac{(力\times 距离)_{重物}}{(力\times 距离)_{输入}}$

机械效率也等于 AMA/IMA 的值．（见 8.20 题）

8.22 起重机在 20 s 内把 3000 kg 的重物升高 8 m．发动机的功率为 18 hp．计算（a）输出功，（b）输出功率和输入功率，（c）发动机和起重系统的效率．

解 ☞ (a) 输出功＝(拉力)×(高度)＝$[(3000\times 9.8)\text{N}](8\text{m}) = 235000\ \text{J} = 235\ \text{kJ}$．

(b) $输出功率 = \dfrac{输出功}{所需时间} = \dfrac{235\ \text{kJ}}{20\ \text{s}} = 11.8\ \text{kW}$

$输入功率 = (18\ \text{hp})\left(\dfrac{0.746\ \text{kW}}{1\ \text{hp}}\right) = 13.4\ \text{kW}$

(c) $效率 = \dfrac{输出功率}{输入功率} = \dfrac{11.8\ \text{kW}}{13.4\ \text{kW}} = 0.88 = 88\%$ 或

$效率 = \dfrac{输出功}{输入功} = \dfrac{235\ \text{kJ}}{(13.4\ \text{kJ/s})(20\text{s})} = 0.88 = 88\%$

8.23 一发动机开足马力时输出功率为 12 hp，若该发动机效率为 90%，求该发动机的输入功率是多少千瓦？

解 ☞ 根据效率的定义（8.21 题），

$$输入功率 = \frac{输出功率}{效率} = \frac{(12\ \text{hp})(0.746\ \text{kW/hp})}{0.90} = 9.95\ \text{kW}$$

8.24 一 IMA 为 4 的滑轮组只需 15 N 的力就能拉起 50 N 的重物．求机械效率．

解 ☞ $\text{AMA} = \dfrac{F_出}{F_入} = \dfrac{50}{15} = 3.33 \quad 效率 = \dfrac{\text{AMA}}{\text{IMA}} = \dfrac{3.33}{4} = 0.83 = 83\%$

8.25 某人用滑轮组把 150 lbf 的重物拉起 10 ft．若他拉绳子的力为 50 lbf 且使绳子拉动了 35 ft，求（a）他做了多少功？（b）该滑轮组的机械效率．

解 ☞ (a) 人做的功为 $W = Fs = 50(35) = 1750(\text{ft}\cdot\text{lbf})$

(b) $W_{出}=F_{出}d_{出}=150(10)=1500(\text{ft·lbf})$　效率 $=\frac{W_{出}}{W_{入}}=\frac{1500}{1750}=0.86=86\%$

8.26 若在8.25题中，某人用11 s拉起该物体，求平均功率.

解 ☞ 平均功率 $=\frac{W}{t}=\frac{1750}{11}=159\ \text{ft·lbf/s}$　$\frac{159}{550}\text{hp}=0.289\ \text{hp}$

8.27 水平推动一木楔举起一重物.所有表面都光滑，运用能量守恒定律用楔角 θ 表示机械的实际效率.

解 ☞ 如图8-1所示，设物体在固定的竖直面内上升.如果楔在 F 的作用下向左运动 Δs，物体上升的距离为 $\Delta h=(\Delta s)\tan\theta$.根据能量守恒有 $F\Delta s=mg\Delta h$，所以它的实际效率为 $mg/F=\Delta s/\Delta h=\cot\theta$.

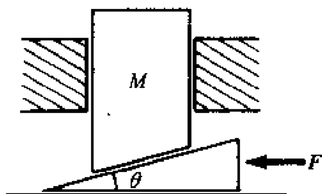


图8-1

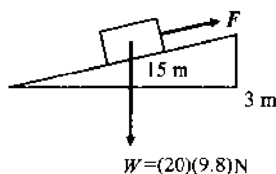


图8-2

8.28 图8-2中的斜面长15 m高3 m.(a)若不计摩擦，要把20 kg的盒子推到斜面上需要多大的平行于斜面的力 F？(b)求该平面的IMA.(c)要实际需要的力为64 N，求斜面的AMA和效率.

解 ☞ (a)因为不计摩擦，推力所做的功$(F)(15\ \text{m})$等于GPE的增加$(20\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(3\ \text{m})$.由这两等式相等解得 $F=39$ N.

(b)　$\text{IMA}=\frac{F\ \text{移动的距离}}{w\ \text{升高的距离}}=\frac{15\text{m}}{3\text{m}}=5.0$

(c)　$\text{AMA}=\text{力的比值}=\frac{W}{F}=\frac{196\text{N}}{64\text{N}}=3.1$

$\text{效率}=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{3.1}{5.0}=0.62=62\%$

或作为检验，$\text{效率}=\frac{\text{输出功}}{\text{输入功}}=\frac{(W)(3\text{m})}{(F)(15\text{m})}=0.62=62\%$

8.29 运用图8-3所示轮轴，可由作用在轮边缘的50 N的力升起400N的重物.轮和轴的半径分别是85 cm和6 cm，求该机械的IMA，AMA以及效率.

解 ☞ 轮轴转动一周，轮上的绳子会松开等于轮子周长的长度，而轴上的绳子会绕起等于轴的周长的长度.所以

$\text{IMA}=\frac{F\ \text{移动的距离}}{W\ \text{移动的距离}}=\frac{2\pi R}{2\pi r}=\frac{85\ \text{cm}}{6\ \text{cm}}=14.2$

$\text{AMA}=\text{力的比}=\frac{400\ \text{N}}{50\ \text{N}}=8$

$\text{效率}=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{8}{14.2}=0.56=56\%$

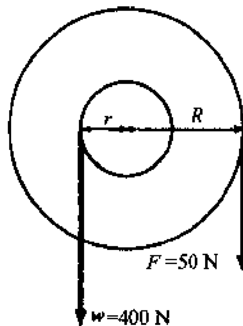


图8-3

8.30 有一传动机械如图8-4所示.(a)若不计摩擦，当下面齿轮的半径等于上方齿轮半径的 N 倍时，求机械效率(b)当 $N=3.0$，$R=40$ cm，$r=5.0$ cm时计算出具体结果.

解 ☞ (a)若力 F 作用的距离 $\Delta s=2\pi R$，上方的齿轮转过 2π.所以下方的齿轮转过 $2\pi/N$，且质量为 M 的物体被拉升了 $\Delta h=2\pi r/N$.因为 $Mg\Delta h=F\Delta s$，所以效率为 $Mg/F=\Delta s/\Delta h=2\pi R\div(2\pi r/N)=NR/r$.(b)当 $N=3.0$，$R=40$ cm，$r=5.0$ cm，得到 $NR/r=(3.0)(40)/(5.0)=24$.

8.31 一种与众不同的滑轮(链式起重机)如图8-5所示.两半径分别为 $r=10$ cm，$R=11$ cm的有齿滑轮固定在一起且绕同一个轴转动.一根链条先绕过较小的(10 cm)定滑轮然

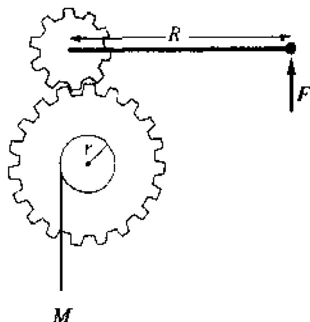


图 8-4

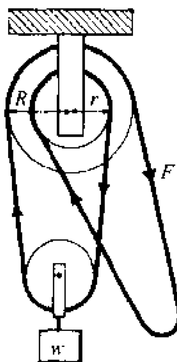


图 8-5

后绕过下方的动滑轮,最后经过半径为 11 cm 的定滑轮.操作者用一向下的力 F 拉动重为 W 的物体.(a)求 IMA,(b)若要拉起 700 lbf 的物体要用 50 lbf 的力,求机械的效率.

解 ☞ (a)设力 F 向下移动足够的距离使得上方的定滑轮转过一周.小滑轮上就松开等于其周长 $2\pi r$ 的绳子,而大滑轮绕起长为 $2\pi R$ 的绳子.所以拉住下方滑轮的绳子缩短了 $2\pi R-2\pi r$.重物 W 被升起的高度为 $\frac{1}{2}(2\pi R-2\pi r)=\pi(R-r)$,力 F 移动的距离为 $2\pi R$.所以

$$\mathrm{IMA}=\frac{F\text{ 移动的距离}}{W\text{ 移动的距离}}=\frac{2\pi R}{\pi(R-r)}=\frac{2R}{R-r}=\frac{22\text{ cm}}{1\text{ cm}}=22$$

(b)代入数据, $\mathrm{AMA}=\frac{\text{举起的重量}}{\text{施加的力}}=\frac{700\text{ N}}{50\text{ N}}=14$

所以　　$$\text{效率}=\frac{\mathrm{AMA}}{\mathrm{IMA}}=\frac{14}{22}=0.64=64\%$$

8.32　一发动机使得起重机在 50 s 内将 3 t 的重物升起 40 ft.发动机的效率为 85%,起重机的效率为 45%.求提供给重物的功率 P_0 给起重机的功率 P 以及给发动机的功率 P′.

解 ☞ 有用功 $=6000\times40=240\ 000$ (ft·lbf)

$$P_0=\frac{240000\text{ft}\cdot\text{lbf}}{50\text{s}}=4800\text{ ft}\cdot\text{lbf/s},\quad 4800=0.45\,P$$

$$P=10667\text{ ft}\cdot\text{lbf/s}=0.85\,P',\quad P'=12550\text{ ft}\cdot\text{lbf/s}=22.8\text{ hp}$$

8.33　对于如图 8-6 所示的三个杠杆,要举起 $w=90$ N 的重物求三个竖直方向的力 F_1,F_2,F_3.忽略杠杆的重量,求每个系统的 IMA、AMA 和效率.

解 ☞ 在每种情况下,取关于轴上支点的力矩.若假设物体被慢慢以恒定的速度升起,系统处于平衡.顺时针方向力矩等于逆时针方向的力矩.

顺时针力矩 = 逆时针力矩

(a)　$(90\text{N})(2\text{m})=(F_1)(4\text{m}),\quad F_1=45\text{N}$

(b)　$(90\text{N})(1\text{m})=(F_2)(3\text{m}),\quad F_2=30\text{N}$

(c)　$(90\text{N})(2\text{m})=(F_3)(5\text{m})\frac{\sqrt{3}}{2},\quad F_3=41.6\text{N}$

三个杠杆的 IMA, AMA 以及效率分别为

	杠杆(a)	杠杆(b)	杠杆(c)
IMA	$\frac{4\text{m}}{2\text{m}}=2$	$\frac{3\text{m}}{1\text{m}}=3$	$\frac{4.33\text{ m}}{2\text{m}}=2.16$
AMA	$\frac{90\text{N}}{45\text{N}}=2$	$\frac{90\text{N}}{30\text{N}}=3$	$\frac{90\text{N}}{41.6\text{N}}=2.16$
Eff.	1.00	1.00	1.00

效率为 1 是因为忽略了支点的摩擦.

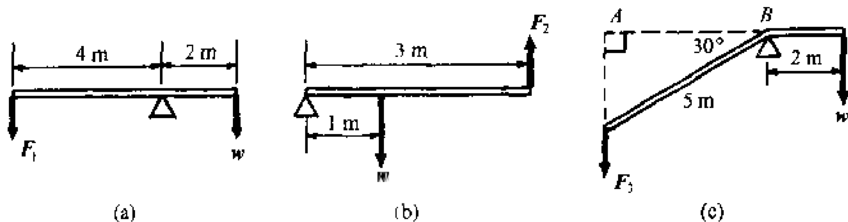


图 8-6

8.34 对于图 8-7 所示的每个滑轮系统,求拉起 100 lb 的重物 W 所需的力 F. 忽略摩擦和滑轮的重力.

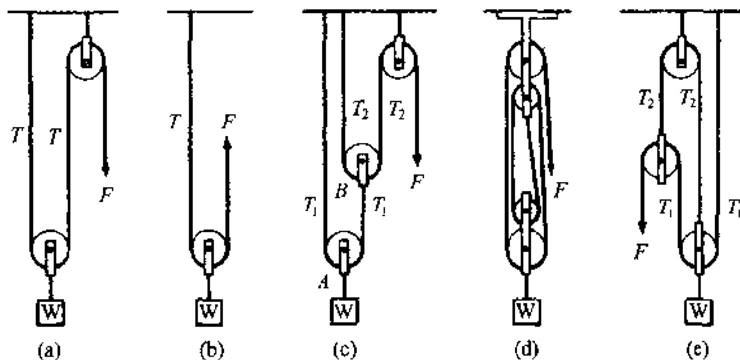


图 8-7

解 ☞ (a)重物 W 由两根绳子拉住;每根绳子施加一向上的力 $T=\frac{1}{2}W$. 但因绳子连续且滑轮无摩擦,$T=F$. 所以 $F=T=\frac{1}{2}W=\frac{1}{2}(100\ \text{lbf})=50\text{lbf}$.

(b)这里重物也是由两段绳子上的拉力 T 和 F 支持,且 $F=T$. 由 $F+T=100$ lbf 得 $F=\frac{1}{2}W=50\text{lbf}$.

(c)设 T_1、T_2 分别为滑轮 A、B 两边绳子上的拉力. 滑轮 A 处于平衡,所以 $T_1+T_1-W=0$, $T_1=\frac{1}{2}W$. 因滑轮 B 也处于平衡,$T_2+T_2-T_1=0$,所以 $T_2=\frac{1}{2}T_1=\frac{1}{4}W$. 又 $F=T_2$,所以 $F=\frac{1}{4}W=25$ lbf.

(d)四根具有相等拉力 T 的绳子拉住重物 W. 所以 $4T_1=W$, $F=T_1=\frac{1}{4}W=25$ lbf. (e)可以马上得到 $F=T_1$. 因左边的滑轮处于平衡态,所以 $T_2-T_1-F=0$. 但 $T_1=F$,所以 $T_2=2F$. 右边的滑轮也处于平衡,所以 $T_1+T_2+T_1-W=0$. 利用 $T_1=F$ 以及 $T_2=2F$ 得到 $4F=W$,所以 $F=25$ lbf.

8.35 如图 8-8 所示,升降器有一杠杆臂长 40 cm,高度为 5 mm. 若效率为 30%,要举起 270 kg 的物体需多大的力 F?

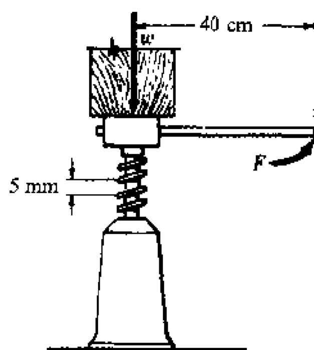


图 8-8

解 ☞ 当杆柄旋转一圈,力 F 移动的距离为 $2\pi r=2\pi(0.40\text{m})$,同时重物被举起 0.005 m. 所以 IMA = 距离比 $=\frac{2\pi(0.40\ \text{m})}{0.005\ \text{m}}=500$. 因效率 = AMA/IMA,所以 AMA = (效率)IMA = (0.30)(500) = 150. 但 AMA = (举起的物重)/(施加的力),所以

$$F=\frac{举起的物重}{\text{AMA}}=\frac{(270)(9.8)\text{N}}{150}=17.6\text{N}$$

8.36 一重 400 N 的水桶被曲柄轴装置吊起.轴半径为 75 mm,曲柄半径为 225 mm.若在曲柄上的力为 160 N,求该机械的 AMA,IMA 以及机械效率.

解 ☞ $\text{AMA}=\frac{F_出}{F_入}=\frac{400}{160}=2.5$, $\text{IMA}=\frac{d_入}{d_出}=\frac{225\times 2\pi\text{mm/r}}{75\times 2\pi\text{mm/r}}=3$

$效率=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{F_出 d_出}{F_入 d_入}=\frac{2.5}{3}=0.833$

8.37 一长 12.5 m 的斜面(如图 8-9 所示)被作为一简单机械使 4 kN 重的箱子上升3.5 m.沿斜面推箱子的力为 1.5 kN.若需要 50 s 使箱子上升到斜面顶部,求该机械的 AMA、IMA、效率以及需要的功率.

解 ☞ $\text{AMA}=\frac{4000}{1500}=2.67$, $\text{IMA}=\frac{12.5}{3.5}=3.57$

$效率=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{8}{3}\times\frac{2}{25}=\frac{56}{75}=0.75$

$P=\frac{W}{t}=\frac{1500\times 12.5}{50}=375\text{ W}$

8.38 一长为 13 ft 的斜面(见图 8-9)用来把 390 lb 的盒子推到高于地面 5 ft 的平面上.需要 200 lbf 的力.求斜面工作的效率.需多大的力克服摩擦力 f? 斜面与盒子间的摩擦系数是多大?

解 ☞ $效率=\frac{输出功}{输入功}=\frac{390\times 5}{200\times 13}=0.75$

$\frac{5}{13}\times 390=150(\text{lbf})$是重力沿斜面方向的分量.$200=150+f$,故 $f=50$ lbf.$\mu=\frac{f}{N}=\frac{50}{390\times 12/13}=\frac{5}{36}=0.139$

8.39 一长 7.5 m 的斜坡梯(图 8-9)的上端比下端高 2.1 m.用 460 N 的力把 900 N 的盒子推上斜面.求摩擦系数和克服摩擦做的功.若盒子从斜坡顶部释放,会滑下去吗? 若会,求盒子在斜坡底的速度.

解 ☞ 重力沿斜面向下的分量为 $900\times 2.1/7.5=252(\text{N})$.

$$f=460-252=208(\text{N}),\quad \mu=\frac{208}{900\times 7.2/7.5}=0.241$$

克服摩擦做功$=208\times 7.5=1560(\text{J})$.因 $252>208$,所以释放时盒子会滑下.

$44=\frac{900}{9.8}a$, $a=0.479\text{ m/s}^2$, $v^2=v_0^2+2as$, $v_0=0$,所以

$$v^2=2\times 0.479\times 7.5=7.187,\quad v=2.68\text{ m/s}$$



图 8-9

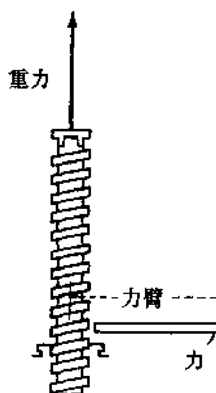


图 8-10

8.40 如图 8-10 所示的千斤顶螺距为 3 mm,手柄长为 600 mm.要举起 25 kN 的物体必须要有 60 N 的力.计算出此机械的 IMA、AMA 和效率.

解 ☞ $$\mathrm{IMA}=\frac{\text{作用力的距离}}{\text{重物移动的距离}}$$

转动完整的一周，

$\frac{d_{\mathrm{in}}}{d_{\mathrm{out}}}=\mathrm{IMA}=\frac{2\pi\times 600}{3}=1257,\mathrm{AMA}=\frac{25000}{60}=416.67$

效率 $=\frac{\mathrm{AMA}}{\mathrm{IMA}}=\frac{416}{1257}=0.33$

8.41 需要 1.2 kN 的力作用在转盘的杆上才能举起 10 kN 重的锚.转盘的轴半径为 55 mm，外力距轴 0.88 m.求外力在 2 min 内把锚升高 15 m 所做的功，机械的 AMA、IMA、转盘的效率以及外力的功率.

解 ☞ 转一周，$d_{外}=2\pi\times 0.055$ m，$d_{内}=2\pi\times 0.88$ m.所以当 $d_{外}=15$ m，$d_{内}=240$ m.

外力所做的功为　$W=1.2\ \mathrm{kN}\times 240\ \mathrm{m}=288\ \mathrm{kJ}$

$\mathrm{AMA}=\frac{10}{1.2}=8.33,\mathrm{IMA}=\frac{0.88}{0.055}=16,$ 效率 $=\frac{8.33}{16}=0.52$

功率 $=\frac{W}{t}=\frac{288\ \mathrm{kJ}}{120\ \mathrm{s}}=2.4\ \mathrm{kW}$

8.42 一简单"机械"(为了控制重力)如图 8-11 所示，一小车沿圆周运动.实验发现要使小车完成一周必须满足 $h\geqslant 0.65\ R$.求 h 最小时该机械的效率.

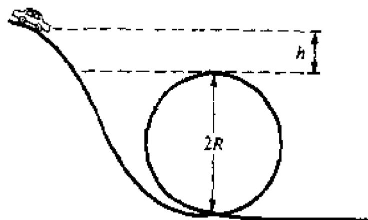


图 8-11

解 ☞ 若 v_t、N_t 分别代表汽车在圆周顶部的速度和受到的支持力，

$$mg+N_t=\frac{mv_t^2}{R}=\frac{2}{R}\left(\frac{1}{2}mv_t^2\right)$$

但由于在轨道顶部与圆周顶部能量守恒，$mgh=\frac{1}{2}mv_t^2+\Delta$，其中 $\Delta>0$ 表示摩擦损耗的能量.所以

$$mg+N_t=\frac{2}{R}(mgh-\Delta) \tag{1}$$

在临界值 $h=0.65\ R$，$N_t=0$ 则由(1)得 $\Delta=0.15\ mgR$.汽车运动一周机械的输入功就是汽车从底部回到圆周顶部所需的功，$mg(2R+0.65R)=2.65\ mgR$.所以

$$\text{效率}=\frac{(\text{输入功})-(\text{损失功})}{(\text{输入功})}=\frac{2.65-0.15}{2.65}=0.94$$

第九章 冲量和动量

9.1 冲量-动量

9.1 质量为 m 的物体作自由落体.求物体下落 h 后在竖直方向的动量.

解 ☞ 重力作用了时间 t,物体下落的距高为 h.动量从 0 变为 mv.根据 $mv^2/2=mgh$,可解出 v 以及 $p=m(2gh)^{1/2}$.

9.2 证明质量为 m 的物体线性动量 p 与动能 K 的关系为 $K=p^2/2m$.

解 ☞ 因 $p=mv$,将 $K=mv^2/2$ 的分子分母同乘以 m 得到 $K=(mv)^2/2m=p^2/2m$.

9.3 一质量为 M 的地球卫星以速度 v 绕地球做圆周运动.则下列情况下动量改变多少(a)卫星只走了圆周的一半,(b)卫星走完一周.忽略地球自转.

解 ☞ (a)

$$|M\boldsymbol{v}_f-M\boldsymbol{v}_i|=Mv-M(-v)=2Mv$$

(b)

$$|M\boldsymbol{v}_f-M\boldsymbol{v}_i|=0$$

9.4 一 80 kg 的人遇红灯停车等待,突然由来自后面的撞击使他的车加速到 5 m/s.设碰撞的时间为 0.3 s,求(a)车内的人受到的冲量,(b)车椅的背部对他的平均作用力.

解 ☞ (a)冲量 $=\Delta(mv)=80(5)=400$N·s.(b)$\overline{F}=\Delta(mv)/\Delta t=400/0.3=1330$(N).

9.5 一质量为 3.0 kg 的滑块在光滑水平面上滑动,开始以 50 m/s 的速度向左运动,接着与一弹簧相碰并压缩弹簧,滑块慢慢静止,然后滑块又在弹力作用下向右加速,最后以 40 m/s 向右运动.滑块与弹簧的接触时间为 0.020 s,求弹簧对滑块的冲量大小和方向以及弹簧对滑块的平均作用力.

解 ☞ 冲量=动量的变化,本题中即等于(3.0 kg)(40 m/s)-(3.0 kg)(-50 m/s)=270 kg·m/s(向右).因水平方向滑块只受到弹力,冲量为 270 N·s(向右).又冲量=力×时间,$t=0.020$ s,所以平均弹力=13.5 kN(向右).

9.6 一营员用质量为 M 的木槌从 y 的高度敲打质量为 m 帐蓬桩的顶部,使得桩进人地下的深度为 d,求地面的阻力.设阻力恒定且木槌和桩击打后靠在一起.如图 9-1.

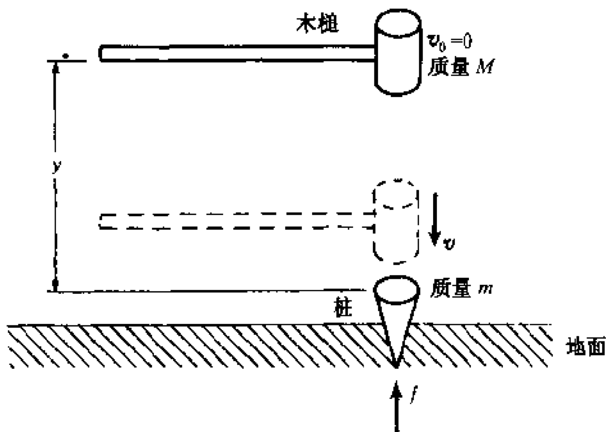


图 9-1

解 ☞ 木槌撞击桩前的速度为 $v=\sqrt{2gy}$.因碰撞时动量守恒,所以 $Mv=(M+m)v'$,其中 v'是碰

撞后槌和桩的共同速度.

地面对槌和桩向上的合力为 $\sum F = f - (M+m)g$, f 是地面的阻力. 根据动能定理有

$$\Delta K = (\sum F)(-d)$$

$$0 - \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = [f-(M+m)g](-d)$$

$$f = (M+m)g + (M+m)\frac{v'^2}{2d}$$

利用 $v' = Mv/(M+m)$ 以及 $v^2 = 2gy$,

$$f = (M+m)g + (M+m)\frac{M^2v^2}{2(M+m)^2d} = (M+m)g + \frac{M^2}{M+m}\frac{gy}{d}$$

9.7 根据 9.6 题,求桩运动的时间.

解 ☞ $\sum F = \Delta P/\Delta t$, 其中 Δt 是刚碰撞后(或碰撞前,因为动量守恒)到桩和槌运动停止的时间. 所以

$$\Delta t = \frac{\Delta P}{\sum F} = \frac{0-[-(M+m)v']}{f-(M+m)g} = \frac{Mv}{\left(\frac{M^2}{M+m}\right)\frac{gy}{d}} = \frac{M+m}{M}d\sqrt{\frac{2}{gy}}$$

9.8 根据 9.6 题,求撞击中损失的动能.

解 ☞ 碰撞之前系统的动能为$\frac{1}{2}Mv^2$;碰撞后动能为

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M+m}v^2$$

所以木槌减少的动能为

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}\frac{M^2}{M+m}v^2 = \frac{m}{M+m}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)$$

即减少了原来动能的 $m/(M+m)$.

9.9 一高尔夫球球员用球棍将 51 g 的高尔夫球以 80 m/s 的速度击出. 设球与球棍接触时间为 0.006 s,求球的最终动量以及球棍对球的平均作用力.

解 ☞ 因为冲量等于动量的变化,

$$Ft = mv - mv_0,\quad F(0.006) = 0.051(80) - 0,\quad F = \frac{0.051(80)}{0.006} = 680(\text{N})$$

F 为平均力. 最终动量为 $mv = 0.051(80) = 4.08(\text{kg·m/s})$

9.10 一颗 5.0 g 的子弹以 100 m/s 的速度射向木块. 设子弹受到均匀阻力且在木块内运动了 6.0 cm. (a)子弹需多长时间静止? (b)求对木块的冲量, (c)求木块受到的平均作用力.

解 ☞ (a)$t = s/\bar{v} = (0.06\text{m})/(50\text{m/s}) = 1.2\times10^{-3}\text{s}$. (b)冲量 $= \Delta(mv) = 100\ (0.005) = 0.5\ \text{N·s}$. (c)$\overline{F} = \Delta(mv)/t = 0.5/(1.2\times10^{-3}) = 417(\text{N})$.

9.11 求图 9-2 中水流对垂直方向的固定平板作用力是多大? 水流的水平方向速度为 80 cm/s 且每秒有 30 cm³ 的水冲击到板上. 假设水流与板相撞后沿平行于板的方向运动, 1 cm³水的质量为一克.

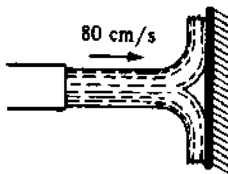


图 9-2

解 ☞ 木板对水的冲量改变了水的水平动量.

(冲量)$_x$ = 沿 x 方向动量的改变 $F_xt = (mv_x)_2 - (mv_x)_1$ 设 t 为 1 s,则 1 s 内与板相撞的水质量为 30 g. 所以上面的方程写成 $F_x(1\text{s}) = (0.030\text{kg})(0\text{m/s}) - (0.030\ \text{kg})(0.80\text{m/s})$, 从而得到 $F_x = -0.024$ N. 这就是板对水流的作用力. 根据牛顿第三定律,水流对板的作用力为 +0.024 N.

9.12 一只盛满水的水桶放在天平的一端, 如图 9-3 所示. 一股稳定的水流从 10 m 的高度流入水桶且从天平的一端溢出. 水流的频率为 0.5 kg/s. 若在没有水流时天平保持平衡, 则在有水流时水桶变"重"了多少?

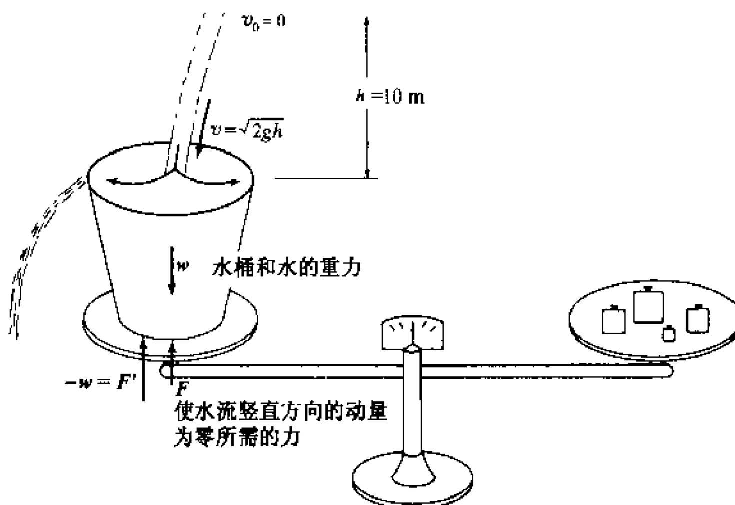


图 9-3

解 ☞ 天平支持水桶的重量且提供冲量使流下的水停止.在时间 Δt 内质量为 $(0.5\ \text{kg/s})\Delta t$ 的水,从速度 $v=\sqrt{2gh}$ 变为零;所以

$$I = F\Delta t = (0.5\Delta t)v \quad 即\ F = 0.5\,v = 0.5\,\sqrt{2(9.8)(10)} = 7(\text{N})$$

所以水桶变"重"了 7 N.

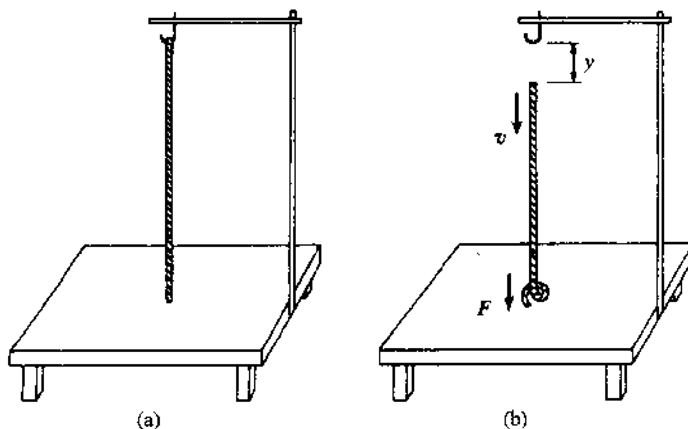


图 9-4

9.13[c]　一根单位长度质量为 m 的均匀绳子竖直挂在支架上使下端刚好与桌面接触,如图 9-4(a)所示.若绳子释放,证明绳子落下的长度为 y 时,桌面受到的力等于长为 $3y$ 的绳子的重力.

证　绳子在下降的部分做自由落体运动.在绳子下落 y 时速度为 $v=\sqrt{2gy}$.这一时刻后的 $\mathrm{d}t$ 时间内落到桌面上的绳长为 $v\mathrm{d}t$.这段绳子静止下来使桌面增加的动量为 $m(v\mathrm{d}t)v$,所以转化为桌子动量的速率为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = mv^2 = (2my)g$$

这是使下降的绳子停下来所需的力.因为长为 y 的绳子(重为 $(my)g$)已经落到桌面上,所以对桌面的力为 $(2my)g+(my)g=(3my)g$,即长为 $3y$ 的绳子的重力.

9.14　一宇航员在空间站外进行维修工作.他沿着空间站以 1.00 m/s 的速度运动.他想改变运动方向 90°并使速度增加到 2.00 m/s.他的总质量为 100 kg,包括太空服和推进器.推进器提供 50 N 的推力.(a)求要使运动这样改变需要的冲量的大小和方向.(b)宇航

员完成运动的改变至少需多少时间？推进器该如何放置？

解 ☞ (a)设 $\hat{x}$ 沿初始运动的方向 $\hat{y}$ 沿最终的运动方向.初始动量 $m\boldsymbol{v}_i=(100\ \text{kg})(1.00\ \text{m/s})\hat{x}=(100\ \text{kg·m/s})\hat{x}$.最终动量 $m\boldsymbol{v}_f=(100\ \text{kg})(2.00\ \text{m/s})\hat{y}=(200\ \text{kg·m/s})\hat{y}$.所需冲量 $\boldsymbol{I}=m\boldsymbol{v}_f-m\boldsymbol{v}_i=(-100\ \text{N·s})\hat{x}+(200\ \text{N·s})\hat{y}$.大小 $I=100\sqrt{5}=224(\text{N·s})$；方向与 $\boldsymbol{v}_i$ 的夹角为 $\arccos(-100/100\sqrt{5})=116.6°$.(b)因为 $\boldsymbol{I}=\sum \boldsymbol{F}\Delta t$ 当 $\boldsymbol{F}/\!/\boldsymbol{I}$ 时所需时间最短, $T=I/F=(100\sqrt{5}\ \text{kg·m/s})/(50\text{N})=4.47\ \text{s}$.要在这段最短的时间内完成所需的变化,推进器应与 $\boldsymbol{I}$ 的方向相反,即与 $\boldsymbol{v}_i$ 所成的角为 $-63.4°$.

9.15 假设 9.14 题中的宇航员先减速直至静止,再使推进器转过 90°喷气,并加速到最终所需的速度.这一过程需花费多长时间？与最短时间相比需多消耗多少燃料？

解 ☞ 先减速到静止需要时间 $t_1=(mv_i/F)$；再加速到 $\boldsymbol{v}_f$ 需要时间 $t_2=(mv_f/F)$.所需的总时间 $T'=t_1+t_2=m(v_i+v_f)/F$.运用已知的数值, $T'=(100)(1.00+2.00)/(50)=6.00\ \text{s}$.因燃烧时间比最短时间长 $(6.00-4.47)/4.47=34\%$,所以与最短时间相比需多消耗 34% 的燃料.

9.2 弹性碰撞

9.16 证明两个物体做弹性对心碰撞后相对速度反向.

解 ☞ 若 u_1、u_2 是物体 1、2 的初速度, v_1、v_2 是物体 1、2 的末速度.根据动量守恒 $m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$,即 $m_1(u_1-v_1)=m_2(v_2-u_2)$.由能量守恒 $\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$,即 $m_1(u_1-v_1)(u_1+v_1)=m_2(v_2-u_2)(v_2+u_2)$.把两等式相除得到 $u_1+v_1=u_2+v_2$,即 $u_2-u_1=-(v_2-v_1)$,即得到所证结果.

9.17 定义一维碰撞的恢复系数.

解 ☞ 根据 9.16 题得

$$e\equiv\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=\frac{\text{碰撞后的相对速度}}{\text{碰撞前的相对速度}}$$

对于弹性碰撞, $e=1$；对于非弹性碰撞, $0\leqslant e<1$,若碰撞后物体粘在一起, $e=0$.

9.18 一质量为 0.4 kg 的小球以速度 3 m/s 与另一 0.6 kg 的静止物体发生完全弹性碰撞.求碰撞后两物体的速度.

解 ☞ 由动量守恒

$$(0.4\times3)+0=0.4v+0.6V \quad \text{即} \quad v+1.5V=3$$

对于弹性碰撞有

$$\text{分开后的相对速度}=-\text{靠近时的相对速度} \quad \text{即}-v+V=3$$

将两方程相加解得 $\quad 2.5V=6,\ V=2.4\ \text{m/s},\ v=-0.6\ \text{m/s}$

9.19 质量为 1.66×10^{-27} kg 的质子与一静止的氦原子碰撞.氦原子的质量为 6.64×10^{-27} kg,获得的速度为 5×10^5 m/s.若碰撞是弹性的,求质子的始速度和末速度以及传给氦原子能量的比例.

解 ☞ He 原子量为 4(是质子的四倍).根据动量守恒,

$$m_pv_i+0=m_pv_f+(4m_p)V_f \quad \text{即} \quad v_i=v_f+4V_f$$

根据弹性碰撞条件,

$$\text{靠近时的相对速度}=-\text{分开时的相对速度}$$

即

$$v_i=-v_f+V_f$$

把两等式相加,得到

$$2v_i=5V_f=5(5\times10^5\ \text{m/s}) \qquad \text{即}\ v_i=1.25\times10^6\ \text{m/s}$$

根据动量方程

$$-v_f=4v_f-v_i$$

所以

$$v_f = 1.25\times10^6 - 2.00\times10^6 = -7.5\times10^5(\text{m/s})$$

$$能量的比例 = \frac{氢原子的动能}{初始动能} = \frac{\frac{1}{2}(4M_p)(5\times10^5)^2}{\frac{1}{2}(M_p)(1.25\times10^6)^2} = 0.64.$$

9.20 一质量为 1.67×10^{-27} kg 的中子与一静止的氘核相碰.氘的质量为 3.34×10^{-27}kg,碰撞之前中子的速度为 $v_1 = 8.8$ km/s 且碰撞是弹性碰撞,(a)求碰撞后氘核的速度 V_2 和中子的速度 v_2;(b)总动能是多少?

解 ☞ (a)以中子运动的方向为正方向.由于动量守恒,$m_1v_1 = m_1v_2 + m_2V_2$ 即$8.8 = v_2 + 2V_2$,因碰撞前后相对速度相反,$8.8 = V_2 - v_2$ 将两算式相加,$17.6 = 3V_2$,$V_2 = 5.87$ km/s;于是 $v_2 = V_2 - 8.8 = -2.93$ km/s(沿负方向).(b)$KE = \frac{1}{2}(m_1v_1^2) = \frac{1}{2}(1.67\times10^{-27})(8800)^2 = 6.47\times10^{-20}$(J).

9.21 一高速中子与一静止质子(氢原子)发生高速碰撞.假设两者的质量相等,运用能量守恒和动量守恒定律说明碰撞后的情况.

解 ☞ 表示质子的符号用大写表示,运用动量守恒定律:$mv_1 + 0 = mv_2 + mV_2$,$v_1 = v_2 + V_2$,$v_1^2 = v_2^2 + 2v_2V_2 + V_2^2$ 再运用动能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mV_2^2,\quad v_1^2 = v_2^2 + V_2^2,\quad v_2^2 + V_2^2 = v_2^2 + 2v_2V_2 + V_2^2$$

$0 = 2v_2V_2$ 因为氢原子(质子)受撞击后要运动,V_2 不可能为零,所以 $v_2 = 0$.中子在碰撞后静止,氢原子以 $V_2 = v_1$ 的速度运动;也就是说两物体原来的速度交换了.

9.22 两个理想弹性小球,一个重 2lb,另一重为 3lb.两球以速度 8 ft/s 和 6ft/s 沿相反的方向运动.求碰撞后两球的速度.

解 ☞ 根据动量守恒

$$\left(\frac{2}{32}\times8\right) - \left(\frac{3}{32}\right)6 = \frac{2}{32}v_f + \frac{3}{32}V_f \quad 即 \quad 2v_f + 3V_f = -2$$

因为是弹性碰撞:

$$8-(-6) = V_f - v_f(靠近时的相对速度 = -分离时的相对速度)$$

即 $\quad -v_f + V_f = 14.$

解这两个方程得到 $\quad v_f = -8.8$ ft/s 及 $V_f = 5.2$ ft/s

9.23 两个相同的球相对碰撞.其中一只球的初速度为 0.75 m/s,另一只的速度为 −0.43 m/s.若碰撞是理想弹性碰撞,求每个球的末速度.

解 ☞ 因为两球正碰,且沿一条直线运动.设每只球的质量为 m,由于碰撞中动量守恒,所以碰撞前动量=碰撞后的动量

$$m(0.75\text{m/s}) + m(-0.43\text{m/s}) = mv_1 + mv_2$$

其中 v_1、v_2 是末速度.方程化简为

$$0.32\text{ m/s} = v_1 + v_2 \tag{1}$$

因为碰撞是理想弹性碰撞,动能守恒.

碰撞前动能=碰撞后动能

$$\frac{1}{2}m(0.75\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}m(0.43\text{m/s})^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

该方程化简为

$$0.747 = v_1^2 + v_2^2 \tag{2}$$

由(1)式得到 $v_2 = 0.32 - v_1$,代入(2)得

$$0.747 = (0.32 - v_1)^2 + v_1^2$$

得

$$2v_1^2 - 0.64v_1 - 0.645 = 0$$

利用求根公式得到

$$v_1 = \frac{0.64 \pm \sqrt{(0.64)^2 + 5.16}}{4} = 0.16 \pm 0.59$$

从中得到 $v_1 = 0.75$ m/s 或 -0.43 m/s. 代入(1)式得 $v_2 = -0.43$ m/s或0.75 m/s.

有两种可能的解

$$(v_1 = 0.75 \text{ m/s}, v_2 = -0.43 \text{ m/s}), \quad (v_1 = -0.43 \text{ m/s}, v_2 = 0.75 \text{ m/s})$$

第一组解必须舍去,因为它表示两球继续按原来的状态运动,也就是说没有发生碰撞.正确的答案是 $v_1 = -0.43$ m/s, $v_2 = 0.75$ m/s,这说明两质量相等的物体发生完全弹性碰撞,仅仅交换了速度.

9.24 不用二次方程求解 9.23 题.

解 ☞ 由 9.17 题,

$$e = 1 = \frac{v_2 - v_1}{0.75 - (-0.43)}$$

从而得

$$v_2 - v_1 = 1.18 \text{ m/s} \tag{3}$$

用 9.23 题中的(1)式和该处的(3)式得到:$v_2 = 0.75$ m/s, $v_1 = -0.43$ m/s.

9.25 在图 9-5 中,小球的质量为 0.3 kg,大球的质量为 0.5 kg.若小球被拉回后再释放使之在碰撞前的速度为 4 m/s,求两球刚刚发生弹性碰撞后的速度.

解 ☞ 根据动量守恒

$$(0.3 \times 4) + 0 = 0.3v_f + 0.5V_f \qquad \text{即 } V_f + 0.6v_f = 2.4$$

根据弹性碰撞条件(分离时的相对速度 = − 靠近时的相对速度)

$$V_f - v_f = 4$$

解这两个方程得到

$$v_f = -1 \text{ m/s} \qquad \text{以及 } V_f = 3 \text{ m/s}$$

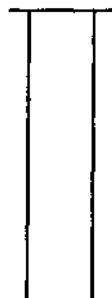


图 9-5

9.26 图 9-5 中的两球被拉起后同时释放,在平衡位置处发生弹性碰撞.此时质量为 0.15 kg 的小球以速度 4 m/s 向右运动而 0.25 kg 的大球以 3 m/s 向左运动.求碰撞后两球的速度.

解 ☞ 由于动量守恒

$$(0.15 \times 4) + (0.25) \times (-3) = 0.15\,v_f + 0.25V_f$$

即

$$5V_f + 3v_f = -3$$

由于是弹性碰撞,(分开时的相对速度 = − 靠近时的相对速度)

$$\text{即 } V_f - v_f = 7$$

将第二个方程两边乘以 3 并与第一个方程相加得到

$$8V_f = 18, \qquad V_f = 2.25 \text{ m/s}$$

代入任意一个方程解得 $v_f = -4.75$ m/s.

9.27 A 球的质量为 m,以速度 $\boldsymbol{v}_i$ 与另一相同的初始静止的 B 球发生斜碰,碰撞是完全弹性的.证明碰撞后两球速度的夹角为 90°.

证 根据动量守恒的矢量形式

$$m\boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_f + m\boldsymbol{V}_f \qquad \text{即 } \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_f + \boldsymbol{v}_f$$

所以

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = (\boldsymbol{v}_f + \boldsymbol{V}_f) \cdot (\boldsymbol{v}_f + \boldsymbol{V}_f) = \boldsymbol{v}_f \cdot \boldsymbol{v}_f + 2\,\boldsymbol{v}_f \boldsymbol{V}_f + \boldsymbol{V}_f \cdot \boldsymbol{V}_f$$

即

$$v_i^2 = v_f^2 + 2v_f V_f \cos\theta + V_f^2$$

但由能量守恒得到(已消去 $m/2$ 因子)

$$v_i^2 = v_f^2 + V_f^2$$

所以 $\cos\theta = 0$, 即 $\theta = 90°$.

9.28 质量为 m_1 的物体以速度 V_{1i} 与一质量为 m_2 的静止物体发生对心弹性碰撞. 碰撞后的速度分别是 V_{1f} 和 V_{2f}. 用 V_{1i} 表示 V_{1f} 和 V_{2f}.

解 ☞ 根据动量守恒 $m_1V_{1f}+m_2V_{2f}=m_1V_{1i}$. 由碰撞前后相对速度相反得 $V_{2f}-V_{1f}=V_{1i}$. 解这两个方程得

$$V_{1f}=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)V_{1i} \text{ 以及 } V_{2f}=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)V_{1i}$$

9.29 在 9.28 题中, (a) 计算 m_2 获得的动能与原来动能的比值, (b) m_2 是多大时能量全部传给静止的物体, (c) 若 m_1 是一个中子的质量, m_2 是碳原子的质量且 m_2 是 m_1 的 12 倍, 则在该正碰中中子能量传给碳原子的比率是多少?

解 ☞ (a) 物体 1 的初始动能是 $K_{1i}=\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$. 物体 2 的末动能是 $K_{2f}=\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$. K_{2f}/K_{1i} 的值为(见 9.28 题)

$$\frac{K_{2f}}{K_{1i}}=\frac{\frac{1}{2}m_2[2m_1/(m_1+m_2)]^2v_{1i}^2}{\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}=1-\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2$$

(b) 根据 (a) 中的结论, 当 $m_2=m_1$ 时 K_{2f}/K_{1i} 达到最大值. (c) 因为 $m_2=12m_1$, $K_{2f}/K_{1i}=[(4m_1)(12m_1)]/(13m_1)^2=0.284$.

9.3 非弹性碰撞及冲击摆

9.30 一只重为 1lb 的球以 12ft/s 向右运动与一重 2lb 且以 12ft/s 的速度反向运动的小球发生正碰. 若这两球碰撞后粘在一起, 求 (a) 碰撞后的总动量, (b) 它们的末速度, 包括方向.

解 ☞ (a) 以向右为正方向,

$$\text{碰撞后的动量}=\text{碰撞前的动量}=\left(\frac{1}{32}\right)(12)+\left(\frac{2}{32}\right)(-12)$$
$$=-0.375\ (\text{slug}\cdot\text{ft/s})$$

(b) $\left(\frac{1}{32}+\frac{2}{32}\right)V=-0.375$, $V=-4.0$ ft/s

9.31 一颗 8 g 的子弹水平射向一 9 kg 的木块并停在木块内. 木块可以无摩擦移动, 碰撞后速度为 40 cm/s. 求子弹的初速度.

解 ☞ 把子弹与木块作为一个系统考虑. 碰撞前木块的速度和动量均为零. 根据动量守恒得:

$$\text{碰撞前系统的动量}=\text{碰撞后系统的动量}$$
$$(\text{质量})\times(\text{子弹的速度})+0=(\text{质量})\times(\text{木块的速度}+\text{子弹的速度})$$
$$(0.008\ \text{kg})v+0=(9.008\text{kg})(0.40\ \text{m/s})$$

其中 v 是子弹的速度. 解之得 $v=450$ m/s.

9.32 一 16 g 的物体以 30 cm/s 的速度沿 $+x$ 方向移动, 另一 4 g 的物体以 50 cm/s 的速度沿 $-x$ 方向运动. 两物体相碰后结合在一起, 求碰撞后的速度.

解 ☞ 对两物体组成的体系运用动量守恒定律.

碰撞前的动量 = 碰撞后的动量

$$(0.016\ \text{kg})(0.30\ \text{m/s})+(0.004\ \text{kg})(-0.50\text{m/s})=(0.020\ \text{kg})v$$

注意 4 g 的物体动量为负值. 解得 $v=0.14$ m/s.

9.33 一块 2 kg 的石块以 6 m/s 的速度运动. 要使该石块在 7×10^{-4}s 内停下来需多大的力?

解 ☞ 石块上的冲量 = 石块动量的变化. $Ft=mv_f-mv_0$, $F(7\times10^{-4}\text{s})=0-(2\ \text{kg})(6\text{m/s})$ 从中得 $F=-1.71\times10^4$ N. 负号表示力的方向与运动方向相反.

9.34 一 20 g 的子弹以 50 m/s 速度水平运动, 与桌面上静止的 7 kg 的物体相碰. 碰撞后子弹陷入木块中. 求 (a) 碰撞后木块的速度, (b) 若木块运动 1.5 m 后停止求桌面与木块的

摩擦力.

解 ☞ (a)运用碰撞前的动量=碰撞后的动量:

$(0.020)(50)=7.02\ v$,得到 $v=0.142$ m/s.(b)碰撞后的动能 K 等于克服摩擦力所做的功:$[(7.02)(0.142)^2]/2=f(1.5)$,从而 $f=0.047$ N.

9.35 假设有一 0.70 N 的水平力推动 5 kg 的木块沿桌面匀速运动.若一 20 g 的子弹射入木块后使木块又运动了 1.5 m 后停止,求子弹开始的速度.

解 ☞ 根据动量守恒得 $0.020\ v=5.02\ V$,可以从 $5.02\ V^2/2=f(1.5)$(其中 $f=0.70$ N)中求出碰撞后的速度 V.接着可以由第一个表达式求出 $v=162$ m/s.

9.36 一辆 2500 lb 的汽车以 55 mi/h 的速度沿正方向行驶并另一辆质量为 3500 lb 且以 25 mi/h 沿相反方向运动的汽车相碰.两车碰撞后粘在一起.求碰撞发生后两汽车残骸的动量(大小和方向)以及速度.

解 ☞ 55 mi/h = 80.7 ft/s; −25 mi/h = −36.7 ft/s.

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)V,$$

$$(m_1+m_2)V=\frac{2500}{32}(80.7)+\frac{3500}{32}(-36.7)=6305-4014$$

$$=2291(\text{slug}\cdot\text{ft/s})$$

所以

$$V=\frac{2291}{(2500/32)+(3500/32)}=12.2\ (\text{ft/s})$$

9.37 一辆在铁路上以速度 v 行驶的货车质量为M,这时一质量为 m 的机器从站台上倒下并竖直落到该车上.求机器落到车上后货车的运动速度.

解 ☞ 沿轨道方向动量守恒,$Mv=(M+m)v_f$.解之得 $v_f=Mv/(M+m)$.

9.38 质量为 1.0 kg 的钢球从地板上方 4.0 m 处落下,与地板相撞后再次达到最大高度为 2.5 m.求碰撞中球传递给地板的动量.

解 ☞ 以向下为正方向.设球碰撞前后的速度分别为 u 和 v.根据小球在落下后到碰撞前这段时间机械能守恒有 $\frac{1}{2}mu^2=mgh_1$,$u^2=2gh_1=78.4\text{m}^2/\text{s}^2$,$u=8.85$ m/s.从小球弹起时刻到最高点 $\frac{1}{2}mv^2=mgh_2$,$v^2=2gh_2=49\ \text{m}^2/\text{s}^2$,$v=7.0$ m/s.设 p 是传给地板的动量,$mu=-mv+p$,$p=m(v+u)=15.85$ kg·m/s.

9.39 一高尔夫球从 2m 的高度落到入行道上并反弹到 1.5 m 的高处.冲量为多大?设球与混凝土接触 7 ms,求平均加速度及恢复系数.球的质量为 45.8 g.

解 ☞ 设向下为正方向.设 h_0=原来的高度,h_1=弹回的高度.v_0=碰撞前的速度,v_1=碰撞后的速度.于是

$$v_0^2=2gh_0=2\times9.8\times2=39.2(\text{m}^2/\text{s}^2),\quad v_0=6.26\ \text{m/s}$$

$$v_1^2=2gh_1=2\times9.8\times1.5=29.4\ (\text{m}^2/\text{s}^2),\quad v_1=-5.42\ \text{m/s}$$

$\Delta v=v_1-v_0=-11.68$ m/s 冲量 $=\Delta(mv)=(0.0458)(-11.68)=-0.535$ (N·s)

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{11.68}{0.007}=-1669(\text{m/s}^2)$$

恢复系数为(由 9.17 题)

$$e=\left|\frac{\text{分离时的相对速度}}{\text{靠近时的相对速度}}\right|=\frac{v_1}{v_0}=\frac{5.42}{6.26}=0.866$$

9.40 物体 A 的质量为 0.8 kg,以 5m/s 的速度向右运动且与另一质量为 1.2kg 以 4m/s 沿相反方向运动的物体 B 相碰.碰撞后 A 的 4m/s 的速度向左运动.求碰撞后 B 的速度以及恢复系数.

解 ☞ 因为动量守恒,所以

$$(0.8\times 5)+(1.2)(-4)=(0.8)(-4)+1.2V_f \quad 得\ V_f=2\text{m/s}$$

恢复系数为

$$e=\left|\frac{分离时相对速度}{靠近时的相对速度}\right|=\left|\frac{2-(-4)}{5-(-4)}\right|=\frac{6}{9}=0.667$$

9.41 一块冰雹打到静止汽车的顶部.冰雹以 10 m/s 的速度与车顶相撞并反弹回 0.20 m 的高度.求碰撞中冰雹的动能减少了多少?

解 ☞ 在冰雹的反弹过程中忽略空气阻力,反弹时的动能 $K_r=\frac{1}{2}mv_r^2$ 等于 mgh_r,其中 h_r 是反弹的高度.碰撞时的动能为 $K_i=\frac{1}{2}mv_i^2$.碰撞前后的动能之比为

$$\frac{K_r}{K_i}=\frac{mgh_r}{\frac{1}{2}mv_i^2}=\frac{2gh_r}{v_i^2}=\frac{2(9.8)(0.20)}{(10)^2}=0.039$$

所以损失的动能所占比例为 $1-(K_r/K_i)$,即 0.961.

9.42 若 9.41 题中冰雹的半径为 $r=5.0$ mm,密度为 $\rho=0.900\ \text{g/cm}^3$.假设碰撞中冰雹被减速到静止,所需时间等于运动其直径的距离所需的时间.求车顶施加的平均作用力.

解 ☞ 开始动量的大小为 $mv_i=(4\pi\rho r^2/3)v_i$;设减速所用的时间为 $\tau=2r/v_i$.平均作用力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$\frac{mv_i}{\tau}=\frac{mv_i^2}{2r}=\frac{2\pi\rho r^2v_i^2}{3}=\frac{2(3.141)(900)(5.0\times10^{-3})^2(10)^2}{3}=4.71(\text{N})$$

9.43 根据 9.41 题和 9.42 题,碰撞过程中冰雹受到的压强是多少千帕?

解 ☞ 可以假设 9.42 题求得的力也是冰雹碎片受到的力.

$$压强=\frac{F}{\pi r^2}=\frac{4.71\text{N}}{\pi(5.0\times10^{-3}\ \text{m})^2}=60.0\ \text{kN/m}^2=60.0\ \text{kPa}$$

9.44 一网球从一段楼梯上落下,依次与每阶台阶发生碰撞并反弹回台阶一半的高度.若每阶台阶高为 d,求恢复系数.

解 ☞ 由 9.39 题 $$e=\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}=\sqrt{\frac{d}{2d}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

9.45 小球竖直落到地板上后又弹回.恢复系数为 0.8.若小球的质量为 0.011 slug 且碰撞前的速度为 5 ft/s.求小球离开地板时的动量.

解 ☞ $e=\frac{v_2}{v_1}$ 其中 e 是恢复系数

$$0.8=\frac{v_2}{5},\qquad v_2=4\ \text{ft/s}$$

最后的动量为 mv_2

$$mv_2=0.011(4)=0.044\ \text{slug}\cdot\text{ft/s}(向上)$$

9.46 一小球从 h 高处落到地面并弹回到 $0.64\ h$ 的高度.求球与地板间的恢复系数.

解 ☞ 根据 9.39 题,$e=\sqrt{0.64\ h/h}=0.8$.

9.47 小球从一段楼梯上弹跳落下.恢复系数为 e.每个台阶高为 d,小球每弹跳一次下降一个台阶,且弹回的高度为下一台阶的上方 h 处.h 与台阶的宽相比足够大,可以看作正向碰撞.证明 $h=d/(1-e^2)$.

证 小球从最高点(由静止)落下 h 的距离且弹回的高度为$(h-d)$.所以,

$$e=\sqrt{\frac{h-d}{h}}\quad 即\ e^2=\frac{h-d}{h},h=\frac{d}{1-e^2}$$

9.48 两个质量分别为 m 和 $2m$ 的物体通过一根轻且不可伸长的绳子连接,且挂在光滑滑轮的两边并释放,如图 9-6 所示.4 s 后上升的物体上突然加上另一质量为 m 的物体.求加上质量为 m 的物体后(a)运动的速率,(b)上升物体损失的动能.

解 ☞ 因为滑轮仅仅改变绳子的拉力方向,系统可以方便地当作一个质量为 m_A+m_B 的整体分析,该物体仅受到的力为 w_A-w_B[如图 9-6(c)].

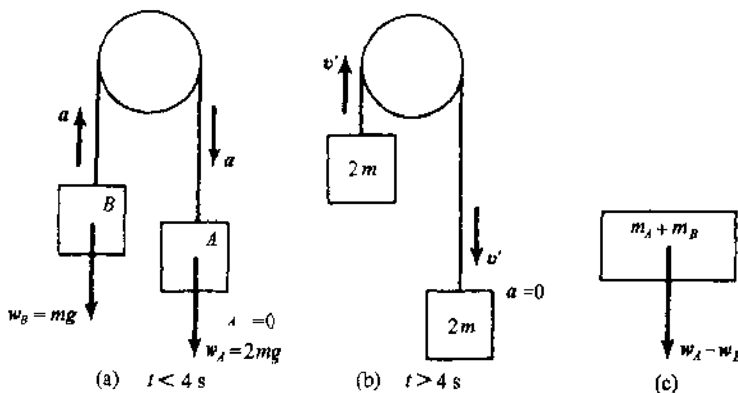


图 9-6

(a)$t<4$s 时,$m_A=2m_B=2m$,运动的方程为

$$mg=3ma \qquad 即\ a=\frac{g}{3}$$

$t=4$ s 前物体的速率为

$$v=0+at=\frac{4g}{3}(\mathrm{m/s})$$

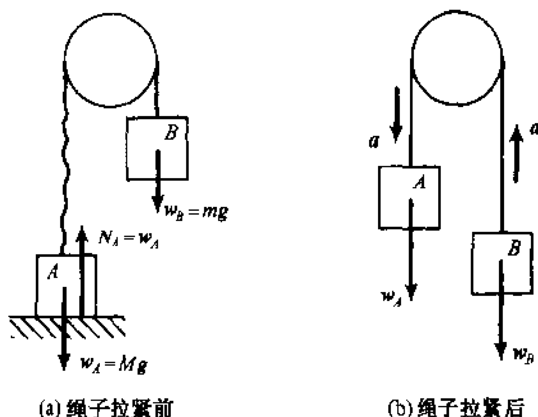
可以把 $t=4$ s 时质量的增加等效于系统与另一静止的质量为 m 的物体发生完全非弹性碰撞. 所以根据动量守恒,新的速率为

$$3mv+0=4mv' \quad 即\ v'=\frac{3}{4}v=g(\mathrm{m/s})$$

(b)物体 A 动能的损失为 $\frac{1}{2}(2m)v^2-\frac{1}{2}(2m)v'^2=\frac{7}{9}mg^2(\mathrm{J})$.

9.49 质量为 m 的物体从静止下落 y 后开始拉起质量为 $M(M>m)$ 的物体.两物体通过一根很轻且不可伸长的细绳相连并挂在一固定的光滑滑轮上.(a)求物体 M 返回原来位置所用的时间,(b)求物体 M 被拉起运动时动能减少的部分.见图 9-7.

解 ☞ 如图 9-7 所示,当系统的质量增加时只有内力起作用,所以瞬时动量守恒.



(a) 绳子拉紧前 (b) 绳子拉紧后

图 9-7

(a)B 物体在绳拉紧前的速率为 $v=\sqrt{2gy}$,其动量也就是系统的动量为 mv.绳子拉紧后的瞬间,系统的速率(两物体共同的速率)为 v';根据动量守恒,

$$mv=(M+m)v' \qquad 即\ v'=\frac{m}{M+m}v$$

而且，系统的加速度为

$$\sum F = mg - Mg = (M+m)a \qquad 即\ a = -\frac{M-m}{M+m}g$$

其中以动量的方向为正方向.

运用匀加速运动的公式 $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$，得出系统回到原处所花的时间满足

$$0 = v't + \frac{1}{2}at^2 \qquad 即\ t = -\frac{2v'}{a} = \frac{2m}{M-m}\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

(b)动能减少的比例为

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)v'^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{M}{M+m}$$

9.50　一只球从 h_0 的高处落到固定的水平面上. 弹性系数为 ε. 求球在水平面上静止时运动的总路程 D.

解　☞ 设 $h_i(i=1,2,3,\cdots)$为球在第 i 次碰撞后弹回的高度. 所以 $\varepsilon = \sqrt{h_i/h_{i-1}}$，即 $h_i = \varepsilon^2 h_{i-1}$，从而得 $h_n = \varepsilon^{2n}h_0(n=1,2,3,\cdots)$.

$$D = h_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} h_n = h_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{2n}\right]$$

右边是一个以 ε^2 为首项且公比也为 ε^2 的等比数列；所以

$$D = h_0\left[1 + 2\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right] = h_0\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

9.51　求 9.50 题中所用的时间 τ.

解　☞ 开始下降所需的时间为 $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$. 对于第 n 次碰撞后的下降，$t_n = \sqrt{2h_n/g} = \varepsilon^n\sqrt{2h_0/g}$；上升所需的时间也等于 t_n. 所以

$$\tau = t_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

9.52　求 9.50 及 9.51 题中球的平均速率.

解　☞ $\bar{v} = \frac{D}{\tau} = h_0\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\times\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \sqrt{\frac{gh_0}{2}}\frac{1+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{v_0}{2}\frac{1+\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}$

其中 $v_0 = \sqrt{2gh_0}$是第一次碰撞前的速率.

9.53　一只 1 kg 的球以 12 m/s 的速率与另一只 2 kg 且以 24 m/s 沿相反方向运动的球发生正碰. 求(a)$e = \frac{2}{3}$，(b)两球粘在一起，(c)该碰撞是完全弹性碰撞，三种情况下碰撞后的速度.

解　☞ 在三种情况下动量守恒所以可以写成

$$碰撞前的动量 = 碰撞后的动量$$

$$(1\text{kg})(12\ \text{m/s}) + (2\ \text{kg})(-24\ \text{m/s}) = (1\ \text{kg})v_1 + (2\text{kg})v_2$$

化简为

$$-36\ \text{m/s} = v_1 - 2v_2$$

(a)$e = \frac{2}{3}$，所以

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \quad 即 \quad \frac{2}{3} = \frac{v_2 - v_1}{12-(-24)}$$

所以 24 m/s $= v_2 - v_1$. 把该方程与动量守恒方程相接合得 $v_2 = -4$ m/s　$v_1 = -28$ m/s. (b)此时 $v_1 = v_2 = v$ 所以动量守恒方程写成 $3v = -36$ m/s，即 $v = -12$ m/s. (c)此时 $e = 1$ 所以

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \quad 写成 \quad 1 = \frac{v_2 - v_1}{12-(-24)}$$

从而得到 $v_2 - v_1 = 36$ m/s. 把该方程与动量守恒方程结合得 $v_2 = 0$. 从而得到 $v_1 = -36$ m/s.

9.54 如图 9-8 所示，一颗 15 g 的子弹水平射入系在一长绳上质量为 3 kg 的木块中. 子弹停在木块中. 若碰撞后木块高度上升了 10 cm, 子弹以多大速度射入?

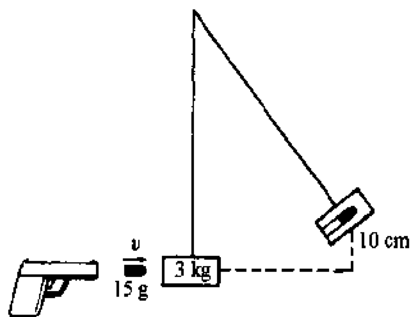


图 9-8

解 ☞ 首先考虑子弹和木块的碰撞. 碰撞中动量守恒, 所以

$$碰撞前的动量 = 碰撞后的动量$$

$$(0.015\text{ kg})v + 0 = (3.015\text{ kg})V$$

其中 v 是子弹的初速率, V 是碰撞后木块与子弹的共同速率.

碰撞后机械能守恒:

$$碰撞后的动能 = 最高点处的重力势能$$

即
$$\frac{1}{2}(3.015\text{kg})V^2 = (3.015\text{kg})(9.8\text{ m/s}^2)(0.10\text{ m})$$

从而得 $V = 1.40$ m/s. 代入动量方程得子弹的速度为 $v = 281$ m/s.

9.55 一颗 5 g 的子弹以 300 m/s 的速度射入 1.995kg 的木块. 木块是一冲击摆的摆锤. 求子弹和木块离开平衡位置时的速率以及子弹和木块能达到的高度.

解 ☞ 碰撞前的动量 = 碰撞后的动量

$$\frac{5}{1000}300 = (1.995 - 0.005)V, \qquad V = 0.75\text{ m/s}$$

根据能量守恒 $\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$

$$\frac{1}{2}(0.75)^2 = 9.8\,h, \qquad h = 0.0287\text{ m}$$

9.56 一颗 4 g 的子弹射入到 2.996 kg 的木块中, 木块是冲击摆的摆锤. 若木块离开平衡位置时速率为 0.5 m/s, 求子弹的速率以及木块子弹所能到达的高度.

解 ☞ 碰撞前的动量 = 碰撞后的动量

$$0.004\ v_B = (2.996 + 0.004)0.5,\ v_B = 375\text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh, \frac{1}{2}(0.25) = 9.8\,h, h = 0.0128\text{ m}$$

9.57 一颗 5 g 的子弹以 250 m/s 射入一 2.495 kg 的木块, 木块与光滑桌面上的一根弹簧相连, 弹簧的劲度系数为 $k = 40$ N/m. 求碰撞后木块和子弹的瞬时速度以及弹簧被压缩的长度.

解 ☞ 碰撞前的动量 = 碰撞后的动量

$$0.005 \times 250 = (2.495 + 0.005)V,\ V = 0.5\text{ m/s}$$

碰撞完成后, 系统机械能守恒.

开始时的动能 = 最后弹簧的弹性势能

$$\frac{1}{2}(2.5)(0.5)^2 = \frac{1}{2}(40)x^2, \qquad x = \frac{1}{8}\text{m} = 125\text{ mm}$$

9.58 一颗 20 g 的子弹以 600 m/s 的速率水平射入桌面上静止的木块, 木块质量为7 kg; 子弹 (b) 停留在木块 (B) 中. 若木块与桌面的摩擦系数为 0.4, 求木块能滑动的距离.

解 ☞ 根据动量守恒, 碰撞后子弹与木块系统的动量为 $p = m_b v_{ob}$; 所以系统的动能为

$$K = \frac{p^2}{2(m_B + m_b)} = \frac{m_b^2 v_{ob}^2}{2(m_B + m_b)}$$

要使木块停下来摩擦力做功 $W_f = -fs = -\mu_k(m_B + m_b)gs$. 所以

$$\Delta K = W_f,\quad 0 - \frac{m_b^2 v_{ob}^2}{2(m_B + m_b)} = -\mu_k(m_B + m_b)gs$$

$$s = \frac{1}{2\mu_k g}\left(\frac{m_b v_{ob}}{m_B + m_b}\right)^2 = \frac{1}{2(0.4)(9.8)}\left[\frac{(0.20)(600)}{7.020}\right]^2 = 0.372\ (\text{m})$$

9.59 一颗 4 g 的子弹以 300 m/s 的速率水平射入静止在桌面上的木块，木块质量为0.8 kg. 如果木块与桌面的摩擦系数为 0.3，木块能滑多远？子弹的能量在碰撞过程中减少了多少？

解 ☞ 由于动量守恒，$mv_B = (M+m)V$.

$$(0.004\times 300) = (0.800 + 0.004)V \quad 得\ V = 1.493\ \text{m/s}$$

摩擦力为 $f = \mu(M+m)g$. 根据动能定理，$-fs = \Delta KE$，得

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = fs = [\mu(M+m)g]s$$

$$\frac{1}{2}(1.493)^2 = 0.3\times 9.8\ s,\quad s = 0.379\ \text{m}$$

碰撞中

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{(M+m)V^2}{mv_B^2} = \frac{m}{m+M}$$

所以消耗的部分占　$1 - \dfrac{K_f}{K_i} = \dfrac{M}{M+m} = \dfrac{0.8}{0.804} = 99.5\%$

9.60 一块 0.3 kg 的木块沿一半径为 0.1 m 的半球状碗内侧无摩擦地滑下. 在碗底木块与另一静止的 0.4 kg 的物体发生完全非弹性碰撞. 求 0.4 kg 的物体获得的冲量. 求碰撞后两物体的径向矢量与竖直方向所成的最大角 α(如图 9-9).

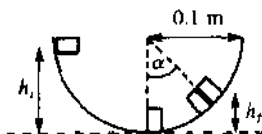


图 9-9

解 ☞ 设 v_i = 碰撞前的速度；V = 碰撞后的速度. 根据碰撞前的能量守恒，$v_i^2 = 2gh_i = 2\times 9.8\times 0.1$ 得 $v_i = 1.4$ m/s 因为水平方向没有外力作用所以动量守恒，即

$$(0.3\times 1.4) = 0.7\ V,\qquad V = 0.6\ \text{m/s}$$

0.4 kg 物体受到的冲量为 $\Delta(mv) = 0.4\times(0.6-0) = 0.24\text{N·s}$.

根据碰撞后的能量守恒，

$$h_f = \frac{V^2}{2g} = \frac{0.36}{2\times 9.8} = 0.01837\ (\text{m})$$

从图 9-9，$h_f = 0.1(1-\cos\alpha)$ 得 $\cos\alpha = 0.8163$；$\alpha = 35.3°$.

9.61 一颗 3 g 的子弹以 300 m/s 的速度向右穿过一系于长绳上 400 g 的木块. 冲量使木块获得的速度为 1.5 m/s. 求(a)子弹穿过木块后的速度，(b)子弹穿过后木块上升的高度，(c)子弹穿过木块过程中所做的功，(d)转化为热量的机械能.

解 ☞ (a)由于动量守恒，

$$\frac{3}{1000}\times 300 = \frac{400}{1000}1.5 + \frac{3}{1000}v_f \quad 即\quad 3v_f = 900 - 600 = 300,\ v_f = 100\ \text{m/s}$$

(b)根据碰撞后木块的能量守恒，

$$V_B^2 = 2gh_B \quad 即\quad 1.5^2 = 2\times 9.8\ \text{h}_\text{B} \quad 得\quad h_B = 0.1148\ \text{m}$$

(c)功 = 子弹减少的能量 = $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{1000}\right)(300)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{1000}\right)(100)^2 = 120(\text{J})$ (d)转化的热能 = (碰撞前子弹的能量) − (碰撞后子弹的能量 + 木块的能量)　运用(c)的结果，转化的热能 = $[120 - \frac{1}{2}(0.4)\cdot(1.5)^2] = 119.55(\text{J})$.

9.62 如图 9-10 所示. 把左边的单摆拉离平衡位置后释放，并与另一静止的单摆发生碰撞. (a)求碰撞前摆球的速度，碰撞后两球合在一起，(b)两球一起上升多高？用 h 表示. 设

两球的质量相等.

解 ☞ (a) $U_g = K$, 得 $v = (2gh)^{1/2}$. (b)对于该碰撞, $\boldsymbol{P}_{前} = \boldsymbol{P}_{后}$, $mv = (2m)V$, 所以 $V = v/2$; 两球构成的系统动能 $K = (2m)V^2/2$ 转化为势能 $U_g = (2m)gh'$. 新高度 $h' = V^2/2g = v^2/8g = h/4$.

9.63 设在图 9-10 中两摆球的质量不等;左边的球质量为 m_1. 当左边的摆球从如图所示的高度摆下与右边的摆球相碰并合在一起. 两球一起上升的高度为 $h/3$. 求质量 m_2 并用 m_1 表示.

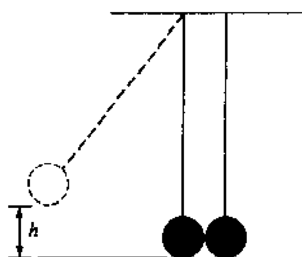


图 9-10

解 ☞ 碰撞前 m_1 的速度为 $v = (2gh)^{1/2}$, 两球一起的速度根据 $\boldsymbol{P}_{前} = \boldsymbol{P}_{后}$ 求得, 从而有 $v/V = (m_1 + m_2)/m_1$. 两球上升的高度为 $h/3$, $\Delta K = \Delta U_g$, $V = (2gh/3)^{1/2} = 3^{-\frac{1}{2}}v$ 即 $v/V = 3^{1/2}$. 根据两个速度比的方程得到 $m_2 = (3^{1/2} - 1)m_1 = 0.732\ m_1$.

9.64 若图 9-10 中的两球都放在 h 高处, 但一个在左侧, 一个在右侧. 它们被同时释放并在底部发生完全弹性碰撞. 求碰撞后两球上升的高度. 两球完全相同.

解 ☞ 因为 K 和 $\boldsymbol{P}$ 都守恒, 两球以大小相等方向相反的速度各自弹回到原来的高度.

9.65 如图 9-10 所示, 左边的小球被拉起并释放. 到底底部时的速度为 v_0, 并与右边的物体发生完全弹性碰撞. 若左边球的质量是右边球的质量的 3 倍, 求刚发生碰撞后两球的速度.

解 ☞ 由动量守恒得 $3v_0 = 3v_L + v_R$, 由动能 K 守恒得 $3v_0^2 = 3v_L^2 + v_R^2$. 消去共同项同时得 $v_L = v_0/2$ 和 $v_R = 3v_0/2$ 所以两球都向右运动.

9.66 一块 2.0 kg 的木块放在桌面的小孔上. 一颗 15.0 g 的子弹从小孔射入木块并停在木块内. 若木块能上升到桌面上方 1.30 m 处, 求子弹射入的速度.

解 ☞ $\sum p = 0$ 得 $0.015v = 2.015V$. 根据能量守恒方程, $2.015V^2/2 = 2.015\ (9.8)(1.30)$ 求得子弹和木块的速度 $V = 5.05$ m/s. 所以子弹射入的速度 v 为 678 m/s.

9.67 图 9-11 中 A 球从图中高度释放. 沿光滑导线运动并与 B 球发生碰撞. 若该碰撞为完全弹性碰撞, 求碰撞后 B 球能上升的高度($m_A = m_B/2$).

解 ☞ 碰撞前 A 球的速度由 $mgh_0 = mv_0^2/2$; $m(9.8)(1.8) = mv_0^2/2$, 所以 $v_0 = 5.94$ m/s. 因为碰撞中动量守恒, $(m_B/2)(5.94) = (m_B/2)v_A + m_Bv_B$. 因为是弹性碰撞, $(m_B/2)(5.94)^2/2 = (m_B/2)\cdot v_A^2/2 + m_Bv_B^2/2$. 同时解得 $v_B = 3.96$ m/s. 运用 $m_Bv_B^2/2 = m_Bgh$ 得 $h = v_B^2/2g = 0.80$ m.

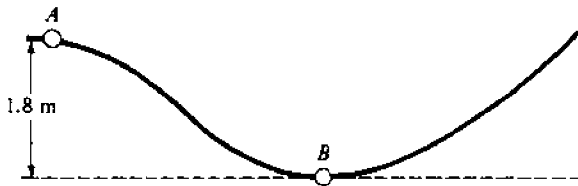


图 9-11

9.4 二维碰撞

9.68 一辆 1200 kg 的小车以 30.0 m/s 的速度向东行驶并与另一辆 3600 kg 且以 20.0 m/s 向东偏北 60°方向行驶的卡车碰撞. 两车相撞后一起运动. 求它们的共同速度.

解 ☞ $m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}$. 设 x 向东, y 指向北. 对于 x 方向的分量, (1200 kg)(30.0

m/s) + (3600 kg)(20.0 m/s)(cos60°) = (4800 kg) v_x, v_x = 15 m/s. 对于 y 方向的分量, 0 + (3600 kg)(20.0 m/s)(sin 60°) = (4800 kg) v_y, v_y = 13.0 m/s. $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ = 19.8 m/s; 由 $\tan\theta = v_y/v_x$ 得 θ = 40.9°东偏北.

9.69 质量为 1.0 kg 的 A 物体以 4.0 m/s 的速度向右运动, 与另一静止且质量为 3.0 kg 的 B 物体相碰. 由于碰撞 A 物体偏离原来的方向 50°角, 速率变为 2.0 m/s. 求碰撞后 B 的速度与 A 原来运动方向的夹角以及碰撞后 B 的速率.

解 ☞ 设向右为 x 轴方向. m_a = 1.0 kg, m_b = 3.0 kg, u_a = 4.0 m/s, u_b = 0. v_a 和 v_b 是两物体末速度的大小, v_a = 2.0 m/s 且沿 x 轴上方 50°方向. 根据动量守恒得

x 方向:

$m_a u_a = m_a v_a \cos 50° + m_b v_b \cos\phi$　　其中 ϕ 为 v_b 在 x 轴下方所成的角解得 $v_b\cos\phi$ = 0.907 m/s.

y 方向:　　$0 = m_a v_a \sin 50° - m_b v_b \sin\phi$

解得 $v_b \sin\phi$ = 0.511 m/s. 根据这两个方程求出 v_b 和 ϕ 得

$$v_b^2 = (0.907)^2 + (0.511)^2 \quad 即 \quad v_b = 1.04\ \text{m/s}, \tan\phi = \frac{0.511}{0.907} 得\ \phi = 29.4°$$

9.70 一个静止的物体分裂成三块质量相等的部分. 一部分以 20 m/s 向东运动; 第二部分以 30 m/s 向东南方向运动. 求第三部分的速度.

解 ☞ 设 x 轴向东, y 轴向北. 根据 $m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 + m\boldsymbol{v}_3 = 0$, 得在 x 方向上, 20 m/s + (30 m/s)cos45° + $v_3\cos\theta$ = 0; 在 y 方向上, 0 − (30 m/s)sin45° + $v_3 \sin\theta$ = 0, 其中 θ 是 $\boldsymbol{v}_3$ 与 x 轴正向所成的角. 解得 $v_3\cos\theta$ = −41.2 m/s; $v_3\sin\theta$ = 21.3 m/s. $\tan\theta$ = −0.516 以及 θ = 153°或西偏北 27°. 并求得 v_3 = 46.4 m/s.

9.71 三个物体构成一个独立的系统. 它们的质量分别为 m_1, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = 3m_1$. 它们的运动方向不同, 但都有相同的初始速率 v_0. 物体两两之间有一组或一组以上的弹性碰撞, 而剩下的物体间没有相互作用. 从能量的角度求出三个物体可能出现的最大末速度.

解 ☞ 三个物体开始时的总动能为 $\frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}(2m_1)v_0^2 + \frac{1}{2}(3m_1)v_0^2 = 3m_1 v_0^2$. 当有两物体的速率为零时剩下物体的速度最大. 所以 $\frac{1}{2}m_i(v_{i,\max})^2 = 3m_1 v_0^2$, 分别对 i = 1, 2, 3 运用该方程求得 $v_{1,\max} = \sqrt{6}v_0 = 2.45v_0$, $v_{2,\max} = \sqrt{3}v_0 = 1.73v_0$, $v_{3,\max} = 1.41v_0$.

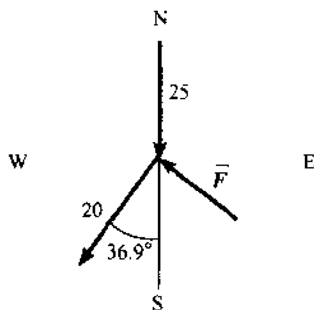


图 9-12

9.72 一只质量为 0.42 kg 的足球以 25 m/s 的速度向南运动. 一防守队员冲向该球并踢偏该球使足球的末速度为 20 m/s, 方向为南偏西 36.9°(如图 9-12 所示). 求冲量的大小. 若该队员与球接触 0.05 s, 求他施加的平均作用力的大小.

解 ☞ 选取向南和向西为正方向. 末速度的分量为以 16 m/s 向南和以 12 m/s 向西.

初动量 = 0.42×25 = 10.5 kg·m/s 向南

末动量 = (0.42 × 16) 向南　以及　(0.42 × 12) 向西

$[\Delta mv]_{南}$ = 0.42(16 − 25) = (−9 × 0.42)kg · m/s 向南

$[\Delta mv]_{西}$ = 0.42 × 12 = 5.04 kg · m/s 向西

$[\Delta mv] = [(5.04)^2 + (3.78)^2]^{1/2}$ = 6.3 kg · m/s, 冲量 = Δmv = 6.3 (N · s)

冲量 = $\overline{F}t$ = 0.05 $\overline{F}$ = 6.3,　$\overline{F}$ = 6.3 N · s/0.05 s = 126(N)

9.73 一辆 7500 kg 的卡车以 5 m/s 向东运动与一辆 1500 kg 的汽车相撞, 该汽车以 20 m/s 沿西偏南 30°的方向运动. 碰撞后两车一起运动. 求两车撞后运动的速率和方向.

解 ☞ 原来的动量如图 9-13(a)所示, 而末动量, $M\boldsymbol{v}$ 如图 9-13(b)所示. 动量在向东和向北两个方

向上守恒.所以

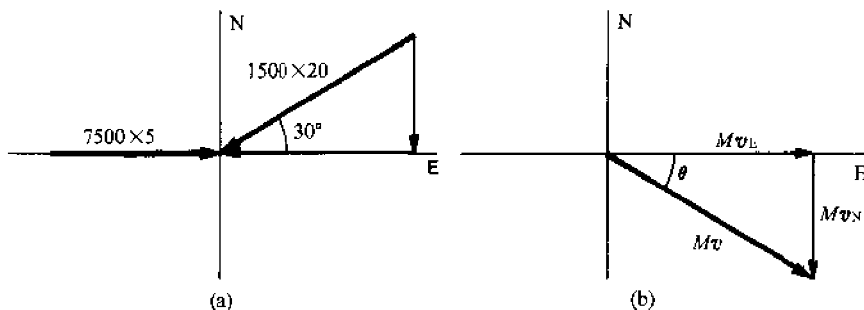


图 9-13

(碰撞前的动量)$_东$=(碰撞后的动量)$_东$ (7500 kg)(5m/s) − (1500 kg)[(20 m/s) cos30°] = Mv_E 其中 $M = 7500 + 1500 = 9000(\text{kg})$, v_E 是两车的末速度向东的分量.同理有,

(碰撞前的动量)$_北$=(碰撞后的动量)$_北$,(7500 kg)(0) − (1500kg)[(20m/s)sin30°] $= Mv_N$

由第一个方程得 $v_E = 1.28$ m/s,由第二个方程得 $v_N = -1.67$ m/s.

末速度为 $$v = \sqrt{1.67^2 + 1.28^2} = 2.1 \text{ m/s}$$

图 9-13(b)中的角 θ 为 $$\theta = \arctan\frac{1.67}{1.28} = 53°$$

9.74 一只 0.11 kg 的垒球以 17 m/s 的速度扔向打击手.球经球棒击出后,具有如图 9-14(a)所示的速度且大小为 34 m/s.若球与球棒接触时间为 0.025 s,求棒对该球平均作用力的大小.

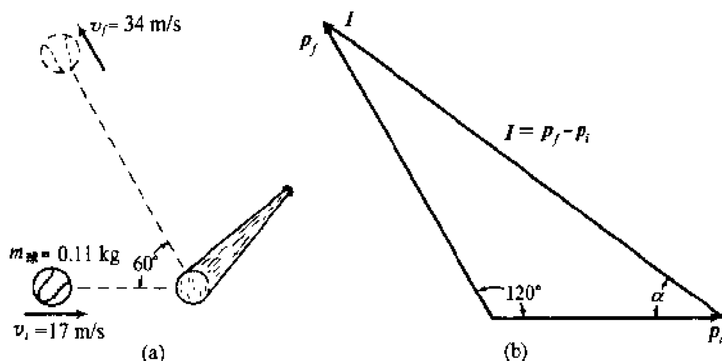


图 9-14

解 ☞ 冲量 $I = \overline{F}\Delta t$.动量与冲量关系如图 9-14(b)所示,根据余弦定理,

$$I^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_ip_f\cos120° = [(0.11)(17)]^2 + [(0.11)(34)]^2 - 2[(0.11)(17)][(0.11)(34)](-0.5)$$

$$I = (0.11)(17)(\sqrt{7}) = 4.947(\text{N}\cdot\text{s}), \overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{4.947}{0.025} = 197.90(\text{N})$$

9.75 一质量为 m 的物体与一光滑面相碰.物体初速率为 v_i 且与表面所成的角为 θ_i.物体从光滑面上弹起,因为碰撞不是弹性的,所以碰撞后速度的垂直分量大小仅为原来 $v_i\sin\theta$ 的 e 倍.(a)求该面对物体的冲量.(b)求物体离开表面时的夹角 θ_f.

解 ☞ (a) $|v_f\sin\theta_f| = e|v_i\sin\theta_i|$.因为表面无摩擦,动量的 x 分量不改变.冲量 $I_y = m[ev_i\sin\theta_i - (-v_i\sin\theta_i)] = mv_i[\sin\theta_i(1+e)]$.

(b)初速度和末速度沿 x 方向的分量相等均为 $v_i\cos\theta_i$. 从图 9-15 中得,

$$\tan\theta_f = \frac{ev_i\sin\theta_i}{v_i\cos\theta_i} = e\tan\theta_i$$

所以 $\theta_f = \arctan(e\tan\theta_i)$.

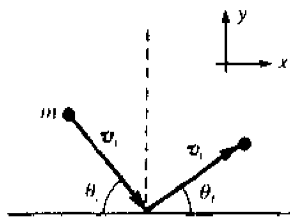


图 9-15

9.76 根据 9.75 题. (a)求物体离开桌面时的速率, (b)用 e 和 θ_i 表示末动能与初动能的比值.

解 ☞ (a)运用勾股定理求末速率 v_f 得

$$v_f = \sqrt{v_i^2\cos^2\theta_i + e^2v_i^2\sin^2\theta_i} = v_i\sqrt{1-\sin^2\theta_i + e^2\sin^2\theta_i}$$
$$= v_i\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\theta_i}$$

(b)动能的比值为 $K_f/K_i = (v_f/v_i)^2$, 所以 $(K_f/K_i) = 1-(1-e^2)\sin^2\theta_i$.

9.77 假设两个灰球沿光滑的地板运动, 如图 9-16 所示. 它们相撞以后靠在一起运动. 如果 A 球向左以 15 m/s 的速度运动, B 球向右以 25 m/s 的速度运动, 如果两球的质量相等, 求两球碰撞后的共同速度.

解 ☞ 两球组成一个系统. 该系统在水平方向不受外力. 水平方向动量守恒: $\boldsymbol{P}_{始} = \boldsymbol{P}_{末}$.

$$-m_Av_A + m_Bv_B = (m_A + m_B)v \quad 即 \quad v_B - v_A = 2v$$

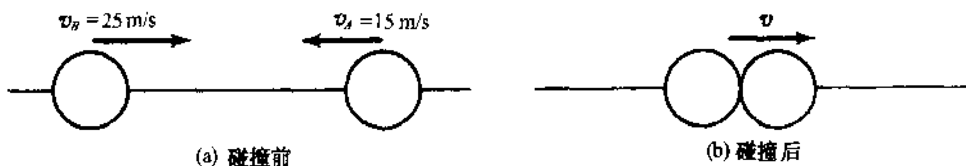


图 9.16

其中 $m_A = m_B$. 所以, $v = \frac{v_B - v_A}{2} = \frac{25-15}{2} = 5\text{m/s}$

9.78 如果 9.77 题中的两个球发生斜碰, 如图 9-17(a)所示, 碰撞后靠在一起运动. 求它们碰撞后的速度. 设 $v_A = v_B = 45$ m/s 以及 $\theta = 45°$.

解 ☞ 动量守恒的矢量形式如图 9-17(b)所示. 因为 $m_A = m_B$ 且 $v_A = v_B$, 立即可以得到 $\phi = \frac{\theta}{2} = 22.5°$, 于是 $m_Av_A\cos\frac{\theta}{2} + m_Bv_B\cos\frac{\theta}{2} = (m_A + m_B)v$ 即 $v = v_A\cos\frac{\theta}{2} = 45(0.924) = 41.58$ (m/s).

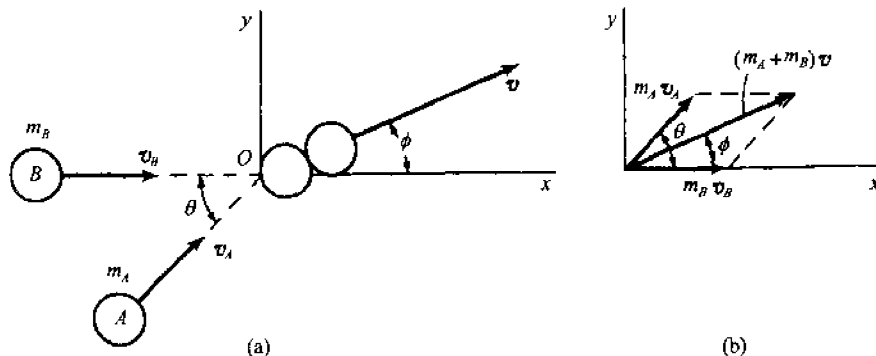


图 9.17

9.79 图 9-18 中两球相撞并按图中的方向弹开. (a)如果碰撞后 800 g 的小球的速率是 15 cm/s, , 求 500 g 小球的末速度. (b)该碰撞是完全弹性碰撞吗?

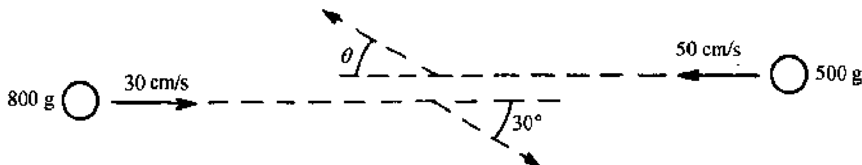


图 9-18

解 ☞ (a)根据动量守恒定律,

$$(\text{碰撞前的动量})_x = (\text{碰撞后的动量})_x$$

$$(0.80\text{kg})(0.3\text{m/s}) - (0.50\ \text{kg})(0.5\ \text{m/s}) = (0.8\text{kg})[(0.15\text{m/s})\cos 30^\circ] + (0.5\text{kg})v_x$$

从而 $v_x = -0.228$ m/s. 又因为

$$(\text{碰撞前的动量})_y = (\text{碰撞后的动量})_y$$

$$0 = -(0.8\text{kg})[(0.15\text{m/s})\sin 30^\circ] + (0.5\text{kg})v_y$$

从而 $v_y = -0.120$ m/s. 所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0.228^2 + 0.120^2} = 0.26(\text{m/s})$$

同时可以求出图 9-18 中的角 θ,

$$\theta = \arctan\frac{0.120}{0.228} = 28^\circ$$

(b)碰撞前的总动能 $=\frac{1}{2}(0.8)(0.3)^2 + \frac{1}{2}(0.5)(0.5)^2 = 0.0985(\text{J})$

碰撞后的总动能 $=\frac{1}{2}(0.8)(0.15)^2 + \frac{1}{2}(0.5)(0.26)^2 = 0.026(\text{J})$, 因碰撞中动能减少, 所以该碰撞不是完全弹性碰撞.

9.80 两条相互垂直的路上有一条行驶着 20 t(公制)的卡车, 其速度为 10 m/s. 另一条路上行驶着 1 t 的轿车, 该轿车的速度为 20 m/s 并与卡车在相交处发生碰撞. 碰撞后两车一起运动. 取 x 轴 y 轴分别沿着卡车和轿车原来的运动方向, 用单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 表示末速度.

解 ☞ 由碰撞前的动量=碰撞后的动量得 $(20000)(10)\boldsymbol{i} + (1000)(20)\boldsymbol{j} = (21000)(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j})$. 解得 $\boldsymbol{v} = (9.52\boldsymbol{i} + 0.95\boldsymbol{j})$m/s.

9.81 质量为 m 且以速率 v_0 沿 x 轴运动的物体突然分出其质量的三分之一, 该部分以 $2v_0$ 的速率沿 y 轴运动. 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 单位矢量表示物体剩下部分的速度.

解 ☞ 根据动量守恒得 $mv_0\boldsymbol{i} = (2m/3)\boldsymbol{v} + (m/3)(2v_0)\boldsymbol{j}$, 所以 $\boldsymbol{v} = 1.5v_0\boldsymbol{i} - v_0\boldsymbol{j}$.

9.82 质量为 M 的物体沿 x 轴以速率 v_0 运动, 另一质量为 m 的物体以速率 v_0 沿 y 轴运动, 两物体相碰并一起运动. 设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 为运动的方向, 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 单位矢量表示碰撞后该复合物体的速度.

解 ☞ 碰撞前动量=碰撞后动量, $Mv_0\boldsymbol{i} + mv_0\boldsymbol{j} = (m+M)\boldsymbol{v}_0$ 解之得 $\boldsymbol{v} = (Mv_0\boldsymbol{i} + mv_0\boldsymbol{j})/(m+M)$.

9.83 三个相同的物体以速度 $v_0\boldsymbol{i}$, $-3v_0\boldsymbol{j}$ 和 $5v_0\boldsymbol{k}$ 发生连续碰撞并合成一个整体。用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 单位矢量表示最终物体的速度。

解 ☞ 系统的初动量=系统的末动能: $v_0\boldsymbol{i} - 3v_0\boldsymbol{j} + 5v_0\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{v}$. 从而得到 $\boldsymbol{v} = (v_0/3)(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})$.

9.84 一质量为 m 的物体速度为 $-v_0\boldsymbol{i}$, 另一质量相同的物体速度为 $v_0\boldsymbol{j}$. 两物体相撞后, 其中一物体的速度为 $-\frac{1}{2}v_0\boldsymbol{i}$. (a)求另一物体的速度, (b)该碰撞是弹性碰撞吗?

解 ☞ (a)由动量守恒得 $-mv_0\boldsymbol{i} + mv_0\boldsymbol{j} = -mv_0\boldsymbol{i}/2 + m\boldsymbol{v}$. 解得 $\boldsymbol{v} = -v_0\boldsymbol{i}/2 + v_0\boldsymbol{j}$. (b)不是弹性碰撞. 因为碰撞前后动能不等: $mv_0^2/2 + mv_0^2/2 \neq [m(v_0^2/4 + v_0^2)]/2 + [m(v_0^2/4)]/2$.

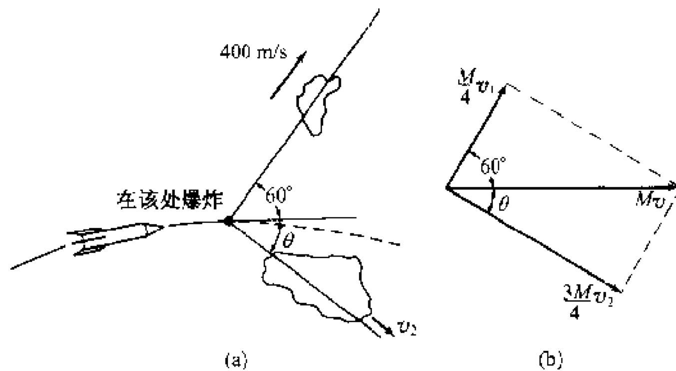


图 9-19

9.85 如图 9-19 所示，一枚质量为 M 的导弹以速度$\boldsymbol{v}$ (v = 200 m/s)运动．在空中发生爆炸并分成两个部分，质量分别为 $M/4$ 和 $3M/4$．如果较小的一块以与原来运动方向成 60°角的方向飞出，初速度为 400 m/s，求另一块的初始速度．

解 ☞ 在爆炸发生的一瞬间，重力的影响可以忽略不计．所以其它的力是内力，动量守恒．

动量守恒的矢量形式如图 9-19(b)所示．得到

$$\frac{3M}{4}\boldsymbol{v}_2 = M\boldsymbol{v} - \frac{M}{4}\boldsymbol{v}_1 \quad 即 \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{4}{3}\boldsymbol{v} - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_1$$

于是 $v_2^2 = \boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2 = \frac{16}{9}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{8}{9}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1) + \frac{1}{9}(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1) = \frac{16}{9}(200)^2 - \frac{8}{9}(200)(400)(\cos 60°) + \frac{1}{9}(400)^2 = \frac{48\times 10^4}{9}$

及 $v_2 = \frac{400}{\sqrt{3}} = 231$ (m/s)．又由 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_2 = \frac{4}{3}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_1$ 得

$(200)\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)(\cos\theta) = \frac{4}{3}(200)^2 - \frac{1}{3}(200)(400)(\cos 60°)$，　$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，　$\theta = 30°$

9.5　反冲和反作用

9.86 一门质量为 m_1 的大炮射出一发质量为 m_2 的炮弹．求大炮与炮弹在射击的瞬间动能的比值．假设炮弹是水平发射的．

解 ☞ 炮弹和大炮组成的体系一开始是静止的．

根据动量守恒

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0 \quad 即 \quad \boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$$

所以

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{p_1^2/2m_1}{p_2^2/2m_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

9.87 一发 10 g 的子弹离开枪管时的速度为 600 m/s 且向东飞行．若枪管长 1m 且枪的质量为 4 kg，求(a)枪的反冲速度；(b)子弹所受到的力；(c)子弹加速的时间；以及(d)子弹受到的冲量．假设在枪管中子弹受到恒定的力．

解 ☞ (a)根据动量守恒，扣动扳机前的动量等于子弹离开枪时的动量．以向东为正方向．在国际单位制中．

$0 = m_B v_B + m_R v_R = (0.01\text{kg})(600\text{ m/s}) + (4\text{kg})v_R$，$v_R = -1.5$ m/s 负号表示枪的反冲速度向西．

(b)运用运动方程，

$$v^2 = v_0^2 + 2as, \qquad 600^2 = 0^2 + 2a(1)$$

其中枪管的长度 $s = 1$ m．所以，

$$a = 1.8\times 10^5\text{ m/s}^2, \quad F = ma = (0.01)(1.8\times 10^5) = 1.8\times 10^3(\text{N})$$

(c)运用加速度的定义式

$$a=\frac{v-v_0}{t},\quad 1.8\times10^5\ \mathrm{m/s^2}=\frac{600\mathrm{m/s}-0}{t},\quad t=1/300\ \mathrm{s}$$

(d) 冲量 $=Ft=1.8\times10^3\times\frac{1}{300}=6(\mathrm{N\cdot s})$

检验：

$$Ft=mv-mv_0=(0.01\mathrm{kg})(600\mathrm{m/s})-0=6\ \mathrm{kg\cdot m/s}=6\ \mathrm{N\cdot s}$$

9.88 一挺机枪每秒钟向目标发射六发子弹，每只子弹的质量为 3 g，速率为 500 m/s. 求要把机枪固定在原位置所需的平均作用力. 子弹获得多少功率？

解 ☞ $\overline{F}=\frac{\Delta(mv)}{\Delta t}=\frac{6(0.003)(500)\mathrm{kg\cdot m/s}}{1\mathrm{s}}=9\mathrm{N}$

到达目标，每发子弹获得的动能 $=\frac{1}{2}(0.003)(500)^2=375(\mathrm{J})$. 所以功率 $P=(375\mathrm{J}/发)(6\ 发/\mathrm{s})=2250\ \mathrm{J/s}=2.25\ \mathrm{kW}$

9.89 某一原子的核质量为 3.8×10^{-25} kg 且保持静止. 该核是放射性的，现突然发出一质量为 6.6×10^{-27} kg 速度为 1.5×10^7 m/s 的微粒. 求该核剩下部分的反冲速度.

解 ☞ 在分裂过程中动量守恒

分裂前的动量 = 分裂后动量

$$0=(3.73\times10^{-25}\ \mathrm{kg})(v)+(6.6\times10^{-27}\ \mathrm{kg})(1.5\times10^7\ \mathrm{m/s})$$

其中 3.73×10^{-25} 是核剩余部分的质量，v 是其反冲速度. 解得

$$v=-\frac{(6.6\times10^{-27})(1.5\times10^7)}{3.73\times10^{-25}}=-2.7\times10^5(\mathrm{m/s})$$

9.90 两块质量分别为 200 g 和 500 g 的物体放在光滑的桌面上，两物体之间放有一质量不计的弹簧. 现压缩两物体使弹簧中的能量为 3.0 J. 释放后，两物体沿相反的方向运动. 求 (a)物体中心的速度，(b)500 g 物体的速度.

解 ☞ (a)因为弹簧力是内力，物体中心保持静止. (b)弹簧释放前后系统的总动量为零；所以 $0.2(v_{0.2})=0.5(v_{0.5})$. 又因为桌面是光滑的，弹性势能 $U_s=3.0\ \mathrm{J}=[0.2(v_{0.2})^2]/2+[0.5(v_{0.5})^2]/2$. 解这个表达式得到 $v_{0.5}=1.85$ m/s.

9.91 重 500 lb 的枪发射一颗 2 lb 的子弹，子弹离开枪口的速度为 1600 ft/s. 求枪的反冲速度.

解 ☞ 考察系统(枪 + 子弹). 系统在子弹发射之前的动量为零. 所以根据动量守恒，

发射前的动量 = 发射后的动量

$$0=\left(\frac{2}{32}\ \mathrm{slug}\right)(1600\ \mathrm{ft/s})-\left(\frac{500}{32}\ \mathrm{slug}\right)v$$

从中得到 $v=-6.4$ ft/s.

9.92 在 9.91 题中，如果枪在反冲时受到大小为 400 lbf 的恒定阻力，求枪需多长时间能够静止以及这段时间内枪由于反冲所移动的距离.

解 ☞ 由于枪受到 400 lbf 的阻力所以在反冲过程中枪的动量减少. 选择反冲方向为正方向，

$$冲量=mv_f-mv_0,\quad (-400\ \mathrm{lbf})t=0-\left(\frac{500}{32}\ \mathrm{slug}\right)(6.4\ \mathrm{ft/s})$$

从而 $t=0.25$ s.

因为阻力是恒定的，枪的反冲是匀减速的. 所以可以得出 $\overline{v}=\frac{1}{2}(0+6.4)\mathrm{ft/s}=3.2$ ft/s. 由 $x=\overline{v}t$ 得到反弹的距离为 $x=(3.2\ \mathrm{ft/s})(0.25\ \mathrm{s})=0.80$ ft.

9.93 一只 0.25 kg 的球以 13 m/s 的速度以 $+x$ 方向运动，受到球拍的打击后以 19 m/s 的速度向 $-x$ 方向运动. 球拍作用在球上的时间为 0.010 s. 求球拍对球的平均作用力.

解 ☞ 已知 $v_0=13$ m/s 以及 $v_f=-19$ m/s. 由冲量定理得 $Ft=mv_f-mv_0$ $F(0.01\ \mathrm{s})=(0.25\ \mathrm{kg})(-19\ \mathrm{m/s})-(0.25\ \mathrm{kg})(13\ \mathrm{m/s})$ 从中得到 $F=-800$ N.

9.94　一把 500 g 的手枪静止放在光滑的桌面上.手枪走火沿平行于桌面方向发出一发 10 g 的子弹.当子弹射到 5 m 远的墙上时手枪移动了多远?

解　☞ 设反冲方向为 x 轴正方向.因为系统的质心始终在 $x=0$ 的位置,$(500\ \text{g})x+(10\ \text{g})\cdot(-5\text{m})=0$, $x=10$ cm.

9.95　一位 20 kg 的女孩正骑着 5 kg 的小车在路上以 0.50 m/s 的速度行驶,突然一条狗拦在她的面前.她身边只有一包刚刚从百货店买来的 3.0 kg 的糖,她就以相对于原来运动 4.0 m/s 的速度把糖扔向狗.求她在扔出糖后的运动速度.

解　☞ 由女孩、小车和糖组成的系统动量守恒,$(20+5.0+3.0)(0.50)=(20+0.50)v+3.0(4.5)$;所以她现在运动的速度为 $v=0.020$ m/s.

9.96　质量为 60 kg 的人从 90 kg 的船尾向北以 3.0 m/s 的速度潜入水中.开始时船是静止的.求船所获得速度的大小和方向.

解　☞ 用 1 代表人 2 代表船.潜水前 $u_1=u_2=0$, $m_1v_1+m_2v_2=0$ 即 $(60\ \text{kg})(3.0\ \text{m/s})+(90\text{kg})\cdot v_2=0$. $v_2=-2.0$ m/s,即速度向南,大小为 2.0 m/s.

9.97　有一男孩站在轨道上一节车厢的一端.设男孩与车厢的总质量为 M.他以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 向车厢的另一端扔出质量为 m 的小球,小球与车厢壁发生弹性碰撞后又返回并运动了车厢的长度(L),与相对的车厢壁发生非弹性碰撞后停止.若车厢的轮子没有摩擦,描述车厢的运动.

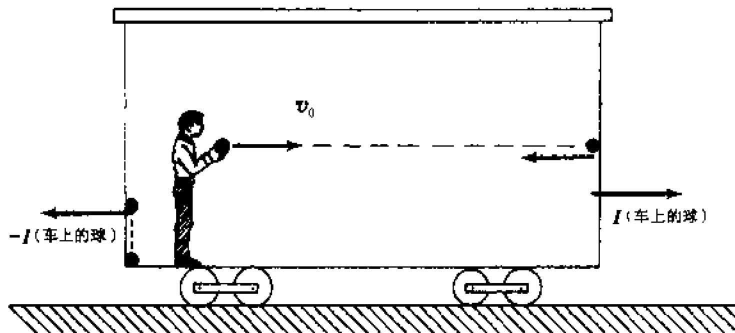


图 9-20

解　☞ 所有的力是内力(图 9-20 所示).所以如果 V 和 v 分别是车厢加男孩和球的速度,由动量守恒得

$$M\boldsymbol{V}+m\boldsymbol{v}=0\quad 即\quad \boldsymbol{V}=-\frac{m}{M}\boldsymbol{v} \tag{1}$$

在任何时刻成立.

在第一次碰撞前,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$,所以

$$\boldsymbol{V}=-\frac{m}{M}\boldsymbol{v}_0,\qquad 0<t<\frac{L}{(1+\frac{m}{M})v_0}$$

右边的时间表示球到达车厢壁所用的时间,其相对于车厢的运动速率为

$$v_0+V=v_0+\frac{m}{M}v_0$$

第一次碰撞的效果仅仅使两个速度矢量反向(由方程(1)和弹性碰撞得).所以,

$$\boldsymbol{V}=+\frac{m}{M}\boldsymbol{v}_0,\quad \frac{L}{(1-\frac{m}{M})v_0}<t<\frac{2L}{(1+\frac{m}{M})v_0}$$

最后在第二次碰撞后,小球和车厢具有相同的速度.所以,$\boldsymbol{V}=-(m/M)\boldsymbol{V}$,即

$$\boldsymbol{V} = 0, \qquad t > \frac{2L}{(1 + \frac{m}{M})v_0}$$

可见车厢先向左运动一段距离

$$\left(\frac{m}{M}v_0\right)\frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)v_0} = \left(\frac{m}{M + m}\right)L$$

接着向右运动相等的距离，在开始时的位置停止.这一结论——当小球回到车厢内的初始位置时车厢没有位移——取决于第一次碰撞是否是弹性碰撞(因为这时系统的质心保持静止).

9.98 一位 60 kg 的宇航员在太空中离开太空飞船.她离开飞船 15.0 m 并相对飞船静止.为了返回飞船，她向背离飞船的方向以 8.0 m/s 扔一 500 g 的扳手.她返回飞船需多长时间?

解 ☞ 根据 $60\ V = 0.50\ (8.0)$，她以 $V = (1/15)\text{m/s}$ 靠近飞船.所需的时间为 $t = 15.0/V = 225$ s.

9.99 铀 238(^{238}U)不稳定，衰变成钍 234(^{234}Th)和 α 粒子.α 粒子发射出的速度为 1.4×10^6 m/s.求钍 234 核的反冲速度，设铀 238 原子在衰变时静止.钍 234 与 α 粒子的质量比为 234 比 4.

解 ☞ 这是一个反冲问题，就像铀核由钍核和 α 粒子通过压缩中间的弹簧构成，开始时静止.所以 $0 = m_{\text{Th}}v_{\text{Th}} + m_\alpha v_\alpha$，即 $v_{\text{Th}}/v_\alpha = -m_\alpha/m_{\text{Th}}$.解之得 $v_{\text{Th}} = 2.39\times10^4$ m/s.

9.100 一支 4 kg 的步枪以 500 m/s 发射一颗 6 g 的子弹.求(a)子弹获得的动能，(b)步枪获得的功能，(c)子弹在枪管中时步枪后退的距离与子弹前进的距离的比值.见图 9-21.

解 ☞ (a)子弹的动能为

$$K_b = \frac{1}{2}m_b v_b^2 = \frac{1}{2}(0.006)(500)^2 = 750(\text{J})$$

(b)因为没有外力作用在系统(子弹 b 和步枪 r)上，根据动量守恒

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2, \quad 0 = m_r v_r + m_b v_b, \quad v_r = \frac{-m_b}{m_r}v_b$$

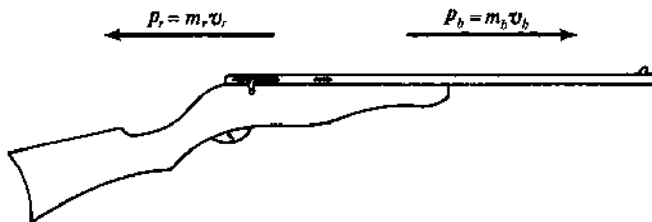


图 9-21

步枪的动能为

$$K_r = \frac{1}{2}m_r\frac{m_b^2}{m_r^2}v_b^2 = \frac{1}{2}\frac{(0.006)^2}{4}(500)^2 = 1.125(\text{J})$$

(c)由(b)得 $0 = m_r v_r + m_b v_b = m_r\dfrac{\Delta x_r}{\Delta t} + m_b\dfrac{\Delta x_b}{\Delta t}$

即 $0 = m_r\Delta x_r + m_b\Delta x_b$

这说明系统的质心静止.解之得

$$\left|\frac{\Delta x_r}{\Delta x_b}\right| = \frac{m_b}{m_r} = \frac{6}{4000} = \frac{1}{667}$$

9.101 一导弹发射车质量为 4400 kg，水平发射一枚 110 kg 的导弹并反冲到光滑的斜面上，上升 4 m 的高度(如图 9-22 所示).求导弹的初始速度.

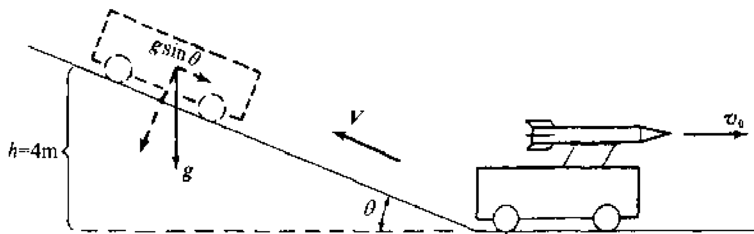


图 9-22

解 ☞ 因为发射车在上升过程中只受到重力作用,可以求出发射车刚开始向斜面运动的速度

$$0^2 = V^2 + 2(-g\sin\theta)s = V^2 - 2gh$$

即

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(4)} = 8.85\ (\text{m/s})$$

发射过程中的所有力是内力.水平方向的动量:$P_1 = P_2$.以导弹运动的方向为正方向.

$$0 = m_r v_0 - m_l V,\quad v_0 = \frac{m_l}{m_r}V = \left(\frac{4400}{110}\right)(8.85) = 354(\text{m/s})$$

9.102 一质量为 m 的男孩站在质量为 M 的雪橇上以恒定的速度 $\mathbf{V}_i$ 在冰面上滑行.若该男孩沿与 $\mathbf{V}_i$ 相反的方向在雪橇上跑动,在离开雪橇末端时相对于雪橇的速率为 v.求雪橇相对于冰面的末速度.

解 ☞ 设雪橇的末速度为 $\mathbf{V}_f$.男孩跳离雪橇时相对于冰面的末速度为 $\mathbf{V}_f - \mathbf{v}$.根据动量守恒(在冰面坐标系中),$(m+M)V_i = m(V_f - v) + MV_f = (m+M)V_f - mv_0$ 解得 $V_f = V_i + mv/(M+m)$.

9.103 一火箭竖直向上置于发射台上,喷气发动机开始喷出气体,喷气速率为 1500 kg/s.喷出的气体分子以 50 km/s 的速率离开.若火箭在发动机的推动下慢慢上升,火箭的初始质量最大为多少?

解 ☞ 因为火箭的运动与排出气体的速率相比可以忽略,我们可以假设气体从静止开始加速到速率为 50 km/s.对质量为 m 的气体提供加速度所需的冲量为

$$Ft = mv_f - mv_0 = m(50000\ \text{m/s} - 0)$$

从而

$$F = (50000\ \text{m/s})\frac{m}{t}$$

因为已知每秒放出气体的质量(m/t)为 1500 kg/s 所以作用在排出的气体上的力为 $F = (50000\ \text{m/s})(1500\ \text{kg/s}) = 7.5\times10^7\ \text{N}$.

对火箭向上的推力与力 F 大小相等,方向相反.所以发动机能推动 7.5×10^7 N 的重量,火箭的最大质量为

$$M = \frac{重量}{g} = \frac{7.5\times10^7\ \text{N}}{9.8\ \text{m/s}^2} = 7.65\times10^6\ \text{kg} = 7650\ (\text{t})$$

9.104[c] 火箭在太空中远离引力物体.如果 M 是火箭和所用燃料瞬时的质量,m 是火箭每秒放出的气体质量,V_g 是放出的气体相对于火箭的速率.求火箭质量与速度的关系.

解 ☞ 在惯性系中观察体系(气体+火箭),以火箭运动的方向为正方向.系统的总动量是恒定的.现在在很短的时间 dt 内,质量为 $m\,dt$ 的气体沿负方向以速率 $V_g - v$(相对于参照系)运动,变成云雾.云雾动量的改变为 $m(v - V_g)dt$.根据动量守恒,这一改变势必抵消火箭动量的变化,$d(Mv)$;也就是说,$m(v - V_g)dt + d(Mv) = 0$.但 $dM = -m\,dt$,所以

$$(V_g - v)dM + d(Mv) = 0 \quad 即 \quad V_g dM - v dM + M dv + v dM = 0$$

得到

$$V_g dM + M dv = 0$$

这就是火箭速度与质量关系的微分方程.

9.105[c] 已知初始条件为 v_0 和 M_0,对 9.104 题中的微分方程积分.

解 ☞ 已知 $dv = -V_g(dM/M)$；所以当 V_g 是常量，

$$\int_{v_0}^{v} dv = -V_g\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M},\quad v = v_0 + V_g\ln\frac{M_0}{M}$$

9.106[c] 根据9.104题和9.105题，某一火箭质量的减少遵循 $m = \lambda M$（λ = 常数）的关系. 求火箭的运动方程.

解 ☞ 因为 $dv = -V_g(dM/M)$ 以及 $dM = -\lambda M dt$，所以

$$dv = \lambda V_g dt \quad 即 \quad \frac{dv}{dt} = \lambda V_g = 常数$$

这是一个 $a = \lambda V_g$ 的匀加速直线运动. 所以，位移公式为 $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\lambda V_g t^2$.

9.6 质心（参见第十章）

9.107 两个物体构成的体系由一根质量不计的细杆连接并沿 x 轴放置. 0.4 kg 的物体放在 $x = 2$ m 而 0.6 kg 的物体放在 $x = 7$ m 处. 求质心在 x 轴上的位置.

解 ☞

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.4\times 2) + (0.6\times 7)}{(0.4 + 0.6)} = 5(\text{m})$$

9.108 求图9-23中系统的质心.

解 ☞

$$x_c = \frac{(5\times 0) + (4\times 0.3) + (6\times 1.0)}{5 + 4 + 6}\text{m} = \frac{7.2\ \text{kg}\cdot\text{m}}{15\text{kg}} = 0.48\ \text{m}$$

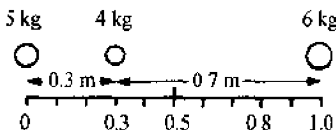


图 9-23

9.109 求从地球的中心到地球-月球这一系统质心的距离. 已知地球与月球相距 3.8×10^5km 且地球的质量为月球质量的 81.3 倍. 所求距离占地球半径 6370 km 的多大比例？

解 ☞ 设地球的中心 $x = 0$，以月球质量为单位质量.

$$x_c = \frac{(81.3)(0) + (1)(3.8\times 10^5)}{82.3} = 4.617\times 10^3(\text{km})$$

$$比例 = \frac{4.617\times 10^3}{6.37\times 10^3} = 0.725$$

说明地球-月球系统的质心在地球内部.

9.110 一氧化碳（CO）分子成哑铃状，用碳原子与氧原子的距离 d 表示该分子的质心距碳原子的距离. 碳原子的质量为 12 u，氧原子的质量为 16 u.

解 ☞ 质心 x_c 的位置为

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{12\times 0 + 16d}{12 + 16} = \frac{16d}{28} = \frac{4}{7}d$$

以碳原子处为原点.

9.111 求图9-24中系统的质心.

解 ☞

$$x_c = \frac{0 + 3m_0L + 18m_0L}{13m_0} = 1.62L$$

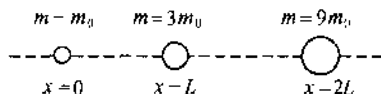


图 9-24

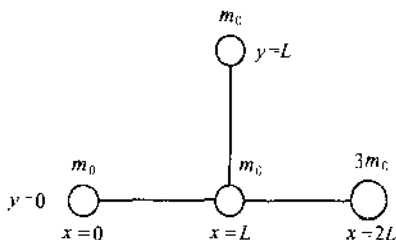


图 9-25

9.112 氯化氢分子(HCl)中氯原子中心与氢原子中心的距离为 0.13 nm. 该分子的质心距氢原子的中心多远? 氢原子和氯原子的质量分别为 1 u 和 35 u.

解 ☞

$$x_c=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}=\frac{0+35(0.13)}{36}=0.126(\text{nm})$$

9.113 求图 9-25 中体系的质心.

解 ☞

$$x_c=\frac{0+m_0L+m_0L+6m_0L}{6m_0}=1.33\ L,\quad y_c=\frac{0+0+0+m_0L}{6m_0}=0.167\ L$$

9.114 重 45 kg 的男孩与 15 kg 的女孩分别坐在跷跷板的两端. 他们相距 4 m. 质心距离 15 kg 的女孩多远? 系统的转轴应在什么位置? 忽略木板的重力.

解 ☞

$$x_c=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}=\frac{0+45\times 4}{60}=3.0(\text{m})$$

转轴最好就在质心处.

9.115 一细长均匀杆长为 L 质量为 M_1, 与另一半径为 a 质量为 M_2 的均匀圆盘相连(如图 9-26 所示). 圆盘的中心在杆的一端. 求圆盘中心距离该连接体质心的距离.

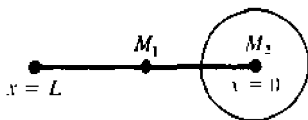


图 9-26

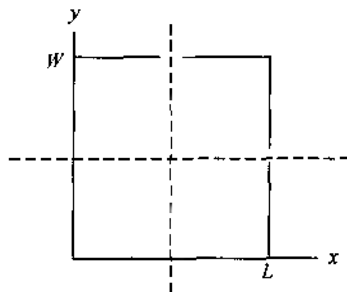


图 9-27

解 ☞ 设连接点处 $x=0$. 圆盘和杆内质心就是它们的几何中心. 用两个质点分别代表圆盘和杆.

$$x_c=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}=\frac{0+(M_1L)/2}{M_1+M_2}=\frac{LM_1}{2(M_1+M_2)}$$

9.116 一均匀导线被折成长 L 宽 W 的矩形. 若矩形的边分别与 $+x$ 和 $+y$ 轴一致, 求质心的位置.

解 ☞ 对于任意的质量分布, 质心的 x 坐标可以定义成 $\sum m_i(x_i-x_c)=0$. 现在如果质量分布关于 $x=a$ 对称, 我们就有 $\sum m_i(x_i-a)=0$; 所以就有 $x_c=a$. 对于本题而言, 对称轴分别为 $x_c=L/2$ 和 $y_c=W/2$. 所以质心位于该矩形的几何中心.

9.117 从物理上证明等边三角形的中线交于一点(三角形的中心).

证 ☞ 假设某一段均匀导线被折成三角形的形状.根据9.116题的对称原则.质心必须在每条中线上.所以三条中线交于质心.

9.118 如图9-28所示的均匀固体球内有一球形洞.求质心的位置.

解 ☞ 根据对称性,$y_c=z_c=0$.为求出 x_c,假设洞内也填有物质使整个球成为半径为 R 密度为 ρ 的均匀球.填充所成的球可以由质量为$\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ 且位于$(b,0,0)$的质点所代表.剩下的部分等效于位于$(x_c,0,0)$的质量为$\frac{4}{3}\pi(R^3-a^3)\rho$ 的质点.这两个质点的质心即为整个球的质心(0,0,0).所以,

$$\frac{4}{3}\pi(R^3-a^3)\rho x_c+\frac{4}{3}\pi a^3\rho b=\frac{4}{3}\pi R^3\rho(0)$$

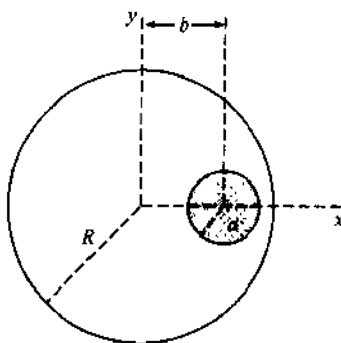


图 9-28

即

$$x_c=-\frac{a^3 b}{R^3-a^3}$$

9.119 一固定的物体由两个质量分别为3 kg和2 kg的物体通过一质量不计的杆相连而成.3 kg的物体位于 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$m 处,2 kg 的物体位于 $\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$m 处.求杆的长度和质心的坐标.

解 ☞

$$\boldsymbol{R}_c=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{3}{5}(2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})+\frac{2}{5}(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})=\frac{14}{5}\boldsymbol{i}+\frac{19}{5}\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$$

杆的长度为 $l=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$,即

$$l=\sqrt{[(2-4)^2+(5-2)^2]}=\sqrt{13}=3.61\ (\mathrm{m})$$

9.120[c] 一根长为 L 的直杆一端放在原点,另一端放在 $x=L$ 处.如果杆单位长度的质量为 Ax,其中 A 为常数.求质心的位置.

解 ☞

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int_0^L x(Ax)\mathrm{d}x}{\int_0^L Ax\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^L x^2\mathrm{d}x}{\int_0^L x\mathrm{d}x}=\frac{L^3/3}{L^2/2}=\frac{2}{3}L$$

9.121[c] 当单位长度的质量为 $Ax+B$ 时重新求解9.120题.

解 ☞ 与9.120题中的积分范围相同,求得

$$x_c=\left[\int x(Ax+B)\mathrm{d}x\right]/\left[\int(Ax+B)\mathrm{d}x\right]=[L(2AL+3B)]/(3AL+6B)$$

9.122 证明三角形的均匀金属板的质心是中线的交点.(该点亦称为重心).

证 ☞ 根据图9-29.三角形中窄条 DE(平行于 AB 边)的质心为中点 F,在中线 CM 上.根据质心的定义,容易证明若体系每个组成部分的质心在一条线上,则整个体系的质心一定也在这一条线上.因为三角形可以看成由类似 DE 的窄条组成,整个三角形的质心在中线 CM 上的某个位置.根据这一论述,可以看出三角形的质心应在它的每条中线上.所以,质心就是三条中线的交点.

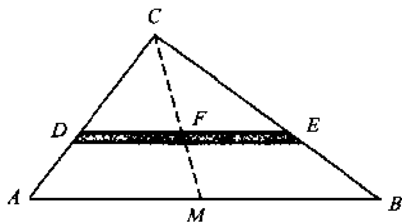


图 9-29

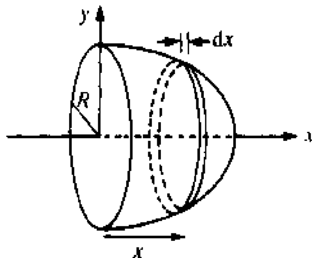


图 9-30

9.123[c] 一密度均匀的半球体半径为 R.通过积分证明其质心在对称轴上并距离平面的中心 $3R/8$.

证 ☞ 如图 9-30 所示,选取坐标系使原点位于平面的中心,半球面的平面位于 yz 面.设把半球面分成平行于平面的圆盘,圆盘在距平面 x 处的厚度为 dx,半径为 $\sqrt{R^2-x^2}$.所以圆盘的质量 $dm=\pi\rho(R^2-x^2)dx$ 其中 ρ 是半球的密度.半球的质心在 x 轴上坐标 x_c 为

$$x_c=\frac{\int_0^R x\frac{dm}{dx}dx}{\int_0^R\frac{dm}{dx}dx}=\frac{\int_0^R\pi\rho x(R^2-x^2)dx}{\int_0^R\pi\rho(R^2-x^2)dx}=\frac{\left(\frac{x^2R^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R}{\left(xR^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R}=\frac{\frac{R^4}{4}}{\frac{2R^3}{3}}=\frac{3R}{8}$$

根据 9.116 题,$y_c=z_c=0$.

9.124[c] 证明 N 个微粒组成体系的动量与一个以体系质心速度运动且其质量等于体系质量的粒子的动量相等.(接下去就可证明如果体系的动量恒定时则质心的速度也恒定.)

证 ☞ 因为

$$\sum_{i=1}^N m_i=M$$

根据定义,

$$M\boldsymbol{R}_c=\sum_{i=1}^N m_i\boldsymbol{r}_i$$

方程两边对时间微分:

$$M\dot{\boldsymbol{R}}_c=\sum_{i=1}^N m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\quad 即\quad M\boldsymbol{V}_c=\sum_{i=1}^N \boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}$$

9.125 一个 1 kg 的物体和一个 2 kg 的物体组成的系统开始时静止且两物体中心间距离为 1 m.2kg 的物体在 1 kg 物体的右侧.(a)体系的质心距离 1 kg 物体的质心多远?(b)从 $t=0$s 起,有一个向右的大小为 2 N 的力作用在 2 kg 的物体上.求最终加速度,(c)2kg 的物体在 $t=0$s 与 $t=1$ s 内移动了多远?(d)$t=1$s 时质心距离 1 kg 的物体多远?(e)质心在 $t=0$ s 和 $t=1$ s 时相距多远?(f)从 $t=0$s 起,质心的加速度是多大?(g)如果两物体的质量集中在质心,让向右的大小为 2 N 的力作用在此质心上.求系统的加速度.(h)说明由(f)和(g)的结论所得出的一般规律.

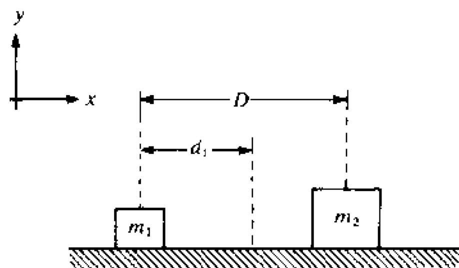


图 9-31

解 ☞ (a)开始时的位置如图 9-31 所示.系统的质心在物体 1 和物体 2 之间,距离物体 1 的距离为 d_1,从而得到 $m_1d_1=m_2(D-d_1)$.因为 $D=1$ m, $m_1=1$ kg, $m_2=2$ kg,得到 $d_1=\frac{2}{3}$m.(b)运用牛顿第二定律,得到 $a_2=F_2/m_2=(2\text{N})\div(2\text{ kg})=1.00\text{ m/s}^2$ 向右.(c)由匀加速运动方程得 $s_2=\frac{1}{2}a_2t^2=0.5(1.00)(1.00^2)=0.50$ m.(d)与前面一样,可得到 $m_1d'_1=m_2(D'-d'_1)$,所以 $d'_1=2D'/3=[2(1.5\text{m})]/3=1.00$ m.(e)质心向右移动 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$m.(f)质心在 x 轴上的坐标 $x_c=(m_1x_1+m_2x_2)/(m_1+m_2)=(x_1+2x_2)/3$.所以 $a_c=(a_1+2a_2)/3$.因为 $a_1=0$, $a_c=2a_2/3=\frac{2}{3}$m/s^2 向右.(g)该题中 $a=F/(m_1+m_2)=2\text{N}/3\text{ kg}=\frac{2}{3}$m/s^2 向右.(h)系统质心运动的加速度为 $a_c=F/M$,其中 $F\equiv\sum F_{外}$为所有作用在系统上的外力之和,$M\equiv\sum_n m_n$ 是系统的总质量.

第十章　刚体静力学

10.1　刚体的平衡

10.1　重 200 N 的均匀杠杆上挂一个 450 N 的重物，如图 10-1 所示. 求两杠杆两端所受支持力的大小.

解 ☞　研究对象(杆)受到的力如图 10-1 所示. 因为杠杆是均匀的，重心就是其几何中心. 所以杠杆的重力(200 N)作用在杆的中心.(见题 10.80)F_1、F_2 为杠杆受到的支持力.

我们可以写出两个平衡方程：$\sum F_y = 0$ 和 $\sum \tau = 0$. 杠杆在 x 方向不受力，$\sum F_y = 0$ 就写成 $F_1 + F_2 - 200\ \text{N} - 450\text{N} = 0$. 根据 10.66 题知转动轴可以任意选择. 以 A 点为转动点，则 F_1 通过 A 点而不产生力矩. 力矩方程写成 $-(200\ \text{N})(L/2) - (450\text{N})(3L/4) + (F_2)(L) = 0$. 方程两边同时除以 L 解出 $F_2 = 438\ \text{N}$.
把 F_2 的值代入到第一个方程得到 $F_1 = 212\text{N}$.

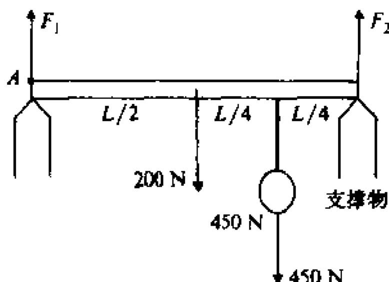


图 10-1

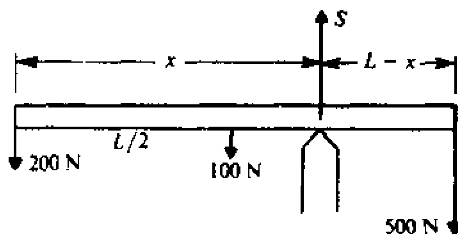


图 10-2

10.2　一根重为 100 N 的均匀直管作为杠杆使用，如图 10-2 所示. 如果杠杆的一端挂 500 N 的重物而另一端挂 200 N 的重物时达到平衡，则支点应如何放置？支点承受多重的力？

解 ☞　作用力如图 10-2 所示. 我们假设支点距离杠杆的一端为 x 并取支点为转动点. 于是力矩方程 $\sum \tau = 0$ 就写成

$$(200\ \text{N})(x) + (100\ \text{N})(x - \frac{L}{2}) - (500\text{N})(L - x) = 0$$

化简为 $(800\ \text{N})(x) = (550\text{N})(L)$，得到 $x = 0.69L$. 所以支点应放在距较轻端 $0.69\ L$ 处.

根据 $\sum Fy = 0$，即 $S - 200\text{N} - 100\text{N} - 500\text{N} = 0$，从而得到支点承受的力 $S = 800\text{N}$.

10.3　重 800 N 的物体应挂在 100 N 的均匀杆上什么位置能使杆一端的小孩承受的力是另一端大人承受力的三分之一？

解 ☞ 在图 10-3 中，设小孩受到的力为 P，成人承受的力为 $3P$. 以左端为转动点，则力矩方程写成

$$-(800\text{N})(x) - (100\text{N})(L/2) + (P)(L) = 0$$

第二个方程可以写成

$\sum F_y = 0$　即　$3P - 800\text{N} - 100\text{N} + P = 0$
从而得 $P = 225\text{N}$. 将该值代入到力矩方程得到 $(800\text{N})(x) = (225\text{N})(L) - (100\text{N})(L/2)$ 从而解得 $x = 0.22L$. 重物应挂在距成人 $0.22\ L$ 处.

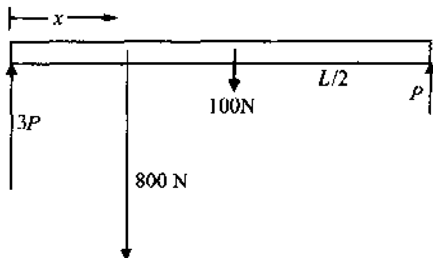


图 10-3

10.4　一重为 200 N 的均匀板长为 L，在上面挂有两重物，300 N 的物体距一端 $L/3$，400 N 的物体距同一端为 $3L/4$(见图 10-4). 要使木板平衡应另外施加多大的力？

解 ☞ 当木板平衡时 $\sum F_y = 0$，故力的大小 $P = 400\text{N} + 200\text{N} + 300\text{N} = 900\text{N}$. 选择 A 点为转动点，根据 $\sum \tau = 0$ 得

$$(P)(x) - (400\text{N})(3L/4) - (200\text{N})(L/2) - (300\text{N})(L/3) = 0$$

利用 $P = 900\text{N}$，解得 $x = 0.56L$. 所以需要向上的 900 N 的力，作用在距离左端 0.56 L 处.

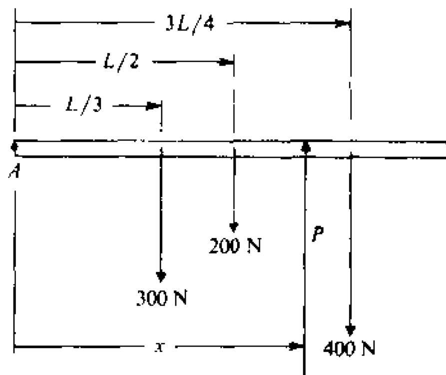


图 10-4

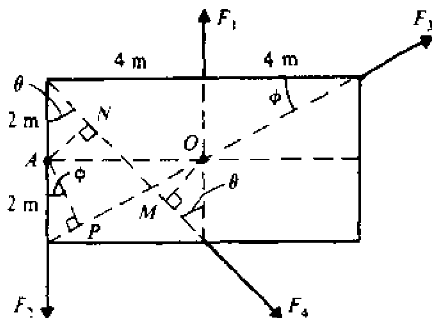


图 10-5

10.5 在图 10－5 中有四个力作用在一块木板上，这些力与木板平行.(a)求以 O 点为转动轴(轴与平面垂直交于 O)时的力臂，(b)求以 A 点为转动轴时的力臂.

解 ☞ (a)根据定义，力臂是从轴到作用力所在线的垂直距离. 当以 O 点为转轴：

力	力臂	转动方向
F_1	0	
F_2	$\overline{OA} = 4\text{m}$	ccw
F_3	0	
F_4	$\overline{OM} = 2\sin\theta = 1.41$	ccw

其中"ccw"指逆时针. 由 $\tan\theta = 4/4 = 1.00$ 得角 $\theta = 45°$.

(b)当以 A 点为转轴

力	力臂	旋转方向
F_1	$\overline{OA} = 4\text{m}$	ccw
F_2	0	
F_3	$\overline{AP} = 2\cos\phi = 2\cos 27° = 1.78\text{m}$	ccw
F_4	$\overline{AN} = 2\sin\theta = 1.41\text{m}$	cw

其中"cw"代表顺时针. 角 ϕ 由 $\tan\phi = \dfrac{4}{8} = 0.50$ 决定.

10.6 如图 10-5 所示，求出(a)以 O 点为支点，(b)以 A 点为支点各力的力矩.

解 ☞ 力臂如题 10.5 所示，以逆时针方向的力矩为正，得到

力	(a)以 O 点为支点的力矩	(b)以 A 点为支点的力矩
F_1	0	$4F_1$
F_2	$4F_2$	0
F_3	0	$1.78F_3$
F_4	$1.41F_4$	$-1.41F_4$

10.7 如果 $L=3.0$ m,计算图 10-6 中以 A 点为支点的各力的力矩.

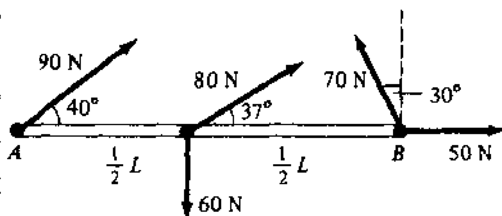


图 10-6

解 ☞ 首先把 90 N、80N 和 70 N 这三个力分成 x 和 y 方向的两个分量. 90 N 和 50 N 力的作用线以及 80 N 和 70 N 力的 x 分量通过支点,故不会导致转动. 所以关于 A 点的力矩 $=(80\sin37°)(1.5)-60(1.5)+(70\cos30°)\cdot(3.0)=72-90+182=+164$ N·m. 正号表示沿逆时针方向旋转.

10.8 如图 10-7 所示的均匀杆重 40 N 且受力如图. 求要使杆平衡还需施加力的大小、位置及方向.

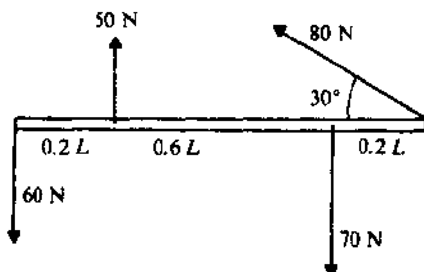


图 10-7

解 ☞ 设该平衡力 F 的分量为 F_x、F_y 且作用在距杆的左端 x 的位置处. 以杆的长度 L 为单位长度. 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-80\cos30°=0$, 即 $F_x=69.3$ N. 由 $\sum F_y=0$ 得(不要忘记杆的重量) $F_y+50+80\sin30°-60-70-40=0$, 即 $F_y=80$ N. 以左端为支点,把 80N 的力分成垂直和水平方向的分量,作用在杆上力的 x 分量力臂为零. 由 $\sum\tau=0$ 得 $(0.2)(50)+(x)(80)+(80)(\sin30°)-(0.8)(70)-(0.50)(40)=0$, $x=0.325$. 力的大小为 106 N 且与正方向成 49°角.

10.9 力 $\boldsymbol{F}=6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$(N)作用在点 $x=0$, $y=5$ m 处. 求该力对原点的力矩.

解 ☞ 力臂 y 方向的分量为 0, x 方向的分量为 5 m. 所以力矩 $=-(6\text{ N})(5\text{ m})=-30$ N·m

10.10 力 $\boldsymbol{F}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$(N)作用在点 $x=4$ m, $y=5$ m 处. 求该力对原点的力矩.

解 ☞ 关于原点的力矩为 $F_yx-F_xy=(3\text{ N})(4\text{ m})-(-2\text{ N})(5\text{ m})=+22$ N·m

10.11 重 120 N 的均匀杆由两根绳子吊住如图 10-8 所示. 有一重 400 N 的物体挂在距离左端四分之一杆长的位置. 求 T_1、T_2 以及左边绳子所成的角 θ.

解 ☞ 重力作用在重心,由 $\sum F_x=0$ 得 $T_1\sin30°-T_2\sin\theta=0$, 即 $T_2\sin\theta=0.50T_1$. 由 $\sum F_y=0$ 得到 $T_1\cos30°+T_2\cos\theta-120-400=0$, 即 $T_2\cos\theta+0.866T_1=520$ N. 以左端为支点且把 T_1 分成 x 分量和 y 分量, $\sum\tau=0$ 得 $LT_1\cos30°-(0.25L)(400)-(0.5L)(120)=0$. 消去 L 解得 $T_1=185$ N. 代入前两个方程得到

$$T_2\sin\theta=92.5\text{ N}\quad 和 \quad T_2\cos\theta=360\text{ N}$$

把两式相除得到 $\tan\theta=0.257$, $\theta=14.4°$. 所以 $0.249T_2=92.5$, $T_2=371$N. 我们可以通过取另一点为支点来检验结果的正确性,本题中选杆的右端为支点.

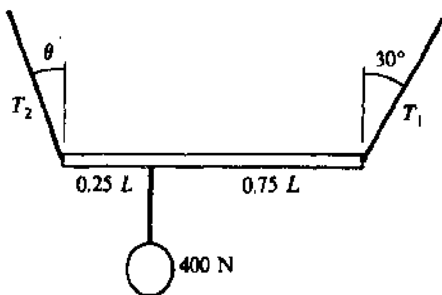


图 10-8

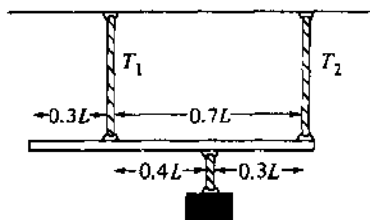


图 10-9

10.12 如图 10-9 所示,木板均匀且重为 500 N. 要使 T_1 和 T_2 相等, W 应为多大?

解　☞ 计算 W 的悬挂点受到的力矩，则　$T_1(0.4L)+T_2(0.3L)+500(0.2L)=0$. 设 $T=T_1=T_2$，则 $T=1000$ N. 根据 $\sum F_y=0$，得 $2T-W-500=0$，所以 $W=1500$ N.

10.13　在 10.12 题的情况下，如果 $W=800$ N，求 T_1 和 T_2.

解　☞ 由 10.12 题知，　$0.4T_1+0.3T_2+100=0$ 以及 $T_1+T_2-800-500=0$，解得 $T_1=700$ N，$T_2=600$ N.

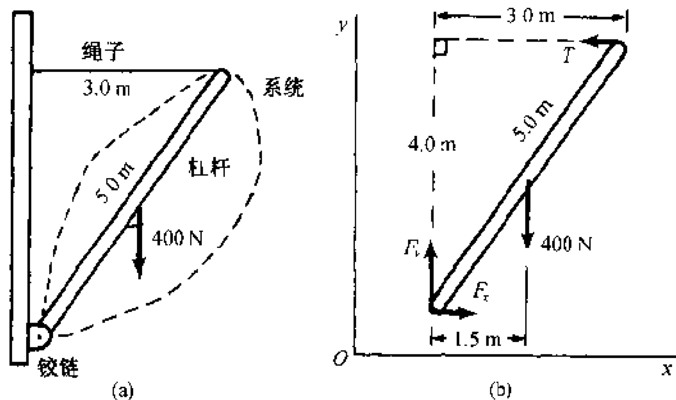


图 10-10

10.14　一根均匀杆重 400 N，长为 5.0 m，下端由一摩擦可忽略的铰链固定在墙上. 一根长 3.0 m 的绳子把杆的上端与墙连在一起. 求绳子对杆的作用力[见图 10-10(b)]以及铰链对杆的作用力的水平和垂直分量.

解　☞ 建立一个坐标系使 x 轴水平指向右 y 轴竖直指向上. 以杆为研究系统[见图 10-10(a)]并考虑作用在上面的所有力[见图 10-10(b)].

把铰链对杆的作用力分解成水平方向的分量 F_x 和竖直方向的分量 F_y. 重力作用在杆的质心. 绳子对杆施加一向左的力 T.

讨论以通过铰链且垂直于杆的水平轴为转轴的力矩. F_x 和 F_y 的力臂为零，这两个力关于转轴的力矩为零. 400 N 的重力力臂为 1.5 m，力 T 的力臂等于从铰链到绳子沿墙壁的距离 $\sqrt{(5.0)^2-(3.0)^2}=4.0(\mathrm{m})$. 由力矩方程得

$$\sum \tau = T(4)-400(1.5)=0 \quad 即 \quad T=150\ \mathrm{N}$$

由受力条件得

$$\sum F_x = F_x - T = 0 \quad 即 \quad F_x = T = 150\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_y = F_y - 400 = 0 \quad 即 \quad F_y = 400\ \mathrm{N}$$

10.15　一根重量不计的支杆一端固定在墙上且另一端被一根线拉住(如图 10-11). 一块重为 100 N 的物体挂在杆的另一端. 求绳上的拉力以及铰链处杆所受力的水平和竖直分量.

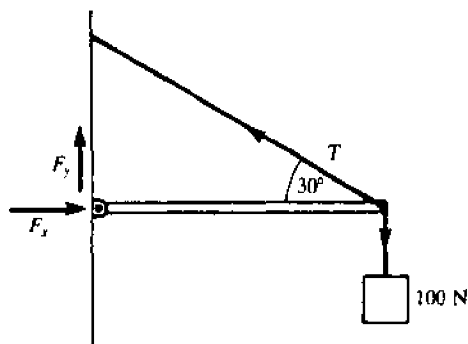


图 10-11

解　☞ 因为作用在杆上的力仅作用在最左端和最右端两个点，所以 $F_y=0$. 所以若以杆的右端为转轴求力矩，只有 F_y 起作用. 由 $\sum\tau=0$ 得 $F_y=0$. 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-T\cos30°=0$ 即 $F_x=0.866T$. 由 $\sum F_y=0$ 得 $T\sin30°$

$-100=0$，即 $T=200$ N.
所以 $F_x=173$ N. 注意 T 的垂直分量与 100 N 的重力大小相等从而使得杆的右端受到的静力沿杆的方向.

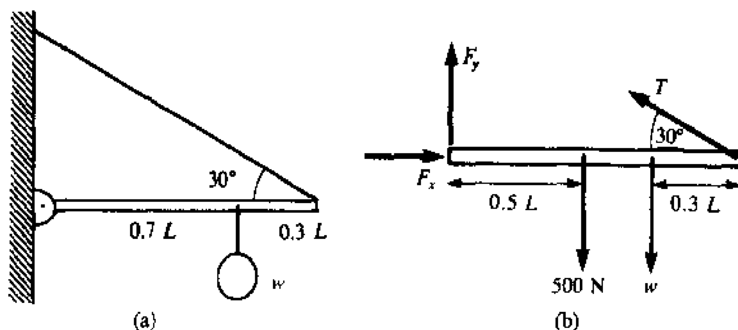


图 10-12

10.16 如果杆重 60N，重新求解 10.15 题.

解 ☞ 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-T\cos30°=0$，即 $F_x=0.866T$. 由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y+T\sin30°-60\text{N}-100\text{N}=0$，即 $F_y+0.50\text{T}=160\text{N}$. 以杆的右端为转轴求解力矩时只有 F_y 和杆的重力力臂不为零. 由 $\sum\tau=0$ 得 $-LF_y+(L/2)60\text{N}=0$. 因为方程的两端可以消去杆长 L，故不需知道它的值. 解之得 $F_y=30\text{N}$. 根据受力方程我们得到 $T=260$ N，$F_x=225$ N.

10.17 在图 10-12(a)中均匀杆重 500 N. 如果绳子能承受 1800 N 的力，则重物 W 至多有多重？

解 ☞ 杆所受的力如图 10-12(b)所示. 要求 W_{max} 应知道 W 与 T 的关系. 为此以杆的左端为支点计算力矩. 把 T 分成垂直和水平两个分量，则 T_x 力臂为零. 由 $\sum\tau=0$ 得 $LT\sin30°-(0.5L)(500)-0.7LW=0$. 消去 L 解得 $W=0.714T-357$ N. 已知 $T=T_{max}=1800$ N，则 $W_{max}=928$ N.

10.18 一根轻杆的左端固定在墙上而另一端被一根绳子拉住，如图 10-13 所示. 求(a)绳上的拉力 T 和(b)铰链处杆受到的力 $\boldsymbol{F}$ 的方向.

解 ☞ (a)为求 T 我们以通过铰链的轴为转轴求力矩，设杆长为 L. 由 $\Sigma\tau=0$ 得 $-(\sin53°)(80)+(\cos53°)(T)=0$ 即 $T=106$ N. (b)以杆的右端为转轴求力矩，由 $\sum\tau=0$ 知 $F=0$ 或力臂等于零. 因为 F 显然不为 0，所以力臂为零，$\boldsymbol{F}$ 一定沿杆的方向.（如果考虑杆自身的重力，则杆上的力有两个以上的作用点，就不能向本题那样讨论.）

10.19 图 10-13 中的杆重 40 N，且重心距离杆的左端为全长的三分之一. 求张力 T 和铰链处作用在杆上的力的大小和方向.

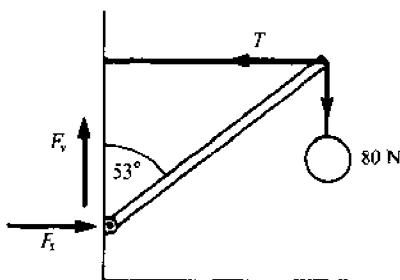


图 10-13

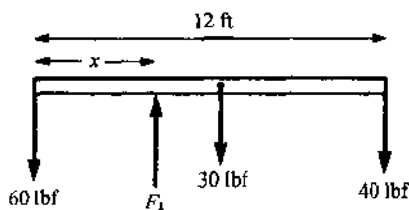


图 10-14

解 ☞ (a)与 10.18 题相同，以过铰链的轴为转轴求力矩从而解出 T. 由 $\sum\tau=0$ 得 $-(\sin53°)\cdot(80)-(\frac{1}{3})(\sin53°)(40)+(\cos53°)(T)=0$，即 $T=124$ N. 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-T=0$，即 $F_x=T=$

124N. 由 $\sum F_y = 0$ 得 $F_y - 40 - 80 = 0$, 得 $F_y = 120$ N. $F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = 173$ N. $\theta = \arctan(Fy/Fx) = 44.1°$沿 x 轴向上.

10.20 某人挑着长 12 ft 的扁担,扁担两端分别挂着 40 lb 和 60 lb 的重物. 扁担均匀且重为 30 lb. 此人应在何处挑起扁担才能保持平衡?

解 ☞ 受力示意图如图 10-14 所示. 由 $\sum F_y = 0$ 得 $F_人 - 60 - 30 - 40 = 0$, 即 $F_人 = 130$ lbf. 因为 x 方向不受力故 $\sum F_x = 0$ 不需要. 以左端为支点求力矩, 由 $\sum \tau = 0$ 得$(6)(30) + (12)(40) - xF_人 = 0$. 把 $F_人$的值代入上式得 $x = 5.1$ ft, x 为距离 60 lb 重物的长度. (该题中以顺时针方向为正方向.)

10.21 如图 10-15(a)所示,重 1600 N 的均匀杆一端铰在墙上另一端被绳子拉起. 求绳子上的张力 T 和铰链处力的分量.

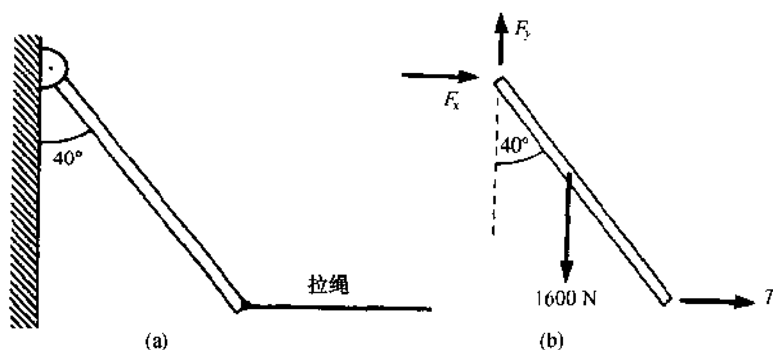


图 10-15

解 ☞ 杆受到的力如图 10-15(b)所示,铰链处的力已分成分量. 由牛顿第一定律 $\sum F_x = 0$ 得 $F_x + T = 0$, $F_x = -T$. 由 $\sum F_y = 0$ 得 $F_y - 1600\ \text{N} = 0$, 即 $F_y = 1600$ N. 要求 F_x 和 T, 我们必须运用平衡的第二条件. 以通过铰链的轴为转轴求力矩, 因为 F_x 和 F_y 的力臂为零. 设杆长为 L, 由 $\sum \tau = 0$ 得$(\cos 40°)(T) - (\frac{1}{2})(\sin 40°)(1600\ \text{N}) = 0$ 得 $T = (\tan 40°)(800\ \text{N}) = 671$ N. 最终得到 $F_x = -671$ N, 方向与图 10-15(b)所设的方向相反.

10.22 图 10-16 中均匀杆重为 60 N. 如果 $W = 200$N, 求绳上的张力和墙上铰链处力的 x 分量和 y 分量.

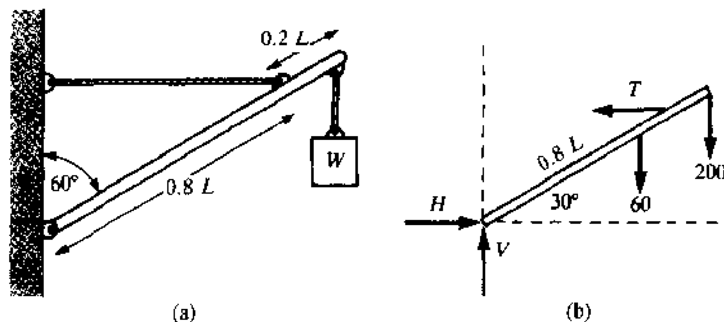


图 10-16

解 ☞ 以铰点为支点求力矩, $-60(0.5L\cos 30°) - 200(L\cos 30°) + T(0.8L\sin 30°) = 0$, 故 $T = 500$ N. 由 $\sum F_x = 0$, $-T + H = 0$ 得 $H = 500$ N. 由 $\sum F_y = 0$, $V = 200 + 60 = 260$ N.

10.23 忽略图 10-17(a)中的杆重,用 W 表示绳上的张力以及铰链处力的分量. 若均匀杆重为$\frac{1}{2}W$ 再次求解.

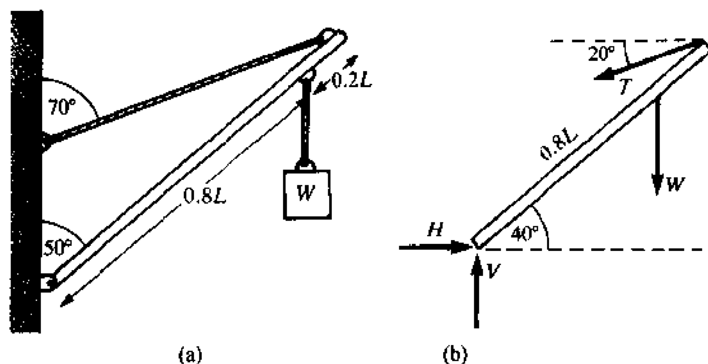


图 10-17

解 ☞ 根据图 10-17(b),以铰链处为支点求力矩, $-W(0.8L\cos40°)+(T\cos20°)(L\sin40°)-(T\sin20°)(L\cos40°)=0$. 从而得到 $T=1.80\ W$. 由 $\sum F_x=0$, $H-T\cos20°=0$, 得 $H=1.69\ W$. 由 $\sum F_y=0$, $V-W-T\sin20°=0$, 得 $V=1.62\ W$. 如果杆有重量,杆的中间应加上竖直向下的力 $W/2$. 对于铰链产生的力矩为 $-(W/2)(0.5L\cos40°)$. 把该项加到上述方程中得到 $T=2.35\ W$, 从而 $H=2.21\ W$, $V=2.30\ W$.

10.24 在图 10-17(a)中,如果绳子能承受的最大拉力为 1000 N,并且均匀杆的重为 200 N,则图中所示的重力 W 最大为多少?

解 ☞ 采用与 10.23 题相同的方法,只是重心处的力为 200 N 且 $T=1000$ N: $(-W)(0.8L\cos40°)-(200)(0.5L\cos40°)+(1000\cos20°)(L\sin40°)-(1000\sin20°)(L\cos40°)=0$, 解得 $W=430$ N.

10.25 一块展示屏被一根与水平方向成 37°的绳拉住且屏的上方靠近竖直墙壁的一端固定在托架上. 屏重 150 N. 如图 10-18 所示. 求绳上的拉力和托架对屏的作用力.

解 ☞ 屏所受的力如图 10-18 所示,托架对屏的力分成 x 和 y 方向的分量. 以过托架的轴为转轴求力矩且设屏的宽为 L. 我们把 T 分成 x 和 y 两个分量. 由 $\sum\tau=0$ 得 $T\sin37°-(\frac{1}{2})(150)=0$, 得 $T=125$N. 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-T\cos37°=0$, 即 $F_x=100$ N. 由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y+T\sin37°-150=0$, 即 $F_y=75$ N. 可见 T 的竖直分量与 F_y 相等.

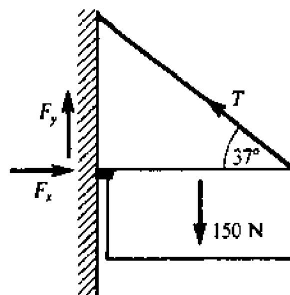


图 10-18

10.26 图 10-19(a)中的均匀杆重 500 N,且挂有 700 N 的重物. 求绳上的张力和铰链处杆所受到的力.

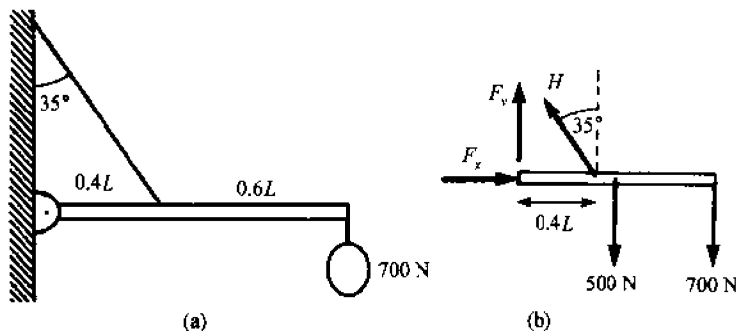


图 10-19

解 ☞ 杆受到的力如图 10-19(b)所示. 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-H\sin35°=0$, 即 $F_x=0.574\ H$. 由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y+H\cos35°-500-700=0$, 即 $F_y+0.819\ H=1200$ N. 以过铰链的轴为转轴求力矩得到一个只有 H 为未知数的方程. H_x 的力臂为零而 $H_y=H\cos35°$ 的力臂为 0.4 L. 由 $\sum\tau=0$ 得 $0.4\ LH\cos35°-(0.5L)(500\text{N})-L(700\text{N})=0$, 消去 L 解得 $H=2896$ N. 根据 x、y 方向的分量方程得到 $F_x=1662$ N, $F_y=-1172$ N, 表明铰链处的竖直力方向向下. 适用 $F=(F_x^2+F_y^2)^{1/2}$ 以及 $\tan\theta=F_y/F_x$ 求得 F 的大小和方向: 2036 N, 沿水平正方向向下 35°.

10.27 某人握住一 20 N 的重物如图 10-20(a)所示. 求支撑的肌肉上的拉力以及肘处力的分量. 假设整个系统可以近似为图 10-20(b), 其中 T_m 为肌肉的拉力, 杆为下方的肌肉, 重为 65N, 重心如图所示.

解 ☞ 设 H 和 V 为作用在肘上的力. 以铰链为支点求得的力矩为零: $+3.5T_m\sin70°-10(65)-35(20)=0$, 从而解得 $T_m=410N$. 由水平方向和竖直方向的合力为零解得 $H=410\cos70°=140$N 和 $V+410\sin70°=65+20$, $V=300$ N(向下).

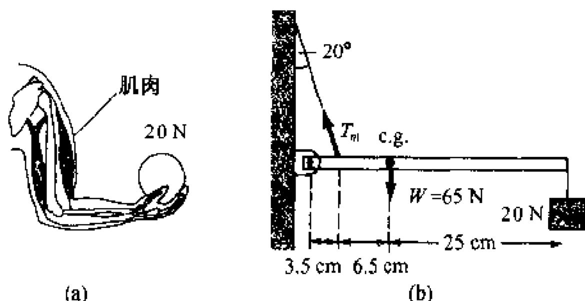


图 10-20

10.28 如图 10-21(a)所示, 一女子拿起一只 60 N 的保龄球. 求当她的后背水平时后背肌肉的拉力和脊椎处的压缩力. 这种状况近似用 10-21(b)表示, 假设身体上部重为 250 N, 重心如图所示.

解 ☞ 为求力矩之和最方便的点是铰链处. 力矩方程为 $+60L-(2L/3)(T_m\sin12°)+250(L/2)=0$, 解得 $T_m=1335$ N. 又由 $T\cos12°-H=0$, 得 $H=1305$ N.

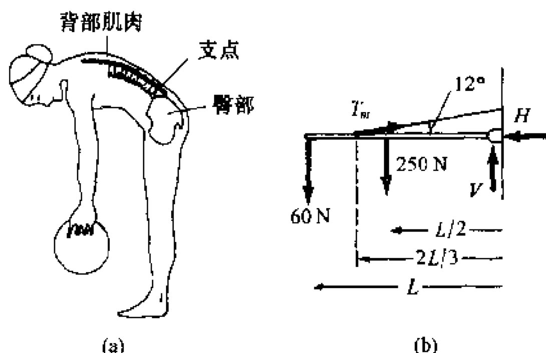


图 10-21

10.29 当一个人踮着站立并保持平衡时情况如图 10-22(a)所示. 我们可以用图 10-22(b)中的模型代替实际情况. 用地面对脚趾的推力 F 表示(a)脚踵腱的拉力和(b)脚踝处的力 H 和 V.

解 ☞ 把 T 和 F 分成平行于杆和垂直于杆的分量[如图 10-22(c)所示]. 由关于 A 点的力矩 $=V(L/4)-LF\cos30°=0$, 得 $V=3.47F$. 由关于 B 点的力矩, $-(L/4)T\sin70°+(3L/4)F\cos30°=0$

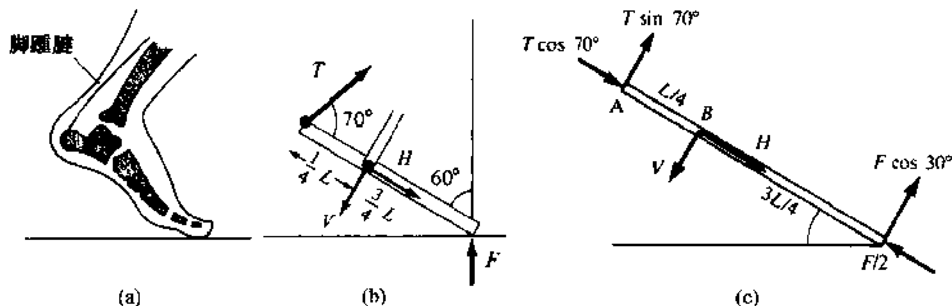


图 10-22

得 $T=2.77F$. H 可由平行于杆方向的合力为零求得，$H-F/2+T\cos70°=0$，故 $H=0.45F$背离 A 点.

10.30 (a)考虑图 10-23 中不计重量的物体.如果 $T_1=40$ N,要使物体保持平衡则 T_2, V, H 应为多大? (b)如果 T_2 沿水平向下 37°,求 T_2, V 和 H 的大小?

解 ☞ (a)以右上角为支点求力矩.只有 H 的力臂不为零,所以 $HL=0$,即 $H=0$.由 $\sum F_x=0$ 得 $-T_2+H-T_1\cos37°=0$, $T_2=0.8T_1$;由 $\sum F_y=0$ 得 $V+T_1\sin37°=0$, $-V=0.6\ T_1$.因为 $T_1=40$ N 所以 $T_2=32$ N, $V=-24$ N, $H=0$.

(b)方程变为 $-HL-(0.6T_2)(2L)=0$, $-0.8T_2+H+0.8T_1=0$ 和 $V+0.6T_1-0.6T_2=0$.因 $T_1=40$ N,解方程得 $T_2=16$ N, $V=-14.4$ N 和 $H=-19.2$ N.

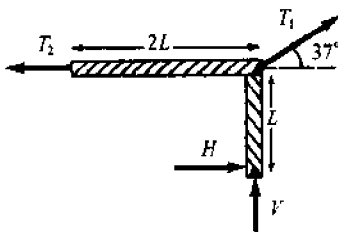


图 10-23

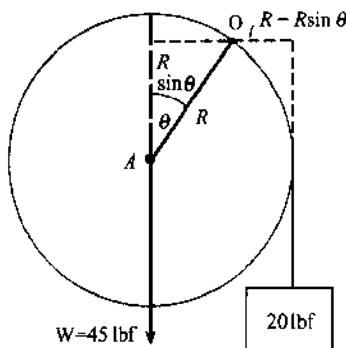


图 10-24

10.31 一直径为 2.40 ft 的扁平均匀圆柱形钢板重为 45.0 lbf.该钢板固定在过边缘一点的转轴上(图 10-24 中的 O 点).一个 20.0 lbf 的重物被绕在圆柱上的一根绳子拉住.求系统平衡时半径 OA 与竖直方向所成的角.

解 ☞ 对 O 点求力矩:

顺时针方向力矩 = 逆时针方向力矩

$$20(R-R\sin\theta)=45(R\sin\theta),\quad 20R-20R\sin\theta=45R\sin\theta$$

$$20=65\sin\theta,\ \sin\theta=0.3077,\quad \theta=18°$$

10.32 梯子静止靠在无摩擦的墙上的 A 点,重心距离底部 10 ft,梯子全长 25 ft,如图 10-25 所示.梯子重 80 lb,求作用在梯子上 A 点的力.

解 ☞ 在图中作出梯子上的所有力.因为我们只对墙产生的力 N 感兴趣,以 B 为支点力矩,从而得到仅含 N 的方程.由 $\sum\tau=0$ 得$(25\sin53°)(N)-(10\cos53°)(80)=0$,解得 $N=24$ lbf.

10.33 有一梯子靠在光滑的墙上,如图 10-26 所示.(所谓"光滑"的墙指墙壁仅对梯子有一垂直于墙的力而没有摩擦力.)梯子重 200 N 重心距梯子底部 0.4 L,其中 L 是梯子的长度.(a)要使梯子不滑动,底部受到多大的摩擦力? (b)静摩擦的系数有多大?

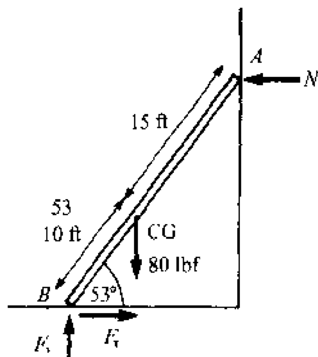


图 10-25

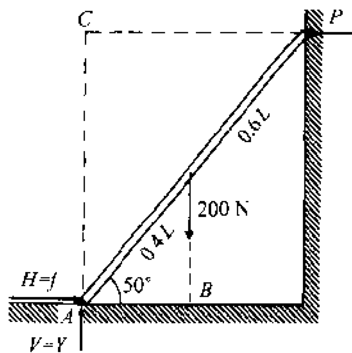


图 10-26

解 ☞ (a)我们要求摩擦力 H.因在梯子的上部没有摩擦力,以 A 点为支点求力矩,力矩方程为 $-(200\text{N})(\overline{AB})+(P)(\overline{AC})=0$,即 $-(200\text{N})(0.4L\cos 50°)+(P)(L\cos 40°)=0$.解得 $P=67\text{N}$.又由于 $\sum F_x=0$ 得 $H-P=0$

$$\sum F_y = 0$$

得

$$V - 200 = 0$$

所以 $H=67$ N, $V=200$ N.其中 $V=Y$,垂直于地面.

(b) $\mu_s=\dfrac{f}{Y}=\dfrac{H}{V}=\dfrac{67}{200}=0.34$

10.34 一个轻梯子靠在光滑的墙上且下端放在粗糙的地面上,梯子上端在地面上方 h 处.某人爬到梯子上直到梯子将要滑动.梯子与地面间的静摩擦系数为 μ.求人在水平方向移动的距离.

解 ☞ 即将滑动时[见图 10-27(a)], $F_x=F_{x,\max}=\mu F_y$.由于平衡时 $\sum F_y=0$ 得 $F_y-W=0$,即 $F_y=W$.由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-N=0$,即 $F_x=N$.所以

$$\mu=\frac{F_x}{F_y}=\frac{N}{W}$$

以梯子底端为支点求力矩,有 $hN-dW=0$,即 $N/W=d/h$.所以 $\mu=d/h$, $d=\mu h$.

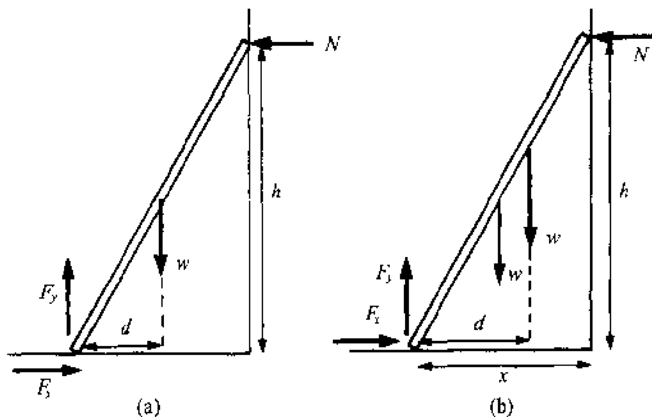


图 10-27

10.35 假设题 10.34 中的梯子质量均匀分布且与人有相同的重量,梯子底部距墙 x,其它条件均相同.求梯子刚要滑动时人所移动的水平距离.见图 10-27(b).

解 ☞ 与 10.34 题相同, $F_x=F_{x,\max}=\mu F_y$.由 $\sum F_x=0$ 得到 $F_x=N$.现在由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y=2W$,所以

$$\mu=\frac{F_x}{F_y}=\frac{N}{2W}$$

以梯子底端为支点求力矩得

$$hN-\frac{x}{2}W-dW=0 \quad 即 \quad \frac{N}{W}=\frac{x/2+d}{h}, \mu=\frac{N}{2W}=\frac{x/2+d}{2h}$$

所以 $d=2\mu h-\frac{x}{2}$

10.36 梯子的底端靠住墙且上端系在一根绳子上，如图 10-28(a)所示. 梯子重 100 N 且重心距底端为全长的 0.4 倍. 一个 150 N 的小孩吊住梯子距顶部 $0.2L$ 处. 求绳子上的张力和梯子底端受力的分量.

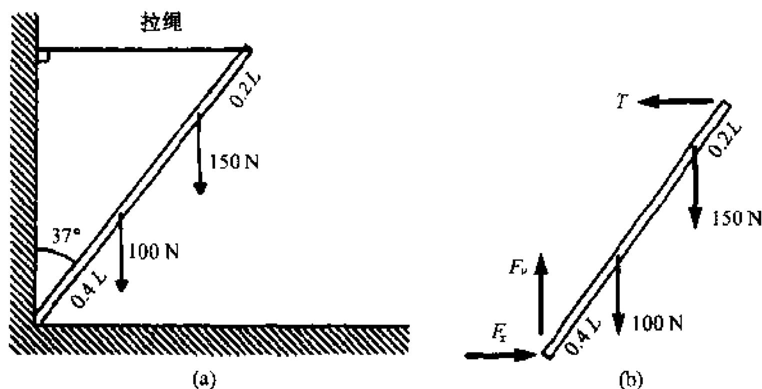


图 10-28

解 ☞ 梯子上受到的力如图 10-28(b)所示. 由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-T=0, F_x=T$. 由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y-100-150=0$, 即 $F_y=250$ N. 以梯子底端为支点求力矩，由 $\sum\tau=0$ 得 $L\cos37°\,T-(0.4L\sin37°)(100\text{ N})-(0.8L\sin37°)(150\text{ N})=0$. 消去各项中的 L 解得 $T=121$ N. 最后得到 $F_x=120$N.

10.37 一个构架由两根均匀且分别重 150 N 的椽子铰结而成，如图 10-29(a)所示. 它们放在基本无摩擦的地面上且被一根绳子系住. 一 500 N 的重物挂在顶部，求绳子上的拉力.

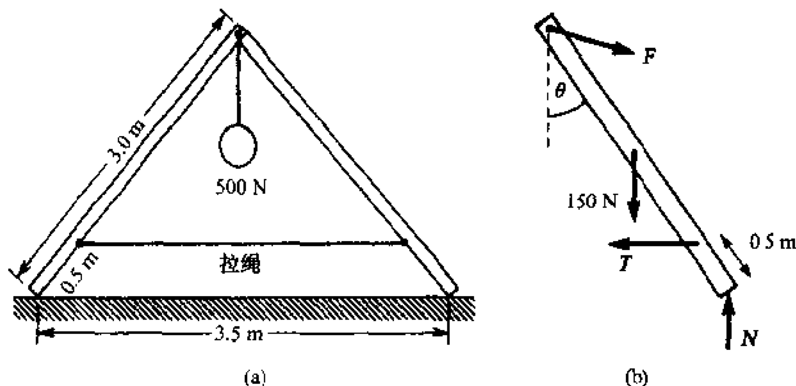


图 10-29

解 ☞ 此题有多种解法，但我们要用尽可能简洁的一种. 我们只对绳子上的拉力感兴趣，以其中一根椽子为研究对象，所有的作用力如图 10-29(b)所示. 力 $\boldsymbol{F}$ 包括 500 N 的重物和另外一根椽子的作用效果. 如果以过顶部的轴为转轴求力矩，由 $\sum\tau=0$ 得 $1.75\,N-(1.75/2)(150)-2.5\cos\theta T=0$. 因为 $\sin\theta=(1.75/3.0)$, $\theta=35.7°$, $\cos\theta=0.812$, 所以 $2.03T=1.75N-131$. 要求 N, 我们回到图 10-29(a)中并运用对称性. 地面对每根椽子的支持力相等. 把整个系统看成一个整体，$\sum F_y=0$ 得

$2N=(500+150+150)\text{N}$, $N=400$ N.代入力矩方程解得 $T=280$ N.

10.38　一个半径为 0.10 m 质量为 10 kg 的球放在倾斜角为 30°的斜面与光滑竖直面的夹角处.求两表面对球的作用力.

解　☞ 球可能受到的力如图 10-30 所示.若以过球心的轴为转轴求力矩,只有 f 有力臂.由 $\sum\tau=0$ 得 $f=0$.由 $\sum F_y=0$ 得 $N_2\cos30°=mg=(10\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)$;$\sum F_x=0$ 得到 $N_2\sin30°-N_1=0$,所以 $N_1=56.5$ N, $N_2=113$ N.

10.39　长 13.0 m 的均匀梯子重 300 N,靠在光滑的墙上且上端高于地面 12.0 m.地面粗糙,求地面对梯子的摩擦力和支持力以及墙壁对梯子的支持力.

解　☞ 作用在梯子上的力如图 10-31 所示.地面对梯子的力在 x、y 方向上分别对应于地面产生的摩擦力和支持力.由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-N=0$, $F_x=N$.由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y-300=0$,即 $F_y=300$ N.以过梯子与地面的接触点的轴为转轴求力矩,已知该点与墙的距离为 $\sqrt{13^2-12^2}=5(\text{m})$,由 $\sum\tau=0$ 得 $12.0\text{ N}-(2.5)(300)=0$,即 $N=62.5$ N.所以 $F_x=62.5$ N.

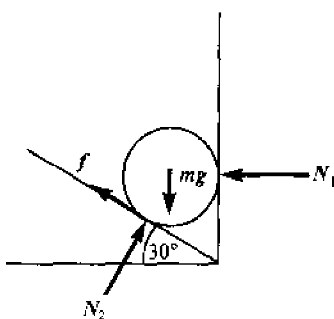


图 10-30

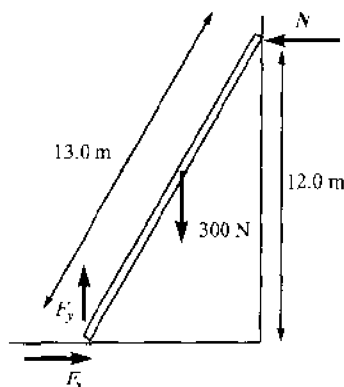


图 10-31

10.40　图 10-32(a)中的木球重 70 N 且放在由墙壁构成的光滑槽中.求槽的两个墙壁对球的作用力.

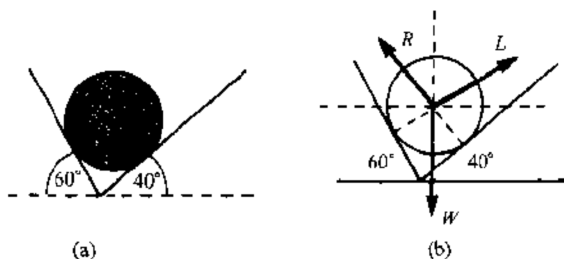


图 10-32

解　☞ 光滑面对球的作用力必定垂直于表面.木球除受到左、右两表面产生的支持力 L 和 R 外,还受到竖直向下的 70 N 的重力.这三个力作用在球心[如图 10-32(b)所示].由 $\sum F_x=0$ 得 $L\sin60°=R\sin40°$,由 $\sum F_y=0$ 得 $T_0=R\cos40°+L\cos60°$.解得 $R=62$ N, $L=46$ N.

10.41　一台质量为 100 kg 的冰箱高 150 cm,宽 75 cm 厚 75 cm.应在前面上边缘处水平施加多大的力才可以使它开始向后滑动?假设重心位于冰箱的中心.

解　☞ 以图 10-33 中 O 点为支点计算力矩:

顺时针方向力矩 = 逆时针方向力矩

$$mg(0.375)=1.50\ F$$

$$F=\frac{100(9.8)(0.375)}{1.50}=245(\text{N})$$

10.42 一根长 40 ft 的均匀梯重 80 lb 并靠在一光滑的墙上,如图 10-34(a)所示.梯子与地面间的静摩擦系数为 $\mu_s=0.5$.则当重 200 lb 的人爬上梯子多远时梯子开始滑动?

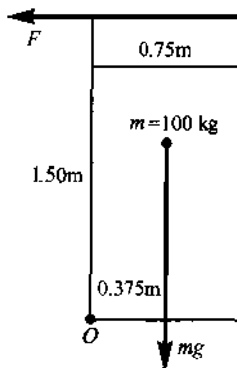


图 10-33

解 ☞ 在图 10-34(b)中作出梯子上的所有力.我们要求人能爬上梯子的距离 l.地面产生的力分成 x 和 y 两个方向的分量,分别对应于地面施加的摩擦力和支持力.显然,当人爬上梯子时 F_x 要增大,我们写出较正式的方程.由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x-N=0$,即 $F_x=N$.以过梯子底端的轴为转轴求力矩有 $\sum\tau=0$,即$(40\sin53°)(N)-(20\cos53°)(80)-(l\cos53°)\cdot(200)=0$,即 $N=30+3.75l=F_x$.所以 F_x 随 l 的增大而增大.当 l 达到最大时,梯子刚好要滑动,$F_{x,\max}=\mu_sF_y=0.5F_y$.由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y-80-200=0$,即 $F_y=280$ lb.所以 $F_{x,\max}=140$ lb $=N$,再代入力矩方程得 $30+3.75l=140$ lb,$l=29.3$ ft.

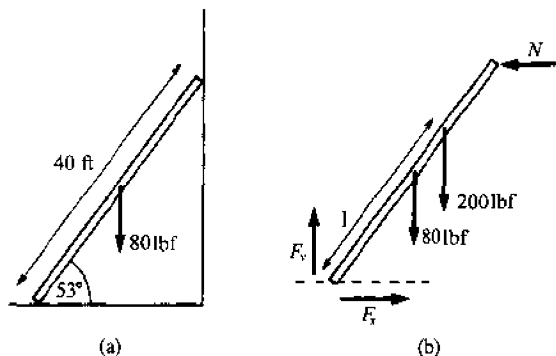


图 10-34

10.43 一个长 21m,重为 400N 的梯子靠在竖直光滑的墙上,上端高出地面 16 m.梯子的重心距梯子底端为全长的三分之一.如果一个 80 kg 的人爬到梯子的一半时梯子恰好要滑动,求梯子底部与水平地面间的摩擦系数.

解 ☞ 所有的力如图 10-35 所示.地面对梯子的作用力分成水平和竖直方向两个分量分别对应于摩擦力和支持力.当 F_x 达到其最大值时

$$F_{x,\max}=\mu_sF_y \quad 即 \quad \mu_s=\frac{F_{x,\max}}{F_y}$$

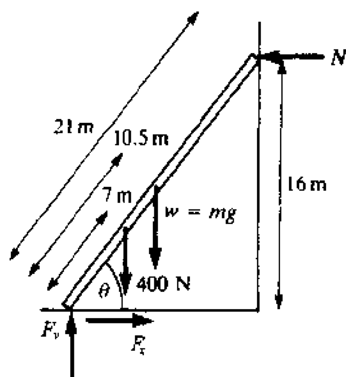


图 10-35

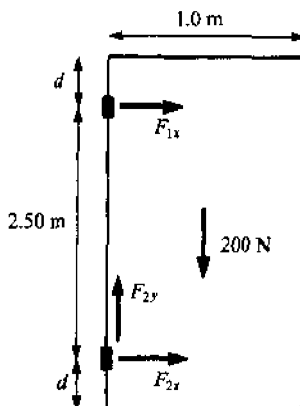


图 10-36

已知人的重力为 $W=mg=(80\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)=784$ N,由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y-400N-784N=0$,即 F_y

$=1184\text{N}$.由 $\sum F_y=0$ 得 $F_{x,\max}-N=0$,即 $F_{x,\max}=N$.求关于梯子底部的力矩得$(21\sin\theta)(N)-(10.5\cos\theta)(784)-(7\cos\theta)(400)=0$.要求 N 必须知道 θ.根据已知的长度,$\sin\theta=\frac{16}{21}=0.762$,$\cos\theta=0.648$.解之得 $N=447\ \text{N}=F_{x,\max}$,最终解得 $\mu_s=\frac{447}{1184}=0.38$.

10.44 重 200 N 的均匀门上两个铰链间相距 2.50 m.其中一个铰链距离门顶端 d,另一铰链距门底部为 d.门宽 1.00 m,门的重量由下面的铰链所支撑.求枢钮对门的作用力.

解 ☞ 铰链与门长相比很小.图 10-36 画出所有作用在门上的作用力.由已知得 $F_{1y}=0$.由 $\sum F_y=0$ 得 $F_{2y}=200$ N.由 $\sum F_x=0$ 得 $F_{1x}+F_{2x}=0$,即 $F_{1x}=-F_{2x}$.对于下面的铰链求力矩由 $\sum\tau=0$ 得 $2.50F_{1x}+(0.50)(200\ N)=0$ 即 $F_{1x}=-40$ N,所以 $F_{2x}=40$ N.$\boldsymbol{F}_1$ 是向左的拉力,$\boldsymbol{F}_2$ 的大小为 204 N,方向指向右上方,与水平方向的夹角 $\theta=\arctan\frac{200}{40}=79°$.注意在该类问题中必须给出重力在两个铰链上的分布(F_{1y}和 F_{2y}),因为 F_{1y}和 F_{2y}在同一条作用线上且对于任何转轴有相同的力矩,没有附加信息就只能计算 F_{1y}与 F_{2y}的和而不能分别求出它们的大小.

10.45 在图 10-37(a)中,600 N 的均匀杆被铰在 P 点.求绳子上的拉力和铰链对杆作用力的分量.

解 ☞ 作用在杆上的力如图 10-37(b)所示.把铰链对杆的力用分量 H 和 V 表示.绳子的拉力可直接用 T 表示也可用其分量表示.若用 T 表示,以 P 为转轴的力矩方程为

$$(T)\left(\frac{3L}{4}\sin40°\right)-(800\ \text{N})(L)-(600\ \text{N})\left(\frac{L}{2}\right)=0$$

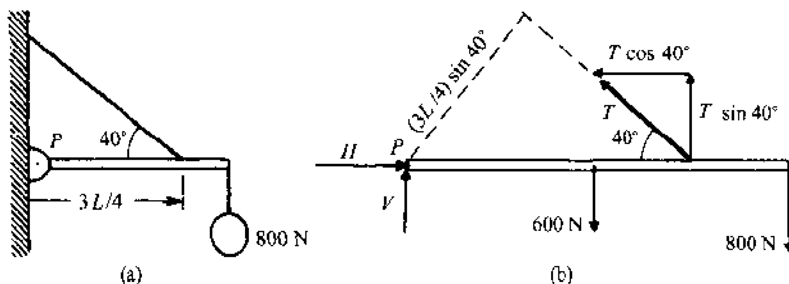


图 10-37

这时方程中不出现 H 和 V.若用 T 的分量表示力矩方程,则分力 $T\cos40°$的力臂为零,此时力矩方程写成$(T\sin40°)(\frac{3L}{4})-(800\ \text{N})(L)-(600\ \text{N})(\frac{L}{2})=0$ 可见两个方程一致,都得到 $T=2280$ N.

为求 H 和 V 写出方程

$$\sum F_x=0 \quad 即 \quad -T\cos40°+H=0$$

$$\sum F_y=0 \quad 即 \quad T\sin40°+V-600-800=0$$

代入 T 的值,解方程得到 $H=1750$ N 和 $V=-66$ N.

10.46 400 N 的均匀杆如图 10-38(a)所示.求绳子上的拉力和 P 点的栓对杆的作用力.

解 ☞ 杆受到的力如图 10-38(b)所示.以栓为轴,力矩方程为$(T)\left(\frac{3L}{4}\sin50°\right)-(400\ \text{N})(\frac{L}{2}\cos50°)-(2000\ \text{N})(L\cos50°)=0$ 从中得 $T=2460$ N.由 $\sum F_x=0$ 得 $H-T=0$,所以 $H=2460$ N.又 $\sum F_y=0$,$V-2000\ \text{N}-400\ \text{N}=0$,所以 $V=2400$ N.H 和 V 是栓对杆作用力的分量.该力的大小为 $\sqrt{(2400)^2+(2460)^2}=3440$ N.力与水平方向夹角的正切为 $\tan\theta=2400/2460$,所以 $\theta=44°$.

10.47 如图 10-39 所示,重 400N 的均匀门固定在门栓 A、B 上.上栓承受门的重力.求门栓对门的作用力.门宽为 $h/2$,其中 h 为两栓之间的距离.

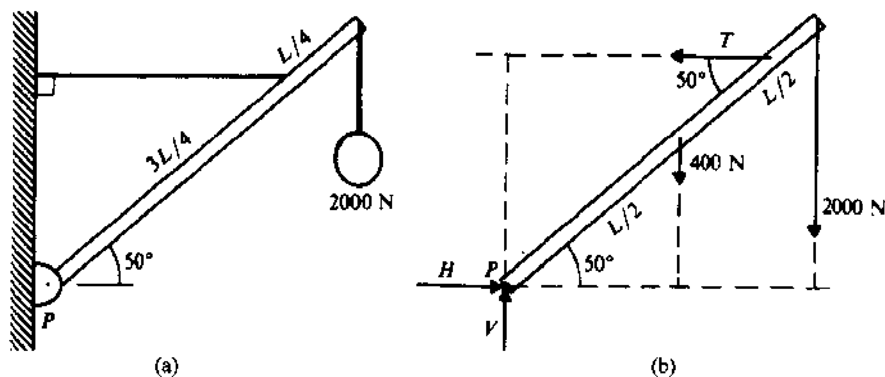


图 10-38

解 ☞ 因为门栓 A 承受门的重力，所以门栓 B 只产生水平方向的力. 以 A 为轴求力矩，由 $\sum\tau = 0$ 得 $(F_2)(h) - (400\ \mathrm{N})(h/4) = 0$，从而解得 $F_2 = 100$ N. 又由

$$\sum F_x = 0 \quad 得 \quad F_2 - H = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 得 \quad V - 400\ \mathrm{N} = 0$$

从而解得 $H = 100$ N 以及 $V = 400$ N.

在门栓 A 处的合力 $\boldsymbol{R}$ 的大小为 $R = \sqrt{(400)^2 + (100)^2} = 412$ N. $\boldsymbol{R}$ 与 x 负方向所成角的正切为 V/H，所以角为 arctan4 = 76°.

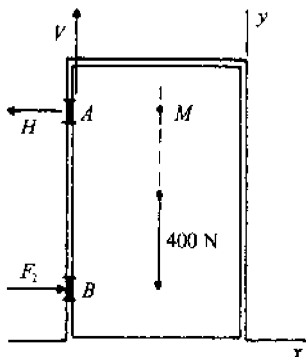


图 10-39

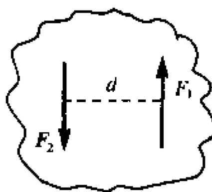


图 10-40

10.48 一对力大小均为 F 且方向相反，力的作用线间的距离为 d. 证明以垂直于两力所在平面的任意轴为转轴，力偶矩的大小均为 Fd 而与轴的位置无关.

证 ☞ 两个反向平行的力如图 10-40 所示. $F = F_1 = F_2$. 取过任意点的轴，假设取在 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用线左侧 x 处的点，力矩 $\tau = F_1(x + d) - F_2 x = F(x + d) - Fx = Fd$，与 x 无关. 如果 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 分别变为 $-\boldsymbol{F}_1$ 和 $-\boldsymbol{F}_2$，$\tau = F_2 x - F_1(x + d) = Fx - F(x + d) = -Fd$. 所以力偶矩可正可负. 产生或逆时针或顺时针的旋转效果，但大小为 Fd.

10.49 一辆行李手推车重为 W 且靠在高 h 的桌子边缘. 重心距离轮子中心为 l，如图 10-41(a)所示. 忽略轮子受到的摩擦力，求轮子受到的向上的力以及桌子边缘产生的水平和垂直方向的力.

解 ☞ 在图 10-41(b)中画出小车受到的力，桌子施加的力 $\boldsymbol{F}$ 分解成沿 x 轴和 y 轴的分量. 因为忽略摩擦力，N 为竖直方向的力. 由 $\sum F_x = 0$ 得到 $F_x = 0$. 由 $\sum F_y = 0$ 得到 $F_y + N - W = 0$，即 $F_y = W - N$. 以过车与桌子接触点的轴为转轴求力矩，$\boldsymbol{N}$ 的力臂为 $h\tan\theta$，$\boldsymbol{W}$ 的力臂为 $h\tan\theta - l\sin\theta$，由 $\sum\tau = 0$ 得到 $(h\tan\theta)(N) - (h\tan\theta - l\sin\theta)(W) = 0$. 所以 $N = (1 - l\cos\theta/h)(W)$，$F_y = W - N = (l\cos\theta/h)W$.

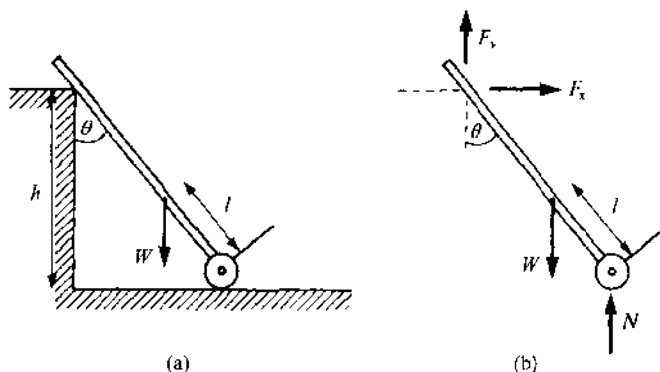


图 10-41

10.50 如果 10.49 题中桌子边缘的静摩擦因数为 μ_s，则要使车轮不滑动 θ 最小为多少？

解 ☞ 因为 $F_x=0$，所以 $\boldsymbol{F}$ 沿着 y 方向. 把 $\boldsymbol{F}$ 分解成平行于(//)和垂直于(⊥)手推车的两个分量，$F_{//}$ 表示桌子对车的摩擦力而 $F_{\perp}$ 表示支持力. 因为 $F_{//}=F_y\cos\theta=(l\cos^2\theta/h)W$；$F_{\perp}=F_y\sin\theta$. 随着 θ 的减小 $F_{//}$ 增大，滑动之前 θ 的最小值对应于 $F_{//,\max}$. 因为 $F_{//,\max}=\mu_s F_{\perp}$ 所以 $\mu_s=F_{//}/F_{\perp}=\cot\theta$.

10.51 图 10-42 中的半径为 a 的均匀圆柱体重为 80 N. 当如图所示挖去一个小圆柱体后重为 65 N. 两个圆柱体的轴平行，若圆柱体在桌面上不滑动，当 T 为多大时可保持圆柱体的静止？

解 ☞ 设 65 N 的物体重心在接触点 P 的右侧 d 处. 求关于 P 点的力矩得 $T(2a)=(65\text{ N})d=(15\text{ N})(\frac{2}{3}a)$. 第二个等式说明填上孔时该均匀圆柱体关于 P 点的合力矩为零，也就是说填上部分的力矩等于 65 N(空心的圆柱)部分的力矩.

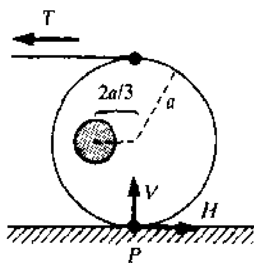


图 10-42

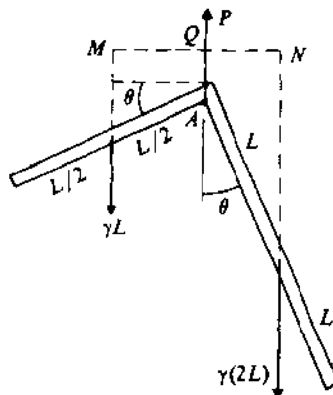


图 10-43

10.52 如图 10-43 所示的直角尺(方框)静止挂在钉子上. 它由均匀金属片制成. 一边臂长为 L cm，另一边长为 $2L$ cm. 求静止时角 θ 的大小.

解 ☞ 如果尺不是很宽，我们近似看成是由两根长分别为 L 和 $2L$ 的细杆垂直连于 A 点而成. 设每厘米杆重 γ，杆受到的力如图 10-43 所示，P 点受到钉子竖直向上的支持力.

求关于 A 点的力矩得 $(\gamma L)(\overline{MQ})-(2\gamma L)(\overline{QN})=0$. 因为 $\overline{MQ}=\frac{1}{2}L\cos\theta$，$\overline{QN}=L\sin\theta$，代入方程得到 $\frac{1}{2}\cos\theta=2\sin\theta$，所以 $\tan\theta=0.25$，$\theta=14°$.

10.53 一扇门宽 9ft 高 6 ft 且被一侧上下两个门栓所固定. 如果 90 lb 的重量都由下面的门栓所承担，求门对上面门栓的作用力.

解 ☞ 先画出受力示意图如图 10-44 所示. 以下面门栓所在的 O 点为支点求力矩,重力作用在重心处. 顺时针方向的力矩为 $6F_1$,逆进针方向的力矩为 4.5 W. F_2 对 O 点的力臂为零,力矩为零. 所以 $6F_1 - 4.5W = 4.5(90)$, $F_1 = 67.5$ lb

10.54 对于 10.53 题,求门对下面门栓的作用力.

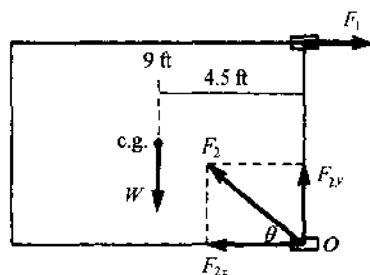


图 10-44

解 ☞ $\sum F_y = 0,\quad F_{2y} - W = 0$

$F_{2y} - 90 = 0,\quad F_{2y} = 90\text{lbf}$

$\sum F_x = 0,\quad F_1 - F_{2x} = 0,$

$67.5 - F_{2x} = 0,\ F_{2x} = 67.5\ \text{lbf}$

$F_2 = \sqrt{F_{2x}{}^2 + F_{2y}{}^2} = \sqrt{(67.5)^2 + (90)^2}$

$= \sqrt{4556 + 8100} = 112.5\ \text{lbf}$

$\tan\theta = \dfrac{F_{2y}}{F_{2x}} = \dfrac{90}{67.5} = 1.333,\ \theta = 53°$

10.55 求图 10-45(a)装置中的力 T_1、T_2 和 T_3. 杆均匀且重 800N.

解 ☞ 我们首先分析 A 点的受力情况. 近似受力图如图 10-45(b)所示. $T_2\cos50° - 2000\ \text{N} = 0$ 且 $T_1 - T_2\sin50° = 0$. 由第一个方程得 $T_2 = 3110$ N,代入第二个方程得 $T_1 = 2380$ N.

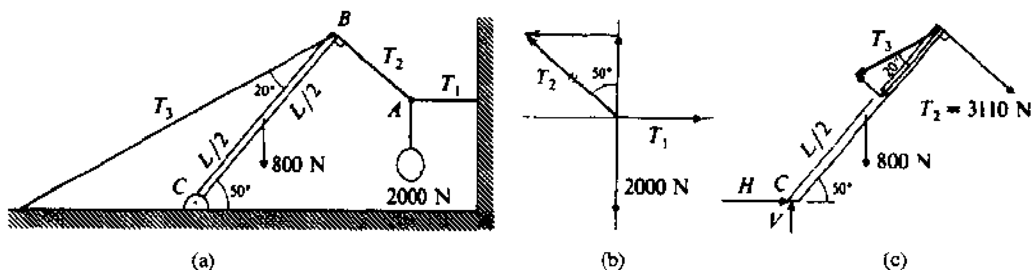


图 10-45

现在单独分析杆的受力情况,其受力如图 10-45(c)所示. 把 T_3 分解成两个分量,并以 C 为支点求力矩. 分力 $T_3\cos20°$对 C 点不产生力矩. 力矩方程为

$$(T_3\sin20°)(L) - (3110\text{N})(L) - (800\text{N})\left(\frac{L}{2}\cos50°\right) = 0$$

解得 T_3 为 9840 N.

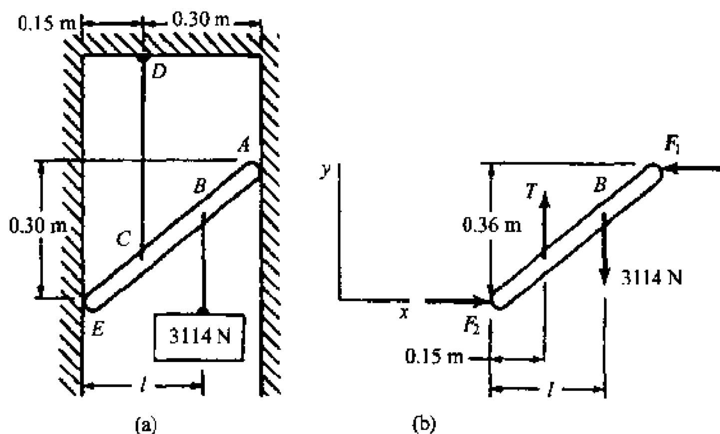


图 10-46

10.56 一根轻杆[如图 10-46(a)所示]吊在一根绳子上. 杆上 B 点处又挂了一个重 3114 N 的物体. 杆的两端与光滑竖直墙面接触. (a)如果 $l = 0.25$ m,求绳 CD 上的拉力和 A、E

处的作用力,(b)若 E 点的最大作用力为 2224 N.求 l 的最大值.

解 ☞ (a)系统处于静态平衡.图 10-46(b)所示的作用力沿 x 方向,墙壁是光滑的.由 y 方向的受力情况得到 $\sum F_y = T - 3114 = 0$,即 $T = 3114$ N.

求关于 E 点的力矩之和(逆时针方向为正),得

$$\sum \tau_E = F_1(0.36) - 3114(0.25) + 3114(0.15) = 0, F_1 = 865\ \text{N}$$

由 x 方向的受力情况得到 $\sum F_x = F_2 - F_1 = 0, F_2 = 865$ N.

(b)由于 $F_2 = F_1 = 2224$ N,由力矩方程得

$$\sum \tau_E = (2224)(0.36) - (3114)l + (3114)(0.15) = 0 \quad 即 \quad l = 0.41\ \text{m}.$$

10.57 半径为 R 的轮子重为 W,当过重心的水平拉力 F 为多大时可以把它拉上一层台阶.台阶高 $y<R$.

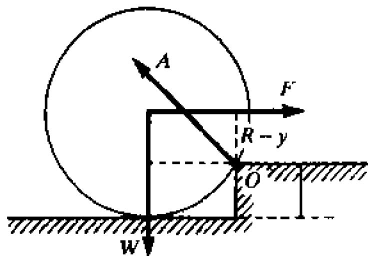


图 10-47

解 ☞ 图 10-47 是受力示意图.以台阶的边缘 O 点为支点求力矩,顺时针方向的力矩为 $F(R-y)$,逆时针方向的力矩为 $W\sqrt{[R^2-(R-y)^2]}$,其中平方根的值是 W 的力臂.顺时针方向力矩等于逆时针方向力矩,

$$F(R-y) = W\sqrt{R^2-(R-y)^2} = W\sqrt{2Ry-y^2},$$

$$F = W\frac{\sqrt{y(2R-y)}}{R-y}$$

当 $y \to R$ 时 F 趋向于无限大.

10.58 如图 10-48(a)所示一大堆平板堆在桌面上,相邻两板间的摩擦因数和底层板与桌面间的摩擦因数分别为 0.25 和 0.15.现施加一水平向左的力 $\boldsymbol{F}$ 使平板堆向左运动且既不倒下也不发生相对滑动.求 $\boldsymbol{F}$ 作用点的最大高度.

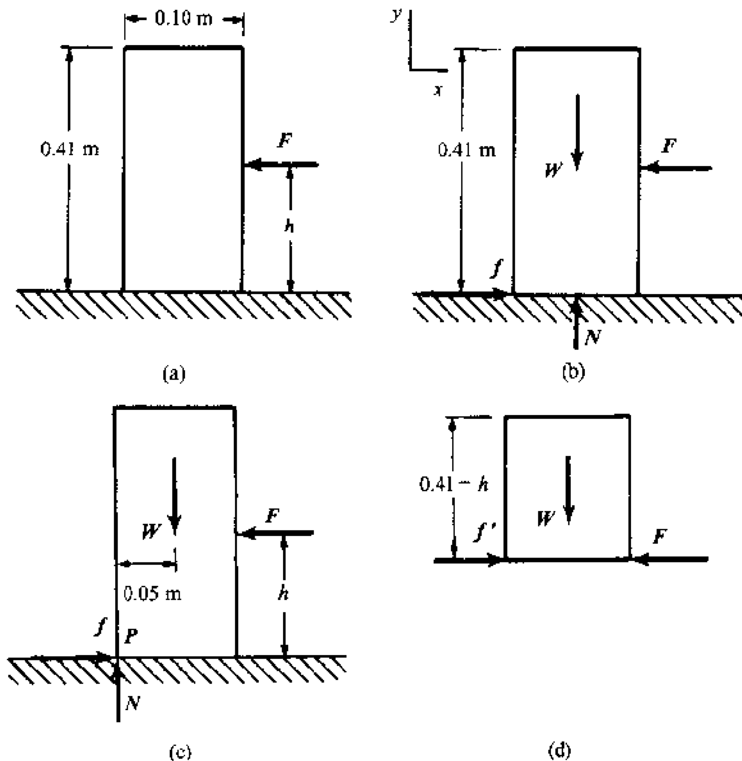


图 10-48

解 ☞ 要把木块作为整体移动必须遵守:(1)力 F 要克服底板与桌面的摩擦力,见图 10-48(b).由 $\sum F_x = F - f = 0$ 得 $F = f = \mu_1 N = \mu_1 W = 0.15W$,其中 $N = W$ 是由于 $\sum F_y = N - W = 0$.(2) 为了不让木板堆倒下,h 有一定限制.当它刚要以 P 为支点倒下时,如图 10-48(c)所示,

$$\sum \tau_p = Fh - W(0.05) = 0 \quad 即 \quad h = \frac{W(0.05)}{0.15W} = 0.33\ \mathrm{m}$$

即当 $h > 0.33$ m时该木板堆会倒下.(3)要让板与板不发生摩擦对 h 也有一定限制.F 作用在某板上,该板上方所有的板就看成是自由体[如图 10-48(d)],重为 $W' = W\dfrac{0.41 - h}{0.41}$

根据 $\sum F_x = F - f' = 0$,

$$F = f',\ \mu_1 W = \mu_2 W',\ 0.15W = 0.25W\frac{0.41 - h}{0.41},\ h = 0.164\mathrm{m}$$

如果 $h > 0.164$ m,力 $0.15W$ 处及其上方的板一起移动而下方的板保持静止.

所以要使所有的板一起移动,$h_{max} = 0.16$ m.

10.59 一根轻的 T 形杆靠放在两个竖直墙上如图 10-49 所示.两杆长为 10 cm 左墙光滑,杆与地面以及与右墙间的摩擦系数分别为 0.35 和 0.50.杆上挂有 1N 的物体如图所示.要使杆在图中位置处于静态平衡,竖直方向的力 F 至少应为多大?

解 ☞ 当 F 很小时问题的解决大大简化.因为左边墙和地面的摩擦力很小,1N 的力产生逆时针的力矩使得杆与右墙不再接触.所以,如果 F 能使杆平衡且刚好与右墙接触($N_3 = f_3 = 0$),F 的值即为所求的最小值.

由于 $N_3 = f_3 = 0$,受力情况为

$$N_2 - 1 - F = 0\ (1)\ 和 \quad N_1 - f_2 = 0\ (2)$$

力矩方程为(关于与地面的接触点)

$$-N_1(0.08) + 1(0.03) - F(0.01) = 0 \tag{3}$$

利用三个方程消去 F 和 N_1 得到 $f_2 = 0.5 - 0.125N_2$.由于 f_2 的最大值为 $\mu_2 N_2 = 0.35N_2$,所以

$$0.5 - 0.125N_2 \leqslant 0.35N_2 \quad 即 \quad N_2 \geqslant \frac{0.5}{0.475} = \frac{20}{19}(\mathrm{N})$$

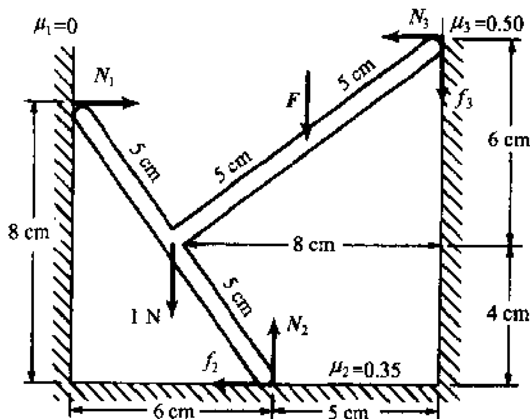


图 10-49

由(1)式 $$F = N_2 - 1 \geqslant \frac{1}{19}\ \mathrm{N}$$

最小力为(1/19)N,与之对应有

$$N_1 = \frac{7}{19}\mathrm{N} = f_2, \qquad N_2 = \frac{20}{19}\ \mathrm{N}$$

该力可以增大至 $3N$ 仍可保持 $N_3 = f_3 = 0$,此时 N_1 和 f_2 消失.所以有一段力的范围使得右墙与不存在时效果一样.

10.60 图 10-50(a)中杆重可忽略且滑轮无摩擦.当 $W_1 = 500$ N 时系统保持平衡,求 W_2 的值.

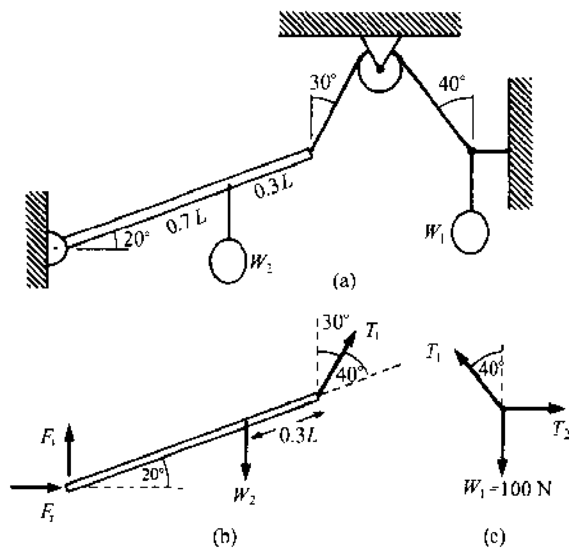


图 10-50

解 ☞ 杆和结点的受力分别如图 10-50(b)和 10-50(c)所示.滑轮两边绳子的拉力相等.对于结而言只需竖直方向的方程.由 $\sum F_y=0$ 得 $T_1\cos40°-500\ \mathrm{N}=0$,即 $T_1=653$ N.对杆以左端为支点求力矩,方程中不含铰链施加的力 $\boldsymbol{F}$.我们把 T_1 和 W_2 分解成垂直于(⊥)和平行于(∥)杆的分量,平行分量的力臂为零.选择垂直于轴指向左上方的方向为正方向得到 $T_{1\perp}=T_1\sin40°=420$ N;$W_{2\perp}=-W_2\cos20°$(刚好构成斜面).由 $\sum\tau=0$ 得 $L420\ \mathrm{N}-0.7LW_2\cos20°=0$.消去 L 解得 $W_2=639$ N.(求重力 W_2 的力矩也同样简单,直接由力臂0.7 $L\cos20°$得到相同的力矩:$-0.7L\cos20°W_2$.)

10.61　若对于 10.60 题已知 W_2 为 500 N,均匀杆重 300 N,求 W_1.

解 ☞ 图 10-50(b)中现在要包含杆重.以左端为支点求力矩,得到关于 T_1 的方程.由 $\sum\tau=0$ 得 $LT_1\sin40°-(0.7L\cos20°)(500)-(0.5L\cos20°)(300)=0$,即 $T_1=731$ N.由结点处 $\sum F_y=0$ 得 $T_1\cos40°-W_1=0$,即 $W_1=560$ N.

10.62　一根 200 N 的均匀杆竖直站立.轻绳连接杆的中点与地面.$W=100$ N 的物体通过一不计摩擦的滑轮与水平杆顶部相连.求地面对杆的水平和垂直方向的力.

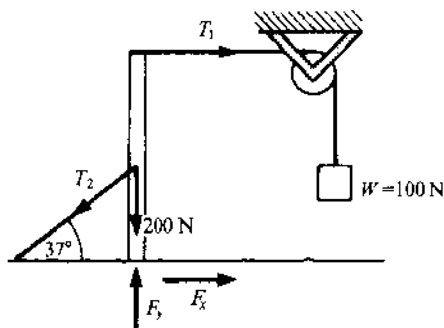


图 10-51

解 ☞ 杆上所有的力在图 10-51 中已画出.因为滑轮无摩擦,$T_1=W=100$ N.地面产生的力 $\boldsymbol{F}$ 分成水平和竖直两个分量.由 $\sum F_x=0$ 得 $T_1+F_x-T_2\cos37°=0$,即 $F_x-0.80T_2=-100$ N.由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y-200-T_2\sin37°=0$,即 $F_y-0.60T_2=200$ N.以过杆中点的轴为转轴求力矩只有 T_1 和 F_x 作用.设杆长为 L,由 $\sum\tau=0$ 得

$$\frac{L}{2}F_x-\frac{L}{2}T_1=0 \quad 即 \quad F_x=T_1=100\ \mathrm{N}$$

把 F_x 代入方程 $\sum F_x=0$ 得到 $T_2=250$N.把 T_2 代入 $\sum F_y=0$ 解得 $F_y=350$ N.

10.63　一物体受到如图 10-52 所示各力的作用.在 x 轴上一点应施加一多大的力可以平衡这些力?该点在 x 轴上什么位置?

解 ☞ 设所求的力分量为 F_x 和 F_y 并设作用点为$(d,0)$.由 $\sum F_x=0$ 得 $F_x+200\cos70°-300=$

0,即 $F_x=232$ N.由 $\sum F_y=0$ 得 $F_y+200\sin70°+150=0$,即 $F_y=-338$ N(即指向下方).我们通过以过原点的轴为转轴的力矩方程来求 d.F_x 没有力矩,200 N的力可分解成垂直于(⊥)和平行于(∥)作用线(作用点与原点的连线)的分量,且只有垂直分量起作用.由 $\sum\tau=0$ 得 $(2.5)(300)+(2.0)(200)(\sin30°)-(1.5)(150)-d(338)=0$.解得 $d=2.14$ m.

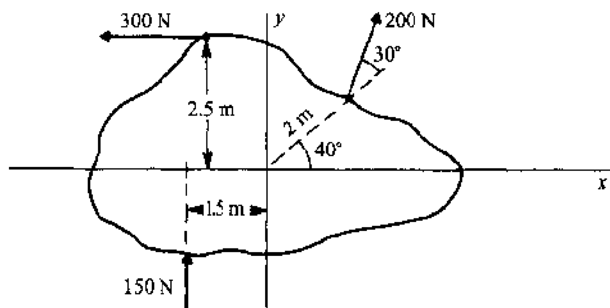


图 10-52

10.64 两个重为 W 和 $3W$ 的球由一根重量不计的杆连在一起,并可在倾角为45°的斜面上自由滑动,如图10-53(a)所示.求系统平衡时杆与水平方向的夹角 ϕ.

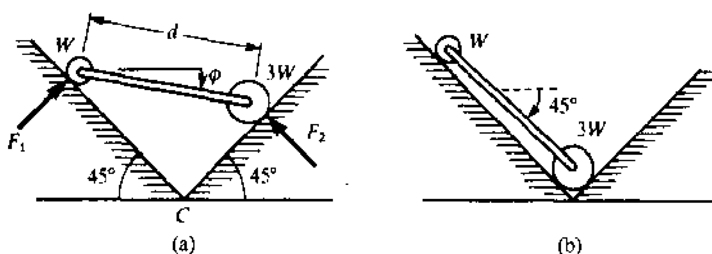


图 10-53

解 ☞ 假设斜面光滑,图10.53(a)中的作用力 F_1 和 F_2 为支持力.求关于 C 点的力矩之和.力 F_1 和 F_2 的力臂分别为

$$M_1=d\cos(45°-\phi),\qquad M_2=d\sin(45°-\phi)$$

重物 W 和 $3W$ 的力臂为

$$M_1\cos45° \quad 和 \quad M_2\cos45°$$

所以

$$-F_1M_1+WM_1\cos45°-3WM_2\cos45°+F_2M_2=0 \tag{1}$$

根据受力平衡得到 $F_1=F_2=2\sqrt{2}\,W$.代入(1)消去 $WM_1/\sqrt{2}$ 得到 $-3+\tan(45°-\phi)=0$.解得 $\phi=-26.6°$.因为 ϕ 为负值,所以重球比轻球高.

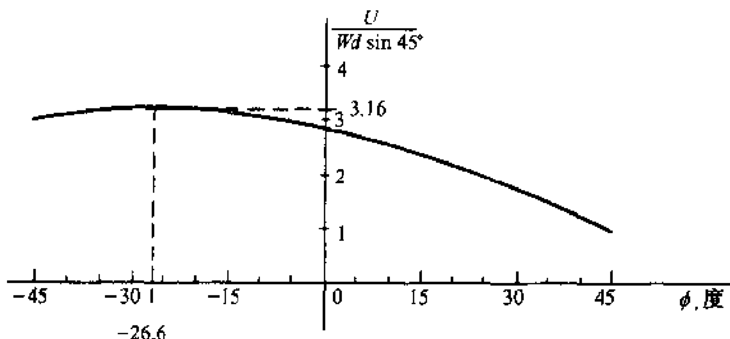


图 10-54

10.65　如图 10-53(b)所示,显然也是一种静态平衡结构.如何用来解释 10.64 题的结论?

解　☞ 系统相对于 C 点的重力势能 PE 为 $U=Wd\cos(45°-\phi)\sin45°+3Wd\sin(45°-\phi)\sin45°$,如图 10-54 所示.[图 10-53(a)中 C 点的势能 $U=0$.]可见 10.64 题中的解答对应于势能的最大值同时也是不稳定的平衡(与 10.72 题相比).最小(边界)值为 $\phi=45°$ 对应着图 10-53(b)中的稳定平衡.该解答之所以没有在 10.64 题中出现是因为它需要较重的物体受到左边斜面的支持力.

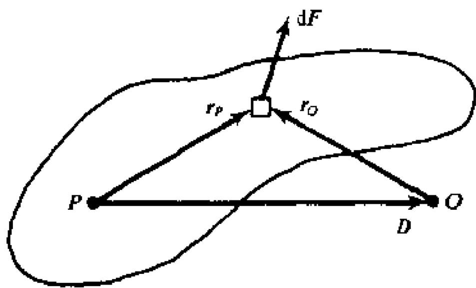


图 10-55

10.66　证明如果一个物体受到的合外力为零,则合力矩是一个固定的值,与选择的支点无关.

证　☞ 图 10-55 中画出空间固定的任意两点 P 和 Q,它们不一定都在物体上.根据条件 $\int d\boldsymbol{F}=0$,关于 P 点的力矩为

$$\begin{aligned}\tau_P&=\int \boldsymbol{r}_P\times d\boldsymbol{F}\\&=\int(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{r}_Q)\times d\boldsymbol{F}\\&=\boldsymbol{D}\times\int d\boldsymbol{F}+\int \boldsymbol{r}_Q\times d\boldsymbol{F}\\&=0+\tau_Q=\tau_Q\end{aligned}$$

10.2　质心(重心)

10.67　三个微粒的质量分别为 2 kg, 4 kg 和 6 kg,且分别位于边长为 0.5 m 的等边三角形的三个角上.若 2 kg 的微粒位于原点,4 kg 的微粒在 x 轴正方向上,求该体系的质心.

解　☞ 三个质点如图 10-56 所示.质心的 x 分量为

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad x_1=0,x_2=0.5\ \text{m},\quad x_3=0.25\ \text{m}$$

代入数值得到 $\bar{x}=0.29$ m.同理质心的 y 分量为

$$y_c=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y_1=y_2=0,\quad y_3=0.5\sin60°=0.433\ \text{m}$$

代入数值得到 $\bar{y}=0.22$ m.

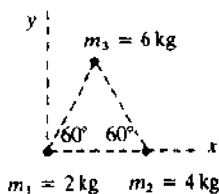


图 10-56

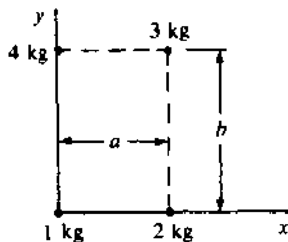


图 10-57

10.68　四个质量分别为 1 kg、2 kg、3 kg 和 4 kg 的微粒位于矩形的四个角上.矩形的边长为 a、b(如图 10-57).如果 $a=1$ m 且 $b=2$ m,求质心的坐标.

解　☞ 在矩形所在的平面内建立笛卡儿坐标系,以 1 kg 的粒子所在位置为原点.按质量增大的顺序四个粒子的坐标依次为(0,0),(a,0),(a,b)和(0,b).总质量为 $M=m_1+m_2+m_3+m_4=10$ kg.代

入质心方程得到

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{1}{10}(0 + 2a + 3a + 0) = 0.5\ \text{m}$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{1}{10}(0 + 0 + 3b + 4b) = 1.4\ \text{m}$$

10.69 图 10-58 是同种材料制成的机器杆的侧视图,求它的质心.

解 在计算质心时,可认为任一部分的质量均集中在其质心处.所以该杆等效于位于 $x_A = \frac{36}{2} = 18(\text{cm})$ 的质点 m_A 和位于 $x_B = 36 + \frac{30}{2} = 51(\text{cm})$ 的质点 m_B.所以

$$x_c = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A(18) + m_B(51)}{m_A + m_B} = \frac{18(m_A/m_B) + 51}{(m_A/m_B) + 1}$$

$y_c = 0$(由对称性)

因为是相同材料,

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{36(8)^2}{30(6)^2} = \frac{32}{15}, \qquad x_c = \frac{18\left(\frac{32}{15}\right) + 51}{\left(\frac{32}{15}\right) + 1} = 28.53(\text{cm})$$

$y_c = 0$

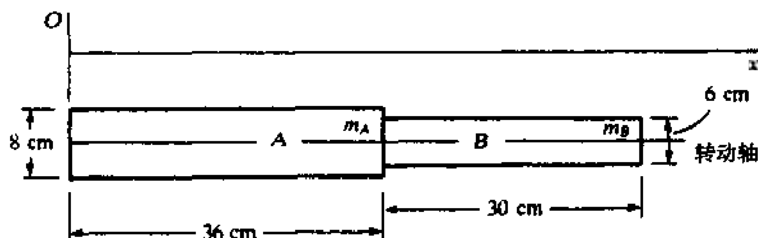


图 10-58

10.70 图 10-59(a)中的均匀矩形块长为宽的两倍.木块被一小凸出物挡住,求当 θ 增加到多大时木块会翻倒?

解 当重力作用线经过支点木块刚好处于平衡.由图 10-59(b)知 $\theta = \arctan(0.5) = 26.6°$.

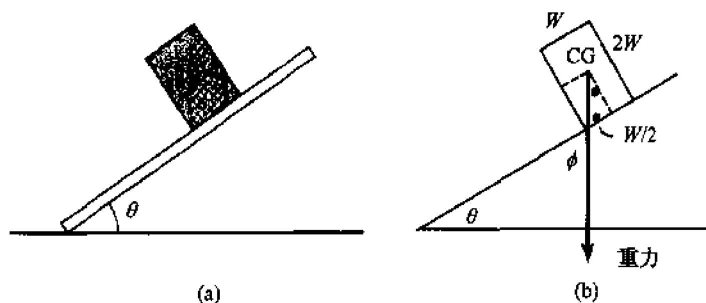


图 10-59

10.71 假设一辆车的重心高于地面 h 且两边车轮与路面的接触点的距离为 d.要把该车向一侧推倒,应使车与地面成多大的角度?

解 当汽车的重力作用线刚好位于与地面接触的车轮时 θ 为临界角.利用 10-59(b), $\tan\theta = (d/2)/h$,所以 $\theta = \arctan(d/2h)$.

10.72 如图 10-60 所示的半美元硬币有部分被嵌入木塞中,木塞上插入两个叉子.在硬币边缘有一根针,系统可绕针与硬币的接触点摆动而不脱离.分析系统的稳定性.

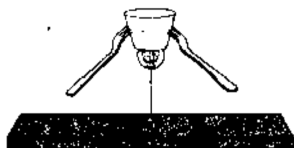


图 10-60

解 ☞ 当绕支点的力矩为零时系统达到静态平衡. 所以系统的质心须与支点在同一直线上. 如果质心在支点(接触点)下方, 如本系统所示, 随着质心的上升系统发生倾斜, 系统势能增加且产生的力矩使系统恢复到平衡位置. 这样的平衡是稳定的, 系统可呈现上述的摆动. (如果质心位于支点上方, 倾斜该系统可使势能下降, 这样的平衡不稳定.)

10.73 求图 10-61 中三粒子系统的质心.

解 ☞ 由图 10-61, $m_1 = 6.0$ kg, $\boldsymbol{r}_1 = 1.0\boldsymbol{i}$; $m_2 = 8.0$ kg, $\boldsymbol{r}_2 = 5.0\boldsymbol{i}$; $m_3 = 5.0$ kg, $\boldsymbol{r}_3 = 5.0\boldsymbol{i} + 3.0\boldsymbol{j}$. 根据定义

$$(6.0 + 8.0 + 5.0)\boldsymbol{r}_c = (6.0)(1.0\boldsymbol{i}) + (8.0)(5.0\boldsymbol{i}) + (5.0)(5.0\boldsymbol{i} + 3.0\boldsymbol{j})$$

$$19.0\boldsymbol{r}_c = 71.0\boldsymbol{i} + 15.0\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{71.0}{19.0}\boldsymbol{i} + \frac{15.0}{19.0}\boldsymbol{j} = 3.7\boldsymbol{i} + 0.8\boldsymbol{j}$$

即 $x_c = 3.7$ m, $y_c = 0.8$ m.

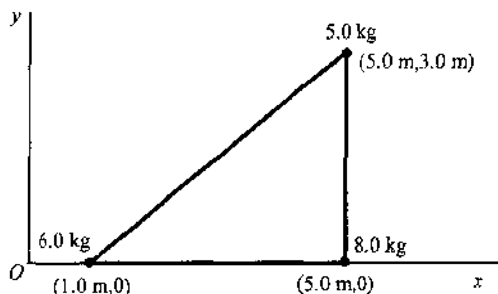


图 10-61

10.74[c] 长为 L 的细杆的质量线密度为 λ, 且从一端开始线性增加. 如果总质量为 M, 较轻一端的质量线密度为 λ_0, 求该杆的质心距较轻端的距离.

解 ☞ 设该杆位于 x 轴上且较轻端位于原点. 因为质量与长度成线性关系, 所以 $\lambda(x) = \lambda_0 + bx$. 由

$$M = \int_0^L \lambda(x)\mathrm{d}x = \lambda_0 x + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^L = \lambda_0 L + \frac{bL^2}{2} \quad 即 \quad b = \frac{2(M - \lambda_0 L)}{L^2}$$

所以质心的位置为

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\lambda(x)\mathrm{d}x}{M} = \frac{(\lambda_0 x^2/2 + bx^3/3)\Big|_0^L}{M} = \frac{\lambda_0 L^2/2 + bL^3/3}{M}$$

代入 b 的表达式得到

$$\bar{x} = \frac{\dfrac{\lambda_0 L^2}{2} + \dfrac{2(M - \lambda_0 L)L}{3}}{M} = \frac{2L}{3} - \frac{\lambda_0 L^2}{6M}$$

10.75[c] 求半径为 R 质量为 M 的均匀固体半球的质心.

解 ☞ 如图 10-62 所示以球心为原点且让半球置于 x, y 面上. 由对称性得 $\bar{x} = \bar{y} = 0$. 把该半球分成一系列平行于 x, y 面的圆片, 每层圆片厚为 dz. 位于 z 与 $(z + dz)$ 间的圆片半径为 $d = \sqrt{R^2 - z^2}$. 如果均匀球的密度为 ρ, 则薄片的质量为 $\mathrm{d}m = (\rho\pi d^2)\mathrm{d}z = \rho\pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$. 质心坐标 $\bar{z}$ 可由所有圆片的分布所得:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^R z\,\mathrm{d}m}{M} = \frac{\int_0^R \pi\rho(R^2 z - z^3)\mathrm{d}z}{M} = \frac{\pi\rho(R^2 z^2/2 - z^4/4)\Big|_0^R}{M} = \frac{\rho\pi R^4/4}{M}$$

因为 $\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)=2M$,

$$\bar{z}=\frac{\rho\pi R^4/4}{\rho 2\pi R^3/3}=\frac{3}{8}R$$

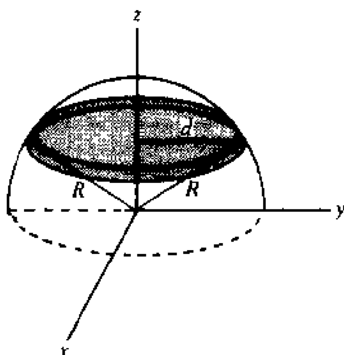


图 10-62

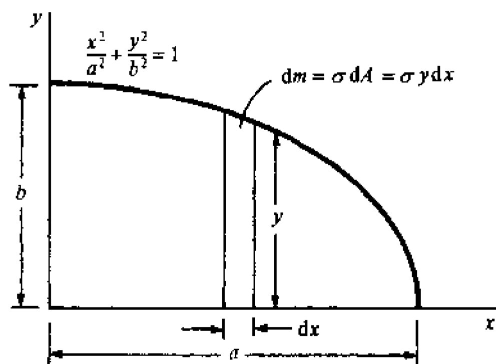


图 10-63

10.76ᶜ 求由面密度为 σ 的材料制成的四分之一椭圆薄片的质心. 见图 10-63.

解 ☞ 该薄片由椭圆与坐标轴围成. 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

薄片面积为 $A=\pi ab/4$.

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int_0^a \sigma xy\mathrm{d}x}{\sigma A}=\frac{1}{A}\int_0^a xy\mathrm{d}x$$

对椭圆方程求微分得

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{2y\mathrm{d}y}{b^2}=0 \quad 即 \quad x\mathrm{d}x=-\frac{a^2}{b^2}y\mathrm{d}y$$

所以
$$x_c=\frac{1}{A}\left(-\frac{a^2}{b^2}\right)\int_b^0 y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\left(-\frac{a^2}{b^2}\right)\left(-\frac{b^3}{3}\right)=\frac{4a}{3\pi}$$

由对称性, $y_c=4b/3\pi$.

10.77ᶜ 求半径为 R 的半球壳的质心(见图 10-64).

解 ☞ 质心的坐标为 $x_c=y_c=0$

$$z_c=\frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int z\sigma\mathrm{d}A}{\sigma A}$$

其中 σ 是薄球壳的面密度. 因为 $\mathrm{d}A=2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=A\sin\theta\mathrm{d}\theta$ 且 $z=R\cos\theta$, 所以

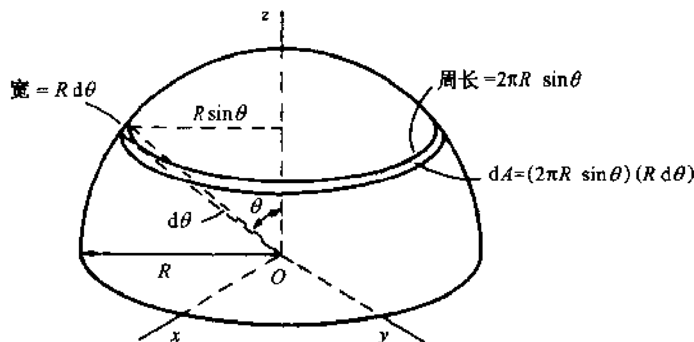


图 10-64

$$z_c = \int_0^{\pi/2} R\cos\theta\sin\theta d\theta = -\frac{R}{2}[\cos^2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{R}{2}$$

10.78[c]　从 10.77 题的结论推出 10.75 题的结论.

解　☞ 根据 10.77 题知,半径为 r 厚度为 dr 的球壳等效于位于 z 轴上 $z=r/2$ 处的质点 $dm=\frac{1}{2}(4\pi r^2 dr)\rho$. 所以对半径为 R 的实心半球而言,

$$M\bar{z} = \int z dm = \rho\int_0^R \pi r^3 dr = \frac{\rho\pi R^4}{4}$$

与 10.75 题相同. 这是整体的质心与各部分质心满足质心定理的另一个应用.

10.79[c]　求一个高为 h, 半径为 R, 恒定密度为 ρ 的圆锥的质心.

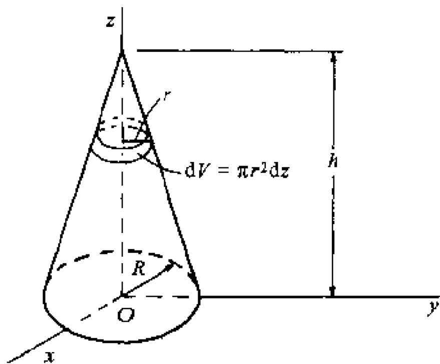


图 10-65

解　☞ 在图 10-65 中, 圆锥的底面位于 xy 面内且对称轴沿 z 方向. 质心的坐标为 $x_c = y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int z\rho dV}{\int \rho dV}$$

由三角形相似得

$$\frac{r}{h-z} = \frac{R}{h} \quad 即 \quad z = h - \frac{h}{R}r$$

所以 $dV = -(\pi h/R)r^2 dr$ 且

$$z_c = \frac{\int_R^0 \left(h - \frac{h}{R}r\right)r^2 dr}{\int_R^0 r^2 dr} = \frac{-h\frac{R^3}{3} + h\frac{R^3}{4}}{-\frac{R^3}{3}} = \frac{h}{4}$$

10.80[c]　求在均匀重力场 $\boldsymbol{g}$ 中的物体绕固定点 O 转动时的力矩. 物体质量为 M.

解　☞ 物体中的质量元重力为 $dm\boldsymbol{g}$; 所以力矩 $d\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}\times dm\boldsymbol{g}$ 其中 $\boldsymbol{r}$ 是从 O 指向 dm 的半径矢量. 对整个物体积分,

$$\boldsymbol{\tau} = \int \boldsymbol{r}\times dm\boldsymbol{g} = \left(\int \boldsymbol{r} dm\right)\times\boldsymbol{g} = (M\boldsymbol{r}_c)\times\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_c\times M\boldsymbol{g}$$

所以重力的力矩可认为是由物体的重力 $M\boldsymbol{g}$ 作用在质心获得.

第十一章　转动(Ⅰ):运动学与动力学

11.1　角运动和力矩

11.1　分别用度(°),弧度(rad)和转数(r)表示下列角度(a)20°;(b)0.40rad;(c)$\frac{1}{3}$r.

解　☞ (a)$20° = 20(2\pi/360) = 0.35(\text{rad}) = 0.35(1/2\pi) = 0.056\text{r}$;(b)$0.40\text{rad} = 0.40(360/2\pi) = 23° = 23\left(\frac{1\text{r}}{360}\right) = 0.064\text{r}$;(c)$\frac{1}{3}\text{r} = \frac{1}{3}(360°) = 120° = 120(2\pi/360) = 2.09\text{rad}$.

11.2　分别用度每秒,弧度每秒以及转每秒表示下列角速度:(a)0.020 r/s;(b)30°/s;(c)1.40 rad/s.

解　☞ (a)$0.020\ \text{r/s} = 0.020(360) = 7.2(°/\text{s}) = 0.020(2\pi) = 0.126(\text{rad/s})$;(b)$30(°/\text{s}) = 30(2\pi/360) = 0.52(\text{rad/s}) = 30\left(\frac{1}{360}\right) = 0.083(\text{r/s})$;(c)$1.40\ \text{rad/s} = 1.40(360/2\pi) = 80°/\text{s} = 1.40(1/2\pi) = 0.22(\text{r/s})$.

11.3　月球的直径为 3480 km 且距地球 3.8×10^8 m.(a)地球上的人看来月球所张的角为多少弧度?(b)如果地球的直径为 1.28×10^4 km,则站在月球上的人看地球所张的角为多大?

解　☞ (a)$\theta = (3.48\times10^6\ \text{m})/(3.8\times10^8\ \text{m}) = 0.0092\ \text{rad}$;(b)$(1.28\times10^7\ \text{m})/(3.8\times10^8\ \text{m}) = 0.034\ \text{rad} \approx 2°$.

11.4　一小束激光从地球射向月球.如果该激光束照到月球上直径为 2.50 m 的区域,求光束的张角?

解　☞ $\theta = (2.50\ \text{m})/(3.8\times10^8\text{m}) = 6.6\times10^{-9}\text{rad}$.

11.5　一个球以角速度 $\boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ rad/s 绕自身的轴转动.求该轴与 x 轴的夹角.

解　☞ $\boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j}$;$\omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5.83$.所以转轴与 x 轴的夹角满足 $\cos\theta = \omega_x/\omega = 3/5.83$,得 $\theta = 59°$.

11.6　两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 决定一个平行四边形.证明 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ 等于该平行四边形的面积.所以该面可以用一个矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 表示.求该矢量与平行四边形面的空间关系.

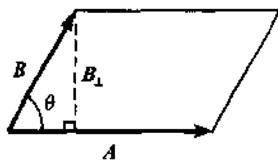


图 11-1

解　☞ 以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形的面积是底和高的乘积.底为 $|\boldsymbol{A}|$,高为垂直于 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{B}$ 的分量,$B_\perp = |\boldsymbol{B}|\sin\theta$(如图 11-1 所示).面积为 $|\boldsymbol{A}|B_\perp = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta = |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$.矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的大小等于该平行四边形的面积,方向垂直于该平行四边形面.

11.7　如果 $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}(\text{N})$, $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}(\text{m})$.求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$.

解　☞ $(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\times(2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) = 6\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} - 8\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} - 24\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = 6\boldsymbol{k} - 18\boldsymbol{j} - 24\boldsymbol{i}(\text{N}\cdot\text{m})$.对于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$,结果与上述结果相反.

11.8　如果 $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}(\text{m})$ 且 $\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}(\text{N})$ 求力矩 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$.如果 $\boldsymbol{r} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}(\text{m})$ 呢?

解　☞ $(2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k})\times(3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}) = 6\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} - 18\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 8\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}\ (\text{N}\cdot\text{m})$.$(5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k})\times(3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}) = 0 - 20\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k} + 8\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} + 0 = 8\boldsymbol{i} - 38\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}\ (\text{N}\cdot\text{m})$.

11.9　200 N 的力与半径为 25 cm 的轮子边缘相切,求转动力矩.若力与轮子的轮辐成 40°角,

再求转动力矩.

解 ☞ 显然该题要求以过轮子中心的轴为转轴的力矩.因为到力的作用点的半径长即为力臂,所以 $\tau=(0.25\ \text{m})(200\ \text{N})=50\ \text{N}\cdot\text{m}$.如果力与轮辐夹角为 40°,力的切向分量就为 $F_t=(200\ \text{N})\cdot(\sin 40°)=128.6\ \text{N}$. $\tau=(128.6\ \text{N})(0.25\ \text{m})=32.1\ \text{m}$,力的径向分量对转力矩没有作用.

11.2　转动运动学

11.10　一个原来静止的飞轮在 6.0 s 内角速度达到 36 rad/s.(a)角加速度为多大?(b)求6.0 s 内转过的角度.

解 ☞ (a)运用角位移方程,ω_0 为零:

$$\omega=\omega_0+\alpha t,\qquad 36=\alpha(6.0),\qquad \alpha=6\ \text{rad/s}^2$$

(b)运用角位移方程,θ_0 和 ω_0 都为零:

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{1}{2}(6)(6^2)=108(\text{rad})$$

或者利用 $\theta=\theta_0+\dfrac{\omega_0+\omega}{2}t=\dfrac{0+36}{2}(6)=108\ \text{rad}$(对于匀角加速度运动,$\overline{\omega}=\dfrac{\omega_0+\omega}{2}$)

11.11　当 α 恒定时证明 $\phi=\phi_i+(\omega^2-\omega_i^2)/2\alpha$.(有时旋转角用 ϕ 表示而不用 θ,用 i 而不用 0 表示初始值.)

解 ☞ 已知 $\omega=\omega_i+\alpha t$ 和 $\phi=\phi_i+\omega_i t+\frac{1}{2}\alpha t^2$.由第一个方程解得 $t=(\omega-\omega_i)/\alpha$.代入第二个方程得到

$$\phi=\phi_i+\omega_i\frac{\omega-\omega_i}{\alpha}+\frac{1}{2}\alpha\frac{(\omega-\omega_i)^2}{\alpha^2}$$

即 $\phi=\phi_i+\dfrac{\omega-\omega_i}{\alpha}\left[\omega_i+\dfrac{1}{2}(\omega-\omega_i)\right]=\phi_i+\dfrac{(\omega-\omega_i)(\omega+\omega_i)}{2\alpha}=\phi_i+\dfrac{\omega^2-\omega_i^2}{2\alpha}$.

11.12　一个以角速度 30 r/s 转动的轮子以一定的加速度停下来.静止之前转动了 60 r.(a)求角加速度,(b)求静止所需的时间.

解 ☞ (a)由 $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$求角加速度:

$$\alpha=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2(\theta-\theta_0)}=\frac{0^2-[(30)(2\pi)]^2}{2(60)(2\pi)}=-47\ (\text{rad/s}^2)$$

(b)由 $\omega=\omega_0+\alpha t$ 求时间:

$$t=\frac{0-(30)(2\pi)}{-47}=4(\text{s})$$

11.13　一旋转的轮子初角速度为 50 rad/s 向东;20 s 后变为 50 rad/s 向西.若角加速度恒定,求(a)角加速度的大小和方向,(b)20 s 后的角位移,(c)30 s 后的角速度.

解 ☞ (a)因为 $\boldsymbol{\alpha}\Delta t=\boldsymbol{\omega}_f-\boldsymbol{\omega}_i=\boldsymbol{\omega}_f+(-\boldsymbol{\omega}_i)$,右边的两个矢量均指向西,所以角加速度向西,如图 11-2(a)所示.角加速度的大小为

$$\alpha=\frac{\omega_f-\omega_0}{\Delta t}=\frac{50-(-50)}{20}=5(\text{rad/s}^2)$$

(b)由 $\omega_f^2=\omega_i^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$得角位移为

$$\theta-\theta_0=\frac{\omega_f^2-\omega_i^2}{2\alpha}=\frac{50^2-50^2}{2(5)}=0$$

该结果也能由平均角速度$\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_f)=0$得到.在 20 s 内的角加速度的效果仅仅使转动轴的方向反向.(c)由图 11-2(b)可知,30 s 时的角速度为 $\omega=\omega_0+\alpha t=50+5(30-20)=100\ (\text{rad/s})$.一旦 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 平行,角速率改变,而转动轴的方向不变.

11.14　一张以 8.16 rad/s² 转动的唱片转盘匀减速转动 6 周后停下.角加速度为多少 rad/s²?

解 ☞ 设 $\theta_0=0$.所以

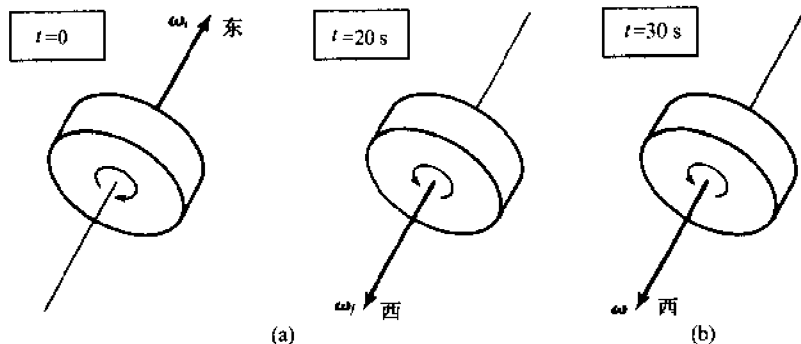


图 11-2

$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta,0=8.16^2+2\alpha(6\times2\pi),\alpha=\frac{-8.16^2}{24\pi}=-0.884(\mathrm{rad/s^2})$$

负号表示是匀减速运动.

11.15 一根绳子绕在半径为 30 cm 的轮子上.当轮子由初速度 2.0 r/s 匀减速到静止,绳子绕在轮子上的长度为 25 m.求轮子的加速度以及轮子停止时转过的周数.

解 ☞ 对应的角位移为 $\theta=25/0.3$ rad$=83$ rad$=13.3$ r;又已知 $\omega_0=2.0$ r/s 和 $\omega=0$,运用 $\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\theta$ 求得 $\alpha=-0.150$ r/s^2, $\alpha=-0.942$ rad/s^2.

11.16 汽车在7s 内由静止匀加速运动至轮子的角速度为 6.0 r/s.求轮子的角加速度.该过程中轮子转了多少圈?

解 ☞ 因为 $\omega_0=0,\omega=6.0$ r/s, $t=7$ s.运用 $\omega=\omega_0+\alpha t$ 得到 $\alpha=0.86$ r/s^2.所以 $\theta=\overline{\omega}t=3(7)=21$(r).将上述值乘以 2π, $\alpha=5.38$ rad/s^2, $\theta=132$ rad.

11.17 一个原来以 0.80 r/s 转动的转盘 20 s 后停止.求轮子的角加速度.该过程中轮子转了多少圈?(假设是均加速转动.)

解 ☞ 已知 $\omega_0=0.80$ r/s, $\omega=0$, $t=20$ s.运用 $\omega=\omega_0+\alpha t$ 得到 $\alpha=-0.04$ r/s^2.所以 $\theta=\overline{\omega}t=0.40(20)=8$(r).

11.18 当汽车行驶 2.5 km 时,汽车的车轮转过多少圈?已知车轮的直径为 60 cm.

解 ☞ 该题中 $s=2500$ m, $r=0.30$ m.由 $s=r\theta$ 得到 $\theta=8330$ rad$=1330$ r.

11.19 两个相互交错的齿轮半径分别为 0.50 cm 和 0.15 cm.当半径较大的齿轮转过 3 圈时,小齿轮转过多少圈?

解 ☞ 两个轮子的接触点运动相同的距离;所以由(0.50 cm)(3 r)=(0.15 cm)θ 得到 $\theta=10$ r.

11.20 一辆汽车在 20 s 内从静止匀加速到 15 m/s.求汽车轮子的角加速度以及该过程中轮子转过的圈数.车轮的半径为 $\frac{1}{3}$ m.

解 ☞ 先由 $v=v_0+at$ 和 $s=\overline{v}t$ 求得线性加速度和距离,得到 $a=0.75$ m/s^2 以及 $s=150$m.转化到角向量中为 $\alpha=a/r=a/\frac{1}{3}=2.25$ rad/s^2 和 $\theta=s/r=450$ rad$=72$ r.

11.3 力矩与转动

11.21 一卷线静止放在水平桌面上,如图 11-3 所示.轻轻拉动线使得 P 点无滑动.P 点为卷轴与桌面的接触点.判定线在 a、b、c、d 各位置,卷轴会向哪边滚动?解释你的回答.注:在 d 处,线的延长线通过 P 点.

解 ☞ 如果以 P 点为原点计算力矩,重力、摩擦力和支持力产生的合力矩为零.

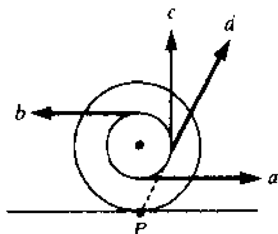


图 11-3

(a)对 P 点的力矩沿顺时针方向,故卷轴顺时针转动并向右滚动,使线绕到卷轴上.

(b)关于 P 点的力矩沿逆时针方向,故卷轴沿逆时针旋转并向左滚动.

(c)关于 P 点的力矩沿逆时针方向,卷轴沿逆时针旋转并向左滚动.

(d)关于 P 点的力矩为零故卷轴不转动.因为轻轻拉动卷轴使得它没有滑动,所以卷轴保持静止.

11.22 一块磨石的转动惯量为 $1.6\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.施加一个恒定的力矩,飞轮在 15 s 内角速度达到 1200 r/min.假设飞轮开始时静止,求(a)角加速度,(b)所施力矩的大小,(c)15 s 时转过的角度,(d)力矩对飞轮做的功 W.

解 ☞ (a)$t=15$ s 时

$$\omega = 1200\ \text{r/min}\times 1\ \text{min}/60\ \text{s}\times 2\pi\ \text{rad}/1\text{r} = 40\pi\ \text{rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega-\omega_0}{t} = \frac{(40\pi-0)\text{rad/s}}{15\ \text{s}} = 8.38\ \text{rad/s}^2$$

(b)$\tau = I\alpha = 1.6\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\times 8.38\ \text{rad/s}^2 = 0.0134\ \text{m}\cdot\text{N}$

(c)$\theta = \overline{\omega}t = \dfrac{(40\pi+0)\text{rad/s}}{2}\times 15\ \text{s} = 942\ \text{rad}$

(d)$\omega = \tau\theta = 0.0134\times942 = 12.6(\text{J})$

也可根据动能定理,

$$W = KE = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(1.6\times10^{-3})(40\pi)^2 = 12.6(\text{J})$$

11.23 一根质量不计的轻杆一端固定使之可以像摆一样自由摆动.两个物体质量分别为 $2m$ 和 m 且分别固定在距固定点 b 和 $3b$ 处.让杆从水平位置自由释放.求杆释放时的角加速度.

解 ☞ 力矩 $= g(2mb+3mb) = 5mgb$　　$I = 2mb^2 + m(9b^2) = 11mb^2$.因为 $\tau = I\alpha$,所以 $\alpha = 5g/11b$.

11.24 三个小孩坐在跷跷板上处于平衡.重 20 kg 和重 30 kg 的小孩在支点的两边并且都与支点相距 2.0 m.若第三个小孩离开则破坏平衡状态.求板的初角加速度.(不计板重.)

解 ☞ 关于支点的力矩为:$30(9.8)(2) - 20(9.8)(2) = I\alpha$.但 $I = 20(4)+30(4) = 200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.代入上式得到 $\alpha = \dfrac{196}{200} = 0.98\ \text{rad/s}^2$.

11.25 长为 L 的细线一端系有质量为 m 的物体从而构成一个摆.该摆从与竖直方向成 θ 角处释放.若以固定点为转轴,求释放的瞬间(a)摆的力矩以及(b)角加速度.

解 ☞ 力矩 =(力)(力臂) $= mgL\sin\theta$,因为 $\tau = mr^2\alpha$,且 $r = L$ 所以 $\alpha = (g\sin\theta)/L$.

11.26 要使 50 kg 且回转半径为 40 cm 的飞轮在 10 s 内角速度达到 300 r/min,应施加多大的恒定力矩?

解 ☞ $\tau = I\alpha$.根据回转半径 k 的定义,$I = Mk^2 = (50\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2 = 8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.要求 τ 还需知道 α.由 $\omega = \omega_0 + \alpha t$,$\omega_0 = 0$ 和 $t = 10\text{s}$,$\omega = 2\pi f = 2\pi(300\ \text{r/min}) = 600\pi\ \text{rad/min} = 10\pi\ \text{rad/s}$,得到 $10\pi\ \text{rad/s} = \alpha(10\text{s})$ 和 $\alpha = \pi\ \text{rad/s}^2 = 3.14\ \text{rad/s}^2$,最终解得 $\tau = (8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3.14\ \text{rad/s}^2) = 25\ \text{N}\cdot\text{m}$.

11.27 一个重 80 lb 的轮子回转半径为 2 ft 且以 360 r/min 转动.摩擦力矩为 4 lbf·ft.求轮子停止所需的时间.

解 ☞ 由 $\omega = \omega_0 + \alpha t$,$\omega = 0$ 和 $\omega_0 = 2\pi f$,即 $\omega_0 = 2\pi(360\text{r/min})(60\text{s/min}) = 12\pi\text{rad/s}$.若知道 α 就可求出 t.由动力学公式 $\tau = I\alpha$,已知 $\tau = -4\ \text{lbf}\cdot\text{ft}$ 以及 $I = Mk^2 = (80\ \text{lb}/32\ \text{ft/s}^2)(2\ \text{ft})^2 = 10\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2$;

所以 $\alpha=(-4\ \mathrm{lb\cdot ft})/(10\ \mathrm{slug\cdot ft^2})=-0.4\ \mathrm{rad/s^2}$.最后由 $0=12\pi\ \mathrm{rad/s}-(0.4\ \mathrm{rad/s^2})t$ 解得 $t=94$ s.

11.28 500 g 的轮子转动惯量为 0.015 kg·m²,开始时以 30 r/s 转动.转动 163 转后停止,求使之停止的力矩.

解 ☞ $\tau=I\alpha$, $I=0.015\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.由 $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$, $\omega=0$, $\omega_0=2\pi f=(2\pi\ \mathrm{rad})(30\ \mathrm{s^{-1}})=60\pi\ \mathrm{rad/s}$, $\theta=(2\pi\ \mathrm{rad/r})(163\mathrm{r})=326\pi$ rad.所以 $\alpha=-(60\pi\ \mathrm{rad/s})^2/(652\pi\ \mathrm{rad})$, $\alpha=-17.3\ \mathrm{rad/s^2}$.所以 $\tau=-(0.015\ \mathrm{kg\cdot m^2})(17.3\ \mathrm{m/s^2})=-0.26\ \mathrm{N\cdot m}$.

11.29 一个 8 kg 的轮子回转半径为 25 cm.它的转动惯量是多少?要使角加速度为 3 rad/s² 则应施加多大的力矩?

解 ☞ $I=Mk^2=(8\ \mathrm{kg})(0.25\ \mathrm{m})^2=0.50\ \mathrm{kg\cdot m^2}$. $\tau=I\alpha=(0.50\ \mathrm{kg\cdot m^2})(3\ \mathrm{rad/s^2})=1.50\ \mathrm{N\cdot m}$.

11.30 一个大小恒为 1.2 N 的力沿切线方向作用在沿水平轴旋转的固体圆盘的轴上(如图 11-4 所示).轴的半径为 3 cm,圆盘的半径为 8 cm,质量为 4 kg.不计轴的质量,求圆盘的角加速度.

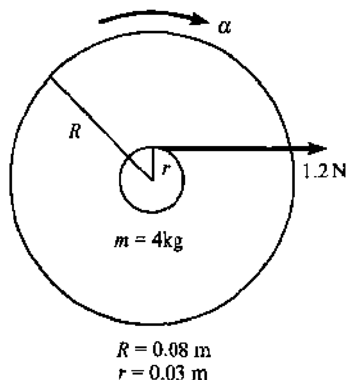


图 11-4

解 ☞ 先求圆盘的角加速度:

$$I=\frac{1}{2}mR^2=\frac{1}{2}(4)(0.08^2)$$
$$=0.0128(\mathrm{kg\cdot m^2})$$

运用转动定律:

$$\tau=I\alpha,\quad 1.2(0.03)=0.0128\alpha$$
$$\alpha=2.81\ \mathrm{rad/s^2}$$

11.31 半径为 10 cm 的圆盘转动惯量为 0.02 kg·m².15 N 的力沿切线方向作用在圆盘的边缘使之产生角加速度 α.则 α 为多少 rad/s²?

解 ☞ $\tau=I\alpha$; $15(0.10)=0.02\alpha$; $\alpha=75\mathrm{rad/s^2}$.

11.4 转动惯量

11.32 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的铁环半径分别为 a_1 和 a_2.它们装配在质量不计的框架上,如图 11-5 所示.求以过圆心并垂直于环面的轴为转轴的转动惯量.

解 ☞ I 的定义为 $\sum_1^N r_i^2\Delta m_i$;在该题中写成两项的和,即为

$$a_1^2\sum_{i_1}^{N_1}\Delta m_{i1}+a_2^2\sum_{i_2}^{N_2}\Delta m_{i2}=m_1a_1^2+m_2a_2^2$$

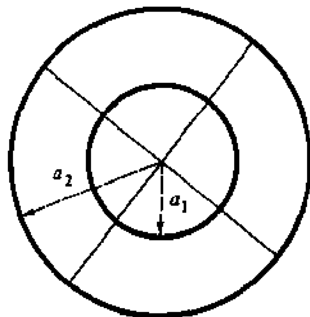


图 11-5

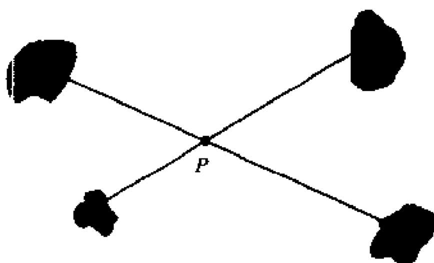


图 11-6

11.33 四个不规则的物体固定在质量不计的框架上,如图 11-6 所示.以垂直于物体面且过 P 点的轴为转轴,证明系统的转动惯量 $I=I_1+I_2+I_3+I_4$,其中 I_1 是物体 1 关于该轴的转动惯量,其它类似.你能从中得出什么一般规律?

证　$I=\sum r_i^2\Delta m_i=\sum r_{i1}^2\Delta m_{i1}+\sum r_{i2}^2\Delta m_{i2}+\cdots$,其中第一项是对物体 1 求和,第二项是对物体 2 求和,依次类推.第一项即为 I_1,第二项即为 I_2.所以 $I=I_1+I_2+I_3+I_4$.得出规律:物体关于某轴的转动惯量是各部分转动惯量的代数和.

11.34 如图 11-7 所示四个质点由一根质量不计的杆相连.求分别以(a)以 AA' 为轴,(b)以 BB' 为轴的转动惯量和回转半径.

解　(a)$I=\sum m_ir_i^2=k^2\sum m_i$.在该题中,$I_{AA'}=0+(2m)b^2+m(4b^2)+3m(9b^2)=33mb^2=k^2(7m)$故 $k=2.17b$　(b)$I_{BB'}=m(4b^2)+(2m)b^2+0+(3m)b^2=9mb^2=7mk^2$,故 $k=1.13\ b$.

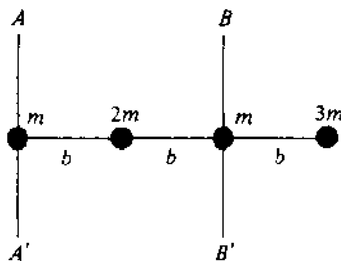


图 11-7

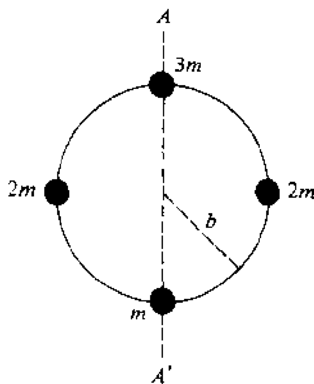


图 11-8

11.35 图 11-8 中四个物体固定在很轻的环形框架上.求以过环心且垂直于环面的轴为转轴时物体的转动惯量和回转半径.假设该环可以自由旋转,应给该系统施加多大的力矩使之绕该轴产生的角加速度为 α?若以 AA'为转轴呢?

解　由定义 $I=\sum m_ir_i^2=\sum m_ib^2=8mb^2$.与 $I=(\sum m_i)k^2$ 对比得到 $k=b$.因为 $\tau=I\alpha$,$\tau=8mb^2\alpha$.$I_{AA'}=(2m)(b^2)+(2m)(b^2)=4mb^2$,也等于 $k_{AA'}^2(8m)$,所以得到 $k_{AA'}=b/2^{\frac{1}{2}}$,$\tau_{AA'}=4mb^2\alpha$.

11.36 一个氮分子可以认为由两个质点(每个质点 $m=14\text{u}=14\times1.67\times10^{-27}\text{kg}$)相距 $1.3\times10^{-10}\text{m}$ 构成.在空气中室温下该分子的平均转动动能大约为 $4\times10^{-21}\text{J}$.求该分子关于其质心的转动惯量和转动速度(r/s).

解　$I=\sum m_ir_i^2=2(2.34\times10^{-26})(0.65\times10^{-10})^2=1.98\times10^{-46}(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$.又由 $I\omega^2/2=4\times10^{-21}$得到 $\omega=6.4\times10^{12}\text{rad/s}=1.0\times10^{12}\text{r/s}$.

11.37 三个质量为 M 长为 L 的细均匀杆置于 x、y、z 轴上且都有一端置于原点.求该系统关于 z 轴的 I.

解　只有位于 x,y 轴上的杆产生关于 z 轴的转动惯量.由平行轴定理知一根杆关于其一端的转动惯量为 $ML^2/12+M(L/2)^2=ML^2/3$.所以,由 11.33 题得 $I_z=2ML^2/3$.

11.38 证明图 11-6 中系统的转动惯量 I(以过 P 点且垂直于纸面的轴为转轴)等于 $\sum(I_{ci}+m_ir_i^2)$,其中 r_i 是从 P 到第 i 个质心的距离.

解　设 r_j 是第 j 个质心相对于 P 点的距离.由平行轴定理知 $I_j=I_{cj}+m_jr_j^2$,所以

$$I=\sum_{j=1}^{4}(I_{cj}+m_jr_j^2)$$

11.39 已知以过球心的轴为转轴的转动惯量 $I=\frac{2}{5}Mr^2$,求以与球相切的轴为转轴时的 I.

解 ☞ 运用平行轴定理：$I = I_c + Mr^2 = 7Mr^2/5$.

11.40 一根长为 L 的杆由长为$\frac{1}{2}L$ 质量为 m_w 的均匀木杆和长为$\frac{1}{2}L$ 质量为 m_b 的均匀铜杆组成.(a)求以过杆的中心且垂直于杆的轴为转轴的 I.(b)若以平行于该轴且过木杆一端的轴为转轴呢?(提示:对于长为 a 的均匀杆 $I_c = ma^2/12$.)

解 ☞ (a)首先两部分分别考虑.对于木杆,由平行轴定理知以过端点的轴为转轴的 $I = [m_w(L/2)^2]/12 + m_w(L/4)^2 = (m_wL^2)/12$.对于黄铜而言 $I = (m_bL^2)/12$.把两项相加得到 $I = (m_w + m_b)(L^2/12)$.(b)以木棒一端为转轴黄铜贡献的转动惯量 $I = [m_b(L/2)^2]/12 + m_b(3L/4)^2 = (7m_bL^2)/12$,这里我们再次用到了平行轴定理.再加上$(m_wL^2)/12$,所以 $I = [L^2(m_w + 7m_b)]/12$.

11.41[c] 如图 11-9 所示质量为 M 的铁环半径为 R.铁环位于 xy 面内并以原点 O 为中心.在图中,z 轴从 O 点指向观察者.质量元 dm 产生的关于 z 轴的转动惯量 $dI_z = R^2dm$,关于 x 轴的转动惯量为 $dI_x = y^2dm$;同理 $dI_y = x^2dm$.(a)求连结 dI_x, dI_y 和 dI_z 的方程,(b)求包含 I_x、I_y 和 I_z 的方程,(c)运用对称性求连结 I_x 和 I_y 的方程,(d)用 M 和 R 表示铁环的 I_x, I_y 和 I_z,(e)求以过 A 且平行于 x 轴的轴为转轴的铁环的转动惯量.

解 ☞ (a)由图 11-9,因为 $x^2 + y^2 = R^2$,得到 $x^2dm + y^2dm = R^2dm$,即 $dI_y + dI_x = dI_z$.(b)把(a)中的式子对整个环积分得到 $I_x + I_y = I_z$.(c)由对称性知道关于 x 轴的转动惯量 I_x 等于关于 y 轴的转动惯量 I_y,即 $I_x = I_y$.(d)容易得到 $I_z = \int R^2dm = R^2\int dm = MR^2$.因为 $I_z = I_x + I_y = 2I_x$,所以 $I_x = I_y = MR^2/2$.(e)根据图 11-9,运用平行轴定理得到 $I_{Ax} = I_x + MR^2 = 3MR^2/2$.

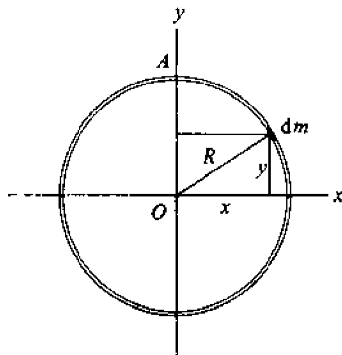


图 11-9

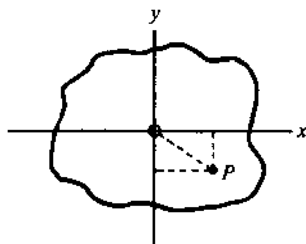


图 11-10

11.42 总结 11.41 题中的讨论证明下列原理:xy 面的任一平面物体关于 z 轴的转动惯量 $I_z = I_x + I_y$.其中 I_x 和 I_y 分别是物体关于 x 轴和 y 轴的转动惯量.

证 图 11-10 表示一般的情况.z 轴正方向指向读者.位于 P 点的有限质量元 dm 关于 x 轴的转动惯量为 $dI_x = y^2dm$,关于 y 轴的转动惯量为 $dI_y = x^2dm$.关于 z 轴的转动惯量为 $dI_z = R^2dm$.因为 $R^2 = x^2 + y^2$,所以 $dI_z = dI_x + dI_y$.对整个物体积分得到 $I_z = I_x + I_y$.该结果称为垂直轴定理.

11.43 运用 11.42 题中的垂直轴定理找出薄圆盘以任意直径为轴的转动惯量和关于中心轴的转动惯量的关系.

解 ☞ 一半径为 R 的薄均匀盘位于 xy 面内,如图 11-11 所示.由垂直轴定理得 $I_{x0} + I_{y0} = I_{z0}$.但由对称性得 $I_{x0} = I_{y0} = I_d$,其中 I_d 是以任意直径为转轴的转动惯量.所以 $2I_d = I_{z0}$.一个圆柱体或圆盘关于对称轴的转动惯量为$\frac{1}{2}MR^2$.所以 $I_{z0} = \frac{1}{2}MR^2$, $I_d = \frac{1}{4}MR^2$.

11.44 运用积分求长为 L 的细均匀杆以距其一端 $L/4$ 且垂直于杆的轴为转轴的转动惯量.说明如何由平行轴定理得到该结论.

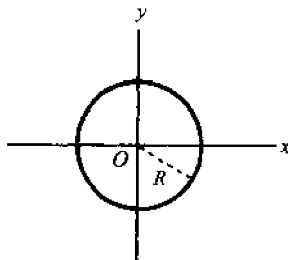


图 11-11

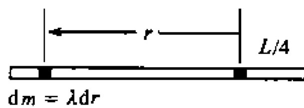


图 11-12

解 ☞ 根据 11-12 图,

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_{-L/4}^{3L/4} r^2 \lambda \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{3}\left[\left(\frac{3L}{4}\right)^3 + \left(\frac{L}{4}\right)^3\right] = \frac{7(\lambda L)(L^2)}{48} = \frac{7ML^2}{48}$$

细杆关于中心的 $I=(ML^2)/12$. 对于距其 $L/4$ 的转轴, $I=(M)(L/4)^2+(ML^2)/12=(7ML^2)/48$. ($I_c=ML^2/12$ 在该题中直接给出,但也可通过从 $-L/2$ 到 $L/2$ 积分得到.)

11.45[c] 一个均匀的空心圆柱体的密度为 ρ, 长为 L, 内径为 a, 外径为 b. 证明关于该圆柱体对称轴的转动惯量为 $I=\frac{1}{2}\pi\rho L(b^4-a^4)=\frac{1}{2}M(b^2+a^2)$, 其中 M 为圆柱体的质量.

证 由图 11-13 知该圆柱壳的质量 M 为其体积的 ρ 倍即 $\rho\pi(b^2-a^2)L$. 厚为 $\mathrm{d}r$ 的圆柱壳的转动惯量为 $\mathrm{d}I=(\rho 2\pi r L \mathrm{d}r)r^2$; 圆括号中的项为薄圆柱壳的质量. 所以

$$I = 2\pi\rho L\int_a^b r^3 \mathrm{d}r = \frac{2\pi\rho L(b^4-a^4)}{4}$$

替换 ρ, 写成

$$I = \frac{\rho\pi L(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{2} = \frac{M(b^2-a^2)}{2}$$

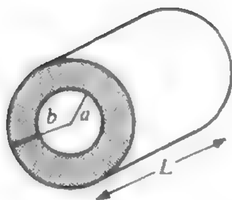


图 11-13

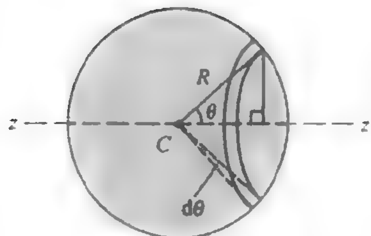


图 11-14

11.46[c] 计算质量为 M 半径为 R 的均匀薄球壳以直径为轴的转动惯量.

解 ☞ 球壳的面密度为 σ, 对整个球面积分得到总质量 $M=\int\sigma \mathrm{d}A$. 因为球壳均匀, 面密度为常数. 所以 $M=\sigma\int \mathrm{d}A=\sigma A=4\pi R^2\sigma$. 得到 $\sigma=M/4\pi R^2$.

根据图 11-14. 圆环的半径为 $R\sin\theta$, 周长为 $2\pi R\sin\theta$. 环的宽度为 $R\mathrm{d}\theta$, 所以面积 $\mathrm{d}A=(2\pi R\sin\theta)(R\mathrm{d}\theta)$, 质量 $\mathrm{d}M=\sigma \mathrm{d}A=(M/4\pi R^2)(2\pi R^2\sin\theta \mathrm{d}\theta)=(M/2)\sin\theta \mathrm{d}\theta$.

设该圆环关于轴 ZZ' 的转动惯量为 $\mathrm{d}I$. 该轴到环上各点的距离为 $R\sin\theta$. 所以 $\mathrm{d}I=(R\sin\theta)^2\mathrm{d}M=(MR^2/2)\sin^3\theta \mathrm{d}\theta$.

整个球壳的转动惯量为各圆环转动惯量之和:

$$I=\int \mathrm{d}I=\int_0^\pi \frac{MR^2}{2}\sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{MR^2}{2}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{MR^2}{2}\left[-\cos\theta\,|_0^\pi+\int_0^\pi \cos^2\theta(-\sin\theta \mathrm{d}\theta)\right]=\frac{MR^2}{2}\left\{[-(-1)-(-1)]+\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi\right\}$$

$$=\frac{MR^2}{2}\left[2+\frac{-1^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right]=\frac{MR^2}{2}\,\frac{4}{3}=\frac{2MR^2}{3}$$

11.47 计算半径为 R 质量为 M 的均匀球关于直径的转动惯量.

解 ☞ 由 11.46 题知半径为 r 的球壳转动惯量为

$$\mathrm{d}I = \frac{2}{3}r^2 \times 质量 = \frac{2}{3}r^2\left(\frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)M = \frac{2M}{R^3}r^4\mathrm{d}r$$

球的转动惯量是各球壳转动惯量之和：

$$I = \int \mathrm{d}I = \frac{2M}{R^3}\int_0^R r^4\mathrm{d}r = \frac{2M}{R^3}\frac{R^5}{5} = \frac{2MR^2}{5}$$

11.48 图 11-15 中的均匀薄板边长为 a 和 b，总质量为 M. 证明关于如图所示轴的转动惯量为 $Mb^2/12$.

证 均匀薄板的面密度为 $\sigma = M/ab$. 宽为 $\mathrm{d}x$ 的质量元产生的转动惯量为 $(\sigma a\mathrm{d}x)x^2$，所以 $I = \int_{-b/2}^{b/2}\sigma a x^2\mathrm{d}x = \sigma ab^3/12$；又因为 $\sigma = M/ab$，所以 $I = Mb^2/12$.

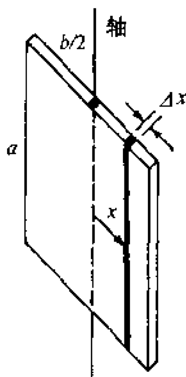


图 11-15

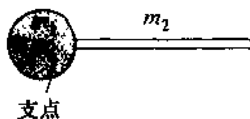


图 11-16

11.49 图 11-16 中圆盘中心为一光滑支点，系统可以自由转动. 均匀杆长为 L. 求从图中位置释放时系统的角加速度. 圆盘的质量为 m_1，杆的质量为 m_2.

解 ☞ 关于支点的转动惯量 $I = I_{c,\text{disk}} + I_{c,\text{rod}} + m_2[b + (L/2)]^2 = m_1b^2/2 + m_2L^2/12 + m_2b^2 + m_2bL + m_2L^2/4$. 杆的重力产生的力矩 $= m_2g[b + (L/2)]$. 所以由代数运算得到，$\alpha = \tau/I = [g(2b + L)]/[(m_1/m_2)b^2 + 2(b^2 + bL + L^2/3)]$.

11.50 如图 11-17 所示，长为 L 质量为 m_2 的均匀杆一端固定. 另一端连有质量为 m_1 半径为 b 的均匀圆盘. 求该系统从图中位置释放时的角加速度.

解 ☞ $I = I_{\text{rod}} + I_{c,\text{disk}} + m_1(L + b)^2 = m_2L^2/3 + m_1b^2/2 + m_1(L^2 + 2Lb + b^2)$. m_1 的力臂为 $(L + b)\sin\theta$，m_2 的力臂为 $(L/2)\sin\theta$. 所以力矩 $\tau = (m_2gL\sin\theta)/2 + m_1g(L + b)\sin\theta$. 解得 $\alpha = \tau/I = g\sin\theta[m_2L + 2m_1(L + b)]/[2m_2L^2/3 + m_1(3b^2 + 4Lb + 2L^2)]$.

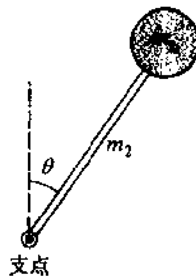


图 11-17

11.5 平动与转动的关系

11.51 一块表秒针长为 2.0 cm. (a)该针的转动频率是多少？(b)秒针的尖端相对于表的运动速率是多大？

解 ☞ (a)若 T 表示以秒为单位的周期，

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{60} = 0.017\ \text{r/s}$$

(b) $v = r\omega = r2\pi f = (2.0\times10^{-2})(2\pi)(\frac{1}{60}) = 2.1\times10^{-3}\ \text{m/s}$

11.52 地球自转一周需 24 小时. 其半径为 6370 km. (a)地球的角速度是多少弧度每秒？(b)如果一架飞机在赤道上方向西飞行，飞行速率应为多大才能赶上太阳？(单位为 km/h)

解 ☞ 地球经过 24 小时转过 2πrad. (a) $\omega = 2\pi$ rad/(24h × 3600 s/h) = 7.272×10^{-5}rad/s. (b)飞机必须以地球的"边缘速率"飞行. 所以由 $v=\omega r$, 代入数据得到 $v = (7.272\times10^{-5}\text{rad/s})(6370\ \text{km})(3600\ \text{s/h}) = 1667$ km/h.

11.53 一个半径为 90 cm 的转轮开始时以 3.0 r/s 转动并匀减速至停止,共转了 26 圈. (a)转轮经多长时间后停止? (b)角减速度是多大? (c)求开始时边缘上一点的切向速度. (d)求边缘上一点的初始径向加速度. (e)求边缘上一点开始时总加速度的大小.

解 ☞ 已知 $r = 0.90$ m, $\omega_0 = 6\pi$ rad/s, $\theta = 26\text{r} = 52\pi$ rad.

(a) $t = \theta/\bar{\omega} = 52\pi/3\pi = 17.3$(s). (b) $|\alpha| = \omega_0/t = 6\pi/17.3 = 1.09$ rad/s^2. (c) $v_t = \omega_0 r = 6\pi(0.90) = 17.0$(m/s). (d) $a_R = \omega_0^2 r = 320$ m/s^2. (e)初始切向加速度 $\alpha r = 0.98$ m/s^2, 所以初始总的加速度为 $(a_T^2 + a_R^2)^{1/2} = 320$ m/s^2.

11.54 如图 11-18(a)所示,站在转盘上的女孩手中拿一单摆. 单摆距转盘中心的半径长为 6.0 m. 转盘的旋转速率为 0.020 r/s, 单摆与竖直方向的夹角为 θ. 求 θ.

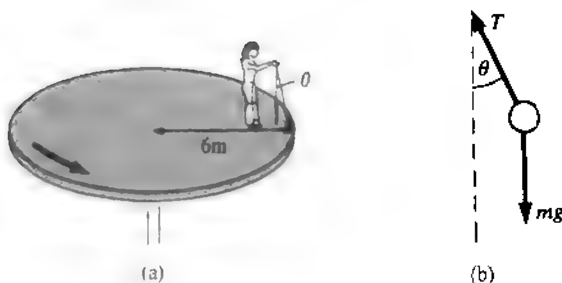


图 11-18

解 ☞ 摆球受到的外力如图 11-18(b)所示. 受力平衡方程 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 可以写成 $T\sin\theta = m\omega^2 r$ 和 $T\cos\theta - mg = 0$. 两式相除得到 $\tan\theta = \omega^2 r/g$. 解得 θ 为 0.55°.

11.55 质量为 m 的物体系在原长为 a 劲度系数为 k 的轻弹簧的一端. 某人握住弹簧的另一端使该装置在水平圆周上以角速度 ω 转动. 求转动半径.

解 ☞ 弹簧的拉力, $k(r-a)$ 必须等于向心力, $m\omega^2 r$. 其中 $r-a$ 是弹簧伸长的长度. 解方程得 $r = ka/k(1-m\omega^2/k)$. 对于硬弹簧, 由于 $m\omega^2/k \ll 1$, 所以 $r = a(1+m\omega^2/k)$. (注意: 当 $|x| \ll 1$ 时, $1/(1-x) \approx 1+x$)

11.56 图 11-19 是未来太空殖民地的设计. 它是一个直径为 6 km 长为 30 km 位于太空中的圆柱体. 它的内部与地球环境一样. 为了产生重力, 圆柱要绕所示的轴转动. 要使站在大陆上的人对地面的压力等于他或她在地球上的重力圆柱旋转的速率应为多大?

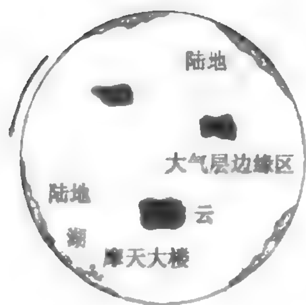


图 11-19

解 ☞ 运用 $m\omega^2 R = mg$, 得到 $\omega^2 = g/R = 9.8/3000 = 3.27\times10^{-3}/\text{s}^2$, 所以 $\omega = (0.0572/\text{s})(3600/2\pi) = 32.8$ r/h.

11.57 地球的旋转速率为 1r/day, 即 1.16×10^{-5} r/s. 地球的半径为 6.37×10^6 m. 如果位于赤道的人站在弹簧秤上, 当地球停止转动时秤的读数上升百分之几? 如果人是站在北极呢?

解 ☞ 已知 $\sum F = ma = m\omega^2 r$ 沿径向指向球内. 秤对人的支持力为 $(mg - m\omega^2 r)$. 当地球停止动转时, 支持力增加到 mg. 所求的比例为 $m\omega^2 r/mg = (1.16\times10^{-5}\times2\pi)^2(6.37\times10^6)/9.8 = 3.5\times$

10^{-3},即为 0.35% .在北极人位于转动轴上,故 $r=0$,变化为零.

11.58 血液中悬浮的红血球和其它微粒很轻,当血液静止时不容易分离出来.如果粒子沿环形路径运动向心力是粒子重量 mg 的 1000 倍,则血样在半径为 10 cm 的离心机中应以多快的速度(转每秒)运动?为什么微粒在离心机中能分开?

解 ☞ 向心力 $=m\omega^2 r$,等于 $10^4 mg$.解得 $\omega=990$ rad/s $=158$ r/s.所需的向心力主要是由粘性力而不是浮力提供.所以红血球运动半径逐渐增大最终紧靠在离心管壁上.

11.59 一只 20 mg 的虫子停在半径为 25 cm 的留声机唱片的光滑边缘.唱片以正常速度 45r/min 转动.要使小虫不滑落,虫与唱片的摩擦系数为多大?

解 ☞ 刚好不滑动时摩擦力 $f=\mu F_N=\mu mg$ 提供向心力,所以 $\mu mg=m\omega^2 r$,已知 $\omega=45$ r/min $=4.71$ rad/s 以及 $r=0.25$ m 得 $\mu=0.566$.

11.60 一个半径为 5 cm 的圆柱以 80cm/s 的恒定速率在地面上滚动.求(a)圆柱关于对称轴的转动速率.(b)圆柱表面上一点加速度的大小和方向.(c)某一瞬间圆柱表面有一点位于圆柱的顶部,求该点的速度.(d)求圆柱与地面接触点的速度.(e)若该点位于圆柱顶与地板中间且在圆柱的前半面,求该 点的速度.

解 ☞ 由图 11-20 所示.相对于中心的切向速度 v_T 等于滚动的圆柱体向前运动的速率.(a) $\omega=v_T/r=0.80/0.05=16$ rad/s.(b)因为 $\alpha=0$,只有径向加速度,$\omega^2 r=12.8$ m/s^2.边缘上各点的瞬时速度等于圆心的速率 0.80 m/s 加上该点相对于圆心的速度,得到(c)1.6 m/s,(d)零,(e)1.13 m/s 且沿水平向下 45°.

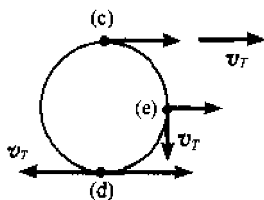


图 11-20

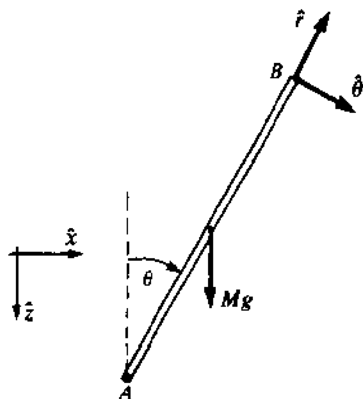


图 11-21

11.61 一质量为 m 的均匀细杆长为 l 且一端固定使其能在竖直平面内转动.支点处摩擦不计.将该杆从支点上方几乎竖直处释放,求当杆与竖直方向成 θ 角时的角加速度?

解 ☞ 由图 11-21 所示的示意图计算关于 A 点的力矩,以顺时针方向为正方向,得到

$$I_A\alpha=\frac{Mgl}{2}\sin\theta$$

其中 $I_A=Ml^2/3$(由 11.37 知).所以角加速度等于

$$\alpha=\frac{3g}{2l}\sin\theta$$

11.62 在 11.61 题中同样在 θ 角处杆自由端的线性加速度为多大?

解 ☞ 加速度的切向分量 a_t 可由 α 得到,而径向分量 a_c 需要知道 ω.ω 可以通过能量来求得.已知支点处的作用力不做功,由能量守恒得

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2=\frac{Mgl}{2}(1-\cos\theta)$$

解得 $\omega^2=\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)$

由图 11-21 中的单位矢量 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{r}$,得到杆上距离支点为 r 的点的线性加速度为

$$\boldsymbol{a} = a_t\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_c\hat{\boldsymbol{r}}$$

其中切向加速度 $a_t = r\alpha$，向心加速度 $a_c = -\omega^2 r$. 运用已经求得的 α 和 ω 的表达式，让 $r = l$，得到杆的自由端的加速度

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{3g\sin\theta}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + [-3g(1-\cos\theta)]\hat{\boldsymbol{r}}$$

该矢量的大小为

$$a = 3g\sqrt{\frac{5}{4} - 2\cos\theta + \frac{3}{4}\cos^2\theta}$$

11.63 在图 11-22 中质量为 m 的物体被两根绳子系住且系统以角速度 ω 转动. 用 m、ω、r 和 θ 表示两根绳子上的拉力.

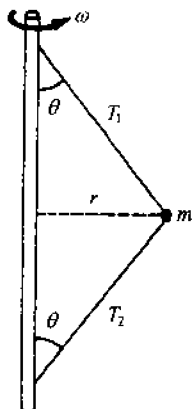


图 11-22

解 ☞ 分析球所受到的力，在竖直方向有 $T_1\cos\theta$ $T_2\cos\theta = mg$，而水平方向向心力 $m\omega^2 r = T_1\sin\theta + T_2\sin\theta$. 同时解这两个方程求得拉力为

$$\frac{m}{2\sin\theta}(\omega^2 r \pm g\tan\theta)$$

其中 + 代表 T_1 − 代表 T_2.

11.64 在图 11-23 可以转动的装置中，木块 A 的质量为 0.9 kg 木板 B 的质量为 1.7 kg，两木板距离转轴 13 cm，木块间以及木块与转盘间的静摩擦因数均为 $\mu_s = 0.1$. 滑轮的质量和摩擦均可忽略，求木块刚要滑动时转盘的角速度.

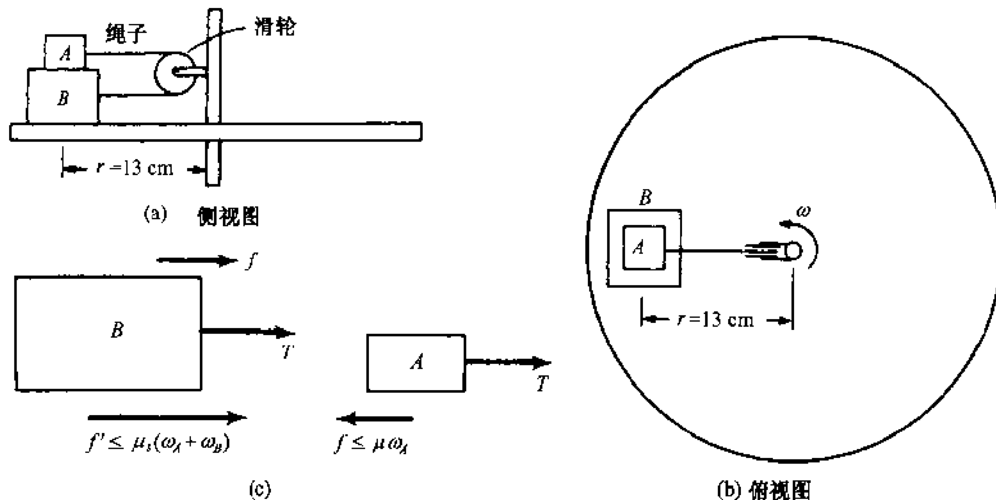


图 11-23

解 ☞ 首先要正确判断出 A 与 B 之间摩擦力的方向. 因为 B 的质量比 A 大得多，我们不妨假设 A 很轻的情况：B 将向沿径向向外运动，而 A 向内运动. 接触面上的摩擦力与其相对运动方向相反，即作用在 B 上的摩擦力沿径向向里，而作用在 A 上的摩擦力沿径向向外，如图 11-23(c)所示. 没有滑动时的受力方程为

$$\sum F_B = T + f + f' = m_B r\omega^2,\ \sum F_A = T - f = m_A r\omega^2$$

两式相减得到 $2f + f' = (m_B - m_A)r\omega^2$. 可见在 f 和 f' 达到最大值前 ω 可以一直增大. 所以

$$2\mu_s m_A g + \mu_s(m_A + m_B)g = (m_B - m_A)r\omega_{\max}^2$$

即

$$\omega_{max}=\left[\frac{\mu g(3m_A+m_B)}{r(m_B-m_A)}\right]^{1/2}=\left[\frac{(0.1)(9.8)(2.7+1.7)}{(0.13)(1.7-0.9)}\right]^{1/2}=6.4(\mathrm{rad/s})$$

11.65 在汽车启动的开始阶段轮子转过的角度与时间的关系为 $\theta=Bt+Ct^2$，其中 B 和 C 是常数.求汽车的位移和速率与时间的关系.车轮的半径为 R.

解 ☞ 位移为 $R\theta=R(Bt+Ct^2)$.汽车的速率是轮子边缘相对于轮心的切向速度，$v=R\omega=R(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)=R(B+2Ct)$.

11.66 长度 L 的单摆与竖直方向所成的角度随时间的变化为 $\theta=\theta_0\sin2\pi ft$，其中 θ_0 是最大摆角、f 是摆的频率，两者都是常数.求摆球的切向速率以及法向加速度随时间的变化关系.

解 ☞ 球的速度和法向加速度分别为 $L\omega$ 和 $L\alpha$.因为 $\omega=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，所以 $v_T=Ld(\theta_0\sin2\pi ft)/\mathrm{d}t=2\pi fL\theta_0\cos2\pi ft$.角加速度为 $\alpha=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$，所以 $a_T=-(2\pi f)^2L\theta_0\sin2\pi ft$，即 $-(2\pi f)^2L\theta$.

11.67 图 11-24(a)中有一长为 l 的光滑水平管绕竖直轴转动.一个质点从管的一端以速度 $l\omega$ 向 O 点运动，与此同时管绕轴以恒定的角速度 ω 运动.求质点的路径.

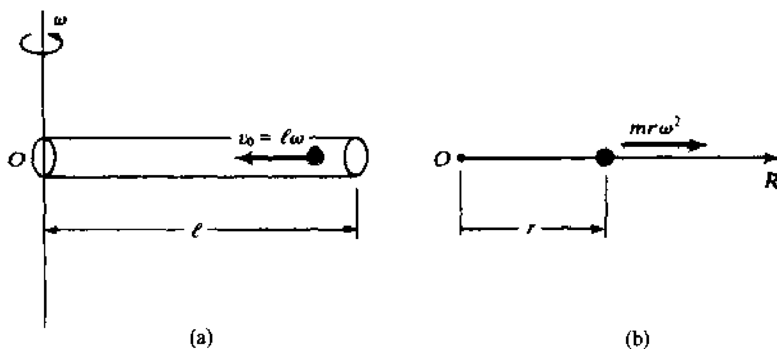


图 11-24

解 ☞ 因为导管光滑，小颗粒不受径向力，所以加速度仅仅沿着圆周方向.这意味着在与管一起旋转的非惯性系中观察时可以不考虑沿圆周方向的力.

当颗粒在非惯性系中距 O 点 r 时[图 11-24(b)]，仅受到惯性力("离心力")$mr\omega^2$，如图所示.牛顿第二定律写成

$$m\ddot{r}=0+mr\omega^2\quad 即\quad \ddot{r}=\omega^2r$$

与 $\dot{r}\mathrm{d}t=\mathrm{d}r$ 相乘并积分，得到

$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}(\dot{r}^2)=\omega^2\int r\mathrm{d}r\qquad \frac{1}{2}\dot{r}^2=\frac{1}{2}\omega^2r^2+C$$

当 $r=l$，$\dot{r}=-l\omega$，所以 $c=0$，$\dot{r}=-\omega r$，负号表示 r 在减小.

最后

$$\int\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\omega\int\mathrm{d}t,\quad \ln r=-\omega t+c',\quad r=c''\mathrm{e}^{-\omega t}$$

当 $t=0$，$r=l$，所以 $c''=l$，$r=le^{-\omega t}$.

11.6 关于绳子绕在滚筒上以及滚动物体的问题

11.68 一个 25kg 的轮子半径为 40cm 且可绕水平轴自由转动.该轮子的旋转半径为 30cm.一块 1.2kg 的物体挂在绕在轮子上的绳子一端，物体下落时带动轮子转动.求下落物体的加速度和绳子上的拉力.

解 ☞ 如图 11-25(a)所示，对木块以竖直向下为正方向，对轮子取顺时针为正方向.我们可以建立两个动力学方程.对木块而言：

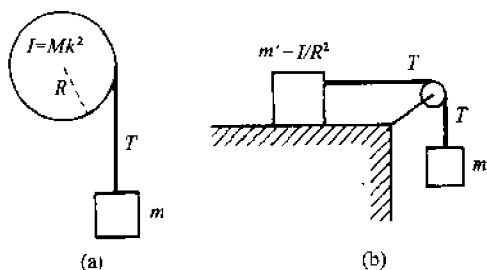


图 11-25

$$mg - T = ma \qquad (1)$$

其中 $m = 1.2\text{kg}$, $mg = 11.8\text{N}$. 第二个方程为 $\tau = I\alpha$, 其中 $\tau = TR$, 所以 $TR = I\alpha$. 两边乘以 R, $TR^2 = IR\alpha$; 已知 $a = R\alpha$, 所以 $TR^2 = Ia$, 即

$$T = (I/R^2)a \qquad (2)$$

这等效于质量为 (I/R^2) 的木块在光滑的平面上受到的水平拉力为 T. 该题与图 11-25(b) 所示的情况即两个木块由绕过光滑滑轮的绳子相连完全一致. 已知 $I = (25\text{kg})(0.30\text{m})^2 = 2.25\text{kg·m}^2$, $R = 0.40\text{m}$, $I/R^2 = 14.1\text{kg}$. 为求加速度 a, 我们把方程(1)(2)相加, 消去拉力 T 得到 $mg = (m + I/R^2)a$. 代入数值得 $11.8\text{N} = (1.2\text{kg} + 14.1\text{kg})a$, 即 $a = 0.77\text{m/s}^2$. 代入方程(2)得到 $T = (14.1\text{kg})(0.77\text{m/s}^2) = 10.9\text{N}$.

11.69 一只小球沿斜角为 30°的斜面从静止滚下. 当静摩擦系数最小值为多少时小球没有滑动?

解 ☞ 该题如图 11-26 所示. 我们设 α 代表角加速度(顺时针方向为正) a 代表沿斜面的线性加速度. 如果没有滑动, 则 $v = \omega R$, 其中 v 和 ω 分别是线速度和角速度. 类似有 $a = \alpha R$, 其中 a 和 α 分别是线加速度和角加速度. 运动加速度为

$$a = g\sin\theta - \frac{f}{M}$$

其中 f 是摩擦力. 重受到的重力和支持力对 C 点均不产生力矩, C 点是均匀球的球心. 所以角加速度为

$$\alpha = \frac{fR}{I_c} = \frac{5f}{2MR} \qquad \text{所以 } a = \frac{5f}{2M}$$

解这三个方程求得 $f = \frac{2}{7}Mg\sin\theta$. 支持力 $N = Mg\cos\theta$, 所以 $f/N = \frac{2}{7}\tan\theta$. 因为纯滚动时最大比值 (f_{max}/N) 为 μ_s, 所以 $\mu_s \geqslant \frac{2}{7}\tan\theta$. 当 $\theta = 30°$, $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, 所以 $(\mu_s)_{min} = 2/(7\sqrt{3}) = 0.165$.

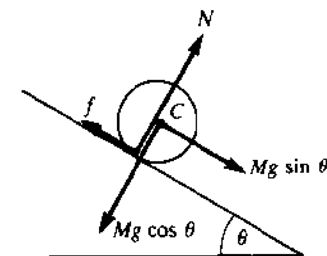


图 11-26

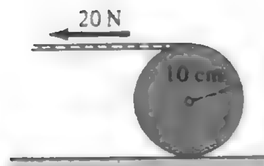


图 11-27

11.70 如图 11-27 所示绳子绕在质量为 4.0kg 和绕中心轴 $I = 0.020\text{kg·m}^2$ 的圆柱上. 如果圆柱无滑动滚动, 其质心的线加速度为多大? 受到摩擦力为多大? 用沿圆柱轴线的轴进行计算?

解 ☞ 以向左和逆时针方向为正方向. 有 $F = ma = 20 + f = 4a$, 其中 f 是地面的摩擦力. 由 $\tau = I\alpha = (20 - f)(0.10) = 0.02(a/0.10)$ 以及 $F = ma$ 解得 a 等于 6.7m/s^2. 代入任意一个方程求得 $f = 6.8\text{N}$, 方向向左.

11.71 如果桌面与圆柱之间摩擦不计, 再次求解 11.70 题. 选择任意轴进行计算.

解 ☞ 这时题 11.70 中的 $f = 0$, 由第一个方程解得 $a = 5.0\text{m/s}^2$. 注意当发生滑动时 $a = \alpha r$ 不适用.

11.72 一个圆柱体和一根细管同时从倾角为 θ 的斜坡顶部释放.每个物体都无滑动滚动.(a)求圆柱体质心的加速度.(b)求细管质心的加速度.(c)当圆柱体滚过 s_c 时,细管滚动多远?

解 ☞ 图 11-26 表示一般情况.加速度 a 可以由三个方程确定.第一个是牛顿第二定律:

$$Ma = Mg\sin\theta - f$$

其中 f 是摩擦力.第二个方程是牛顿第二定律的转动形式:

$$I\alpha = fR$$

其中 I 是物体关于对称轴的转动惯量.第三个方程是滚动条件:

$$a = \alpha R$$

解三个方程求 a,得到

$$a = \frac{g\sin\theta}{(1 + I/MR^2)}$$

(a)对于圆柱体 $I = I_c = \frac{1}{2}MR^2$,所以 $a_c = (g\sin\theta)/(1 + \frac{1}{2}) = (2g/3)\sin\theta$.

(b)对于细管,$I = I_p = MR^2$,所以 $a_p = (g\sin\theta)/(1 + 1) = (g/2)\sin\theta$.

(c)运动距离的比值等于加速度的比值:

$$\frac{s_p}{s_c} = \frac{a_p}{a_c} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

即 $s_p = 3s_c/4$.

11.73 半径为 20cm 的轮子固定在水平轴上.一根绳子沿轮子边缘以 50N 的力竖直向下拉.绳子在 1.0s 内移动了 50cm.(a)求轮子的角加速度.(b)求轮子的转动惯量.(c)轮子类似圆盘,其质量为多大?

解 ☞ (a)运用运动方程 $s = \frac{1}{2}at^2$,得到 $a = 2s/t^2 = 1\text{m/s}^2$ 和 $\alpha = a/R = 5.00\ \text{rad/s}^2$.(b)力 F 产生的力矩 $FR = I\alpha$.所以 $I = FR/\alpha = [(50\text{N})(0.2\text{m})]/5.0 = 2.00\ \text{kg·m}^2$.(c)半径为 R 的均匀圆盘的转动惯量 $I = \frac{1}{2}MR^2$,所以 $M = 2I/R^2 = [2(2.00)]/0.20^2 = 100(\text{kg})$.

11.74 对于 11.73 题,(a)如果重 50N 的物体系在绳子上,系统从静止开始出发.求此时轮子的角加速度.(b)解释两题中(a)结果的区别.

解 ☞ (a)该题中物体的加速度 a' 由 $Ma' = W - F'$ 给出,其中 F' 是绳子上的拉力.另外有 $F'R = I\alpha'$.线加速度和角加速度的关系为 $a' = \alpha'R$.求解 α' 得

$$\alpha' = \frac{W}{\left(\frac{WR}{g} + \frac{I}{R}\right)} = \frac{50}{\left[\frac{(50)(0.2)}{(9.80)} + \frac{2.00}{0.20}\right]} = 4.54\text{rad/s}^2$$

(b)角加速度 $\alpha' < \alpha$ 是由于重力 W 有一部分用于给悬挂物体产生加速度.所以 $F' = W - Ma' < W$,所以 $\alpha' < \alpha$.

11.75 一个竖直的铁环在路面上以初速度 v_0 沿水平方向做无旋转运动.铁环受到的摩擦力使其线速度减小而角速度增大.最终铁环做纯滚动.证明当铁环没有滑动时速度为 $v_0/2$.

证 ☞ 该题如图 11-28 所示.设 $t = 0$ 时铁环以速度 $v_x = v_0$ 开始运动.有方程 $f_x = -f = Ma_x$ 以及

$$v_x(t) = v_0 - \frac{ft}{M}$$

其中 M 是铁环的质量.以顺时针方向为正方向,牛顿第二定律的旋转形式为 $\alpha = fR/I_c = f/MR$,其中铁环 $I = MR^2$.因为 $t = 0$ 时 $\omega = 0$,所以 $\omega = ft/MR$.当 $v_x = \omega R$ 时铁环停止滑动,即

$$v_x(t) = v_0 - \frac{ft}{M} = \frac{ft}{M}$$

所以铁环到 $t = Mv_0/2f$ 时将停止滑动,这时速度的大小为 $v_0 - (f/m)(Mv_0/2f) = v_0/2$.

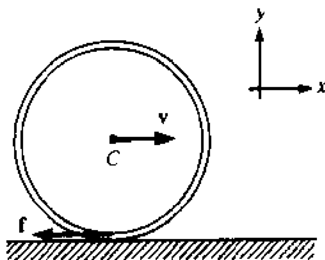


图 11-28

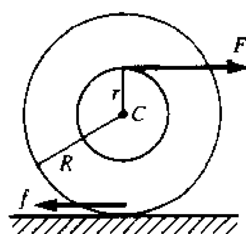


图 11-29

11.76 一质量为 M 的线轴放在水平桌面上.线轴关于其对称轴的转动惯量为 MG_c^2.线轴受到水平向右且在轴上方 r 处的力 F.(a)证明如果线轴与支持面间没有滑动,则其必受到向左的摩擦力 $f=F(G_c^2-rR)/(G_c^2+R^2)$,(b)证明当 r 为一特殊值 r_0 时则所需的摩擦力 f 为零.

证 ☞ (a)该题如图 11-29 所示.由牛顿第二定律得到 $Ma_c=F-f$,由其旋转形式得到 $Fr+fR=MG_c^2\alpha$,其中 α 为角加速度.如果没有滑动,$\alpha=a_c/R$.解三个方程求 f 得

$$f=\frac{F(G_c^2-rR)}{(G_c^2+R^2)}$$

(b)当 $r\equiv r_0=G_c^2/R$ 时摩擦力为零.

11.77 根据 11.76 题:(a)当 r 大于 b 中求出的 r_0 时分析 a 的结果,(b)证明当 $r>r_0$ 时线轴质心的向右的线加速度 a_c 大于 F/M.说明如何发生这种情况.

解 ☞ (a)当 $r>r_0$,$f<0$;即摩擦力的方向向右,大小等于 $F[(rR-G_c^2)/(G_c^2+R^2)]$.(b)线加速度为

$$a_c=\frac{F-f}{M}=\frac{F}{M}\left(1+\frac{rR-G_c^2}{G_c^2+R^2}\right)$$

当 $r>r_0=G_c^2/R$ 时 a_c 大于 F/M.这种情况之所以可以发生是因为摩擦力可以指向右.(摩擦力总是与两个接触面的相对运动方向相反.旋转物体受到的摩擦力不一定与其直线运动方向相反.)

11.78 图 11-30 中轮子的转动惯量为 $8.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$,半径为 40cm.如果 10.0kg的物体与斜面间的摩擦力为 30N,求轮子的角加速度.

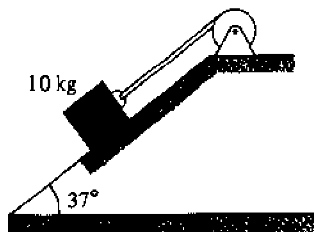


图 11-30

解 ☞ 沿斜面方向由 $F=ma$ 得 $ma=mg\sin37°-T-30$,对轮子而言有 $\tau=I\alpha$,即 $rT=I\alpha$.运用 $a=\alpha r$ 求解 $F=ma$ 得 $T=mg\sin37°-30-mar$,代入力矩方程得 $a=[r(mg\sin37°-30)]/(I+mr^2)$.代入 m,r,g 和 I 的值解得 $\alpha=1.20\text{rad/s}^2$.

11.79 一根绳子绕在质量为 M,半径为 R 的水平均匀圆柱上.绳子拉动时圆柱转动,绳子的一端受到竖直向上的拉力使圆柱相对于地面不下降.(a)求绳子竖直部分的拉力,(b)求圆柱的角加速度? (c)求绳子竖直部分任意一点向上的加速度.

解 ☞ (a)该题如图 11-31 所示.因为线轴的质心没有加速度,所以绳中的拉力 T 等于重力:$T=Mg$.(b)求关于中心轴的力矩得到 $I_c\alpha=(-Mg)(0)+TR=MgR$,其中 $I_c=\frac{1}{2}MR^2$ 是均匀线轴的转动惯量.所以角加速度为 $\alpha=2g/R$.(c)圆柱转过 $\theta(t)$ 时拉开的绳长为 $R\theta(t)$.所以绳中任意一点的向上的线加速度等于 $a=R\alpha=2g$.

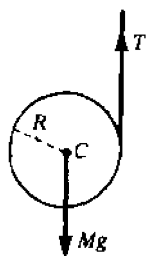


图 11-31

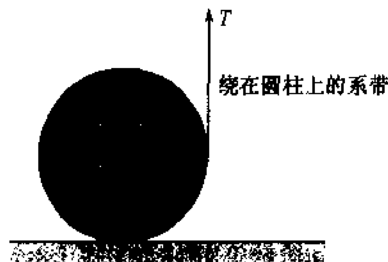


图 11-32

11.80 图 11-32 中的圆柱体 $I_c=\frac{1}{2}Mb^2$ 且 $T<mg$. 描述(a)圆柱在地面无滑动,(b)圆柱与地面无摩擦时圆柱的平动和转动.

解 ☞ (a)有摩擦时,滚动的圆柱随着向左的加速转动的越来越快.运动方程为$(T-f)b=I\alpha$ 和 $f=Ma$. 因为 $a=\alpha b$, $I=Mb^2/2$, 消去摩擦力 f 得到 $a=2T/3M$ 和 $\alpha=2T/3Mb$. T 的最大值为 Mg, 所以线加速度的最大值为 $2g/3$. (b)当没有摩擦力 $Tb=I\alpha$, $\alpha=2T/Mb$; 因为 $f=Ma$, $a=0$. 如果圆柱从静止开始则它将在原地转动.

11.81 一半径为 40cm 质量为 30kg 的轮子固定在无摩擦的水平轴上.绕在轮边缘的绳子上挂一个 0.100kg 的物体,物体释放后在 4.0 s 内下降了 2.0m. 求轮子的回转半径.

解 ☞ 首先从动力学方程求 0.100kg 物体的 a: $v_0=0$, $y=2$m, $t=4$s, 由 $y=v_0t+at^2/2$ 得到 $a=0.25\text{m/s}^2$. 由 $mg-T=ma$, $0.10(9.8)-T=0.10(0.25)$ 得到 $T\approx0.955$N. 再运用 $Tr=\tau=I\alpha=I(a/r)\Rightarrow0.955(0.40)=I(0.25/0.4)$ 解得 $I=0.61\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. 因为 $I\equiv Mk^2$, $k=(0.61/30)^{1/2}=0.143$m.

11.82 图 11-33 中滑轮可绕过其中心的水平轴自由旋转,绳子与滑轮间没有滑动. 如果 $I=8\text{slug}\cdot\text{ft}^2$, 求木块 m_2 的加速度和两边绳子的拉力.(该装置称为阿特武德机.)

解 ☞ 对 m_2 取向下为正方向,对 m_1 取向上为正方向,滑轮以顺时针为正方向.所以

$$m_2g-T_1=m_2a \qquad T_2-m_1g=m_1a \qquad (T_1-T_2)R=I\alpha=\frac{Ia}{R}\text{或 } T_1-T_2=\left(\frac{I}{R^2}\right)a$$

把三个方程相加得到

$(m_2-m_1)g=\left(m_2+m_1+\frac{I}{R^2}\right)a$ 即 $(2\text{slug})(32\text{ft/s}^2)=(8\text{slug})a$ 解得 $a=8\text{ft/s}^2$. 代入第一第二个方程得 $T_1=96$lbf, $T_2=80$lbf.

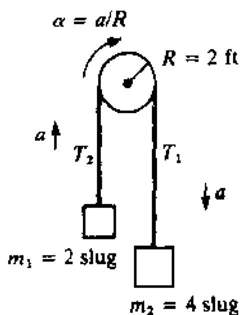


图 11-33

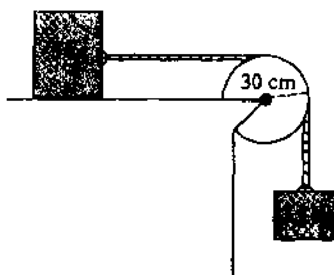


图 11-34

11.83 图 11-34 中木块与桌面间的摩擦力为 20N. 轮子的转动惯量为 $4.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$, 系统释放后多长时间木块滑动 60cm? 假设绳和轮之间没有滑动.

解 ☞ 设上段绳子的拉力为 T_1 下段绳子的拉力为 T_2. 则

$$T_1-20=5a, 2.5(9.8)-T_2=2.5a$$

和

$$(T_2 - T_1)(0.30) = I\alpha = I\frac{a}{r} = 4\left(\frac{a}{0.3}\right)$$

解这三个方程求得加速度 $a = 0.087\text{m/s}^2$. 根据已知数据, $v_0 = 0$, $a = 0.087\text{m/s}^2$, $s = 0.60\text{m}$ 以及 $s = v_0t + at^2/2$, 解得 $t = 3.71\text{s}$.

11.84 一个游游的外半径 R 等于其线轴半径 r 的 10 倍(如图 11-35). 游游关于其线轴的转动惯量 I_c 精确地写成 $I_c = \frac{1}{2}MR^2$, 其中 M 是游游的总质量. 绳子的上端握住不动. (a)计算游游质心的加速度, 它与 g 比较结果如何? (b)求游游下降时绳子的拉力. 该力与 Mg 比较结果怎样?

解 ☞ (a)在图 11-35 中, 以逆时针方向和向下的竖直方向为正方向, 得到直线运动方程

$$Ma_c = Mg - T$$

由转动方程有

$$I_c\alpha = Tr$$

其中 $I_c = \frac{1}{2}MR^2$, 约束条件为

$$a_c = \alpha r$$

解上述方程求得 a_c 为

$$a_c = \frac{gr}{\left(r + \frac{I_c}{Mr}\right)} = \frac{g}{\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)} = \frac{g}{51} = 0.192\text{m/s}^2$$

(b)绳上的拉力 $T = M(g - a_c) = 50Mg/51 = 0.980Mg$.

11.85 半径为 30cm 的轮子转动半径为 20cm 质量为 40kg, 轮子竖直绕水平轴转动. 一个 2kg 的物体系在绕过轮子边缘的绳子上. 求系统释放时轮子的角加速度.

解 ☞ 关于物体写出 $F = ma$, 关于轮子写出 $\tau = I\alpha$: $2(9.8) - T = 2.0(0.3\alpha)$ 和 $T(0.30) = I\alpha$. 已知 $I = Mk^2 = 40(0.04) = 1.6\text{kg·m}^2$. 解得 α 为 3.3rad/s^2.

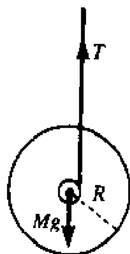


图 11-35

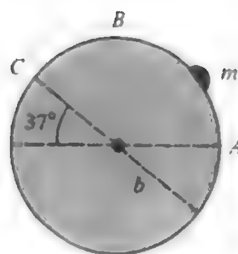


图 11-36

11.86 图 11-36 中转动惯量为 I 的均匀轮子竖直通过其中心的水平轴. 如图所示, 质量为 m 的小物体粘在轮子的边缘. 求小物体在 A 点处时轮子的角加速度. 小物体在 B 点和 C 点时呢? (设 m 几乎没有改变轮子的转动惯量.)

解 ☞ 物体在 A 点的力臂为 b, 在 B 点为零, 在 C 点为 $0.80b$. 每种情况下力均为 mg. 所以对于 A 点, $\tau = I\alpha$ 得 $\alpha = mgb/I$. 在 B 点 $\alpha = 0$, 在 C 点 $\alpha = 0.80mgb/I$.

11.87 一根均匀细杆(比如米尺)长为 L 且一端在地面竖直站立. 杆的顶部受到微小的推力后开始倒下(图 11-37). 设杆的底部不滑动, 求(a)当杆与地面成 θ 角时杆的角加速度, (b)杆的顶端的法向加速度.

解 ☞ (a)对支点 O 求力矩得到 $Mg[(L\cos\theta)/2] = I_0\alpha$. 由平行轴定理得 $I_0 = I_c + M(L/2)^2 = ML^2/3$. 求解 α 得到 $\alpha = (3g\cos\theta)/2L$. (b) $a_T = \alpha L = (3g\cos\theta)/2$.

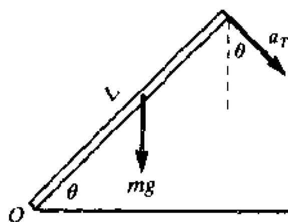


图 11-37

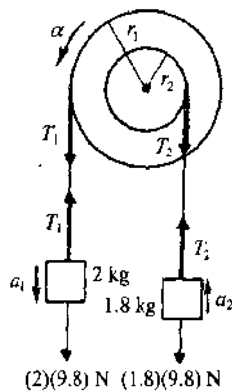


图 11-38

11.88 如图 11-38 所示,滑轮系统的转动惯量为 $I = 1.70\text{kg}\cdot\text{m}^2$、$r_1 = 50\text{cm}$ 和 $r_2 = 20\text{cm}$. 求滑轮系统的角加速度和拉力 T_1、T_2.

解 ☞ 由 $a = \alpha r$ 得到 $a_1 = (0.50\text{m})\alpha$ 和 $a_2 = (0.20\text{m})\alpha$. 对两物体有 $F = ma$,对轮子有 $\tau = I\alpha$,以运动方向为正方向:

$$(2)(9.8)N - T_1 = 2a_1 \qquad 19.6N - T_1 = 1.0\alpha$$

$$T_2 - (1.8)(9.8)N = 1.8a_2 \quad 或 \quad T_2 - 17.6N = 0.36\alpha$$

$$(T_1)(r_1) - (T_2)(r_2) = I\alpha \qquad 0.5T_2 - 0.2T_2 = 1.70\alpha$$

三个方程有三个未知数.第一个方程解出 T_1 并代入第三个方程得到 $9.8 - 0.5\alpha - 0.2T_2 = 1.70\alpha$.
解出 T_2 代入第二个方程解得 $-11\alpha + 49 - 17.6 = 0.36\alpha$,解得 $\alpha = 2.76\text{rad/s}^2$.
再代回第一个方程解得 $T_1 = 16.8\text{N}$,代入第二个方程解得 $T_2 = 18.6\text{N}$.

第十二章　转动(Ⅱ)：动能；角冲量；角动量

12.1　能量和功率

12.1　求地球沿公转轨道绕太阳运动的转动能量. 已知：$M_e = 6\times10^{24}$kg，轨道半径 $=1.5\times10^{11}$m，转动时间 = 365 天 $=3.2\times10^7$s.

解　☞ 地球关于太阳的转动惯量 $I = M_e r^2$，$\omega = (3.2\times10^7)^{-1}$r/s $=1.96\times10^{-7}$rad/s，所以 $K_r = (I\omega^2)/2 = 2.6\times10^{33}$J.

12.2　假设飞轮上存贮的动能可以用来发动汽车.（在汽车停靠处有一小电动机，晚上转动飞轮为白天贮存能量.）计算密度均匀，半径为 0.50m，质量为 200kg，角速度为 20000r/s 的圆柱形飞轮的能量.（此角速度接近钢制飞轮能达到的极限.）飞轮与汽车的总质量为 1000kg. 当汽车在水平路面以 100km/h 运动时，总摩擦力为汽车重量的 10%. 求存贮在飞轮上的能量能使汽车运动多远.

解　☞ 在飞轮上存贮的转动能量 $K_s = \frac{1}{2}I\omega_s^2$. 如果该能量被用来克服摩擦力 F 做功，则存贮的能量可使汽车运行 d 且满足 $Fd = K_s$. 所以 $d = \left(\frac{1}{2}I\omega_s^2\right)/F$. 在该题中，已知 $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(200)(0.50^2) = 25\text{kg}\cdot\text{m}^2$. 又已知 $\omega_s = [2\pi(2\times10^4)]/60 = 2.094\times10^3$rad/s. 所以 $\frac{1}{2}I\omega_s^2 = 5.483\times10^7$J. 因为 $F = 0.1Mg = (0.1)(1000)(9.80) = 980$(N)，求得 $d = (5.483\times10^7)/(0.980\times10^3) = 5.595\times10^4\text{m} = 56.0$km.

12.3　一质量为 2.7kg 的细环半径为 8cm 且绕一过其中心且垂直于环面的轴转动，转速为 1.5r/s. 求环的功能.

解　☞ 先转化为国际单位制：1.5r/s $=3\pi$rad/s $=\omega$. 对于细环，$I = mr^2 = 2.7(0.08)^2 = 0.0172$(kg·m²)，　$KE = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.0172)(3\pi)^2 = 0.763$(J)

12.4　一飞轮转动惯量为 900kg·m² 以 120r/min 的速度转动. 被一制动装置减速到 90r/min. 求飞轮在减速过程中损失的能量.

解　☞ $KE_1 = \frac{1}{2}I\omega_1^2$，　120r/min $=4\pi$ rad/s $=\omega_1$，$KE_1 = \frac{1}{2}(900)(4\pi)^2 = 70.99$(kJ)

90r/min $=3\pi$ rad/s $=\omega_2$，$KE_2 = \frac{1}{2}(900)(3\pi)^2 = 39.93$(kJ)

损失的能量　　$KE_1 - KE_2 = 31.0$kJ.

12.5　如果 25kg 的轮子以 6r/s 转动且转动半径为 0.22m，求其转动动能.

解　☞ $KE = \frac{1}{2}I\omega^2$. $I = Mk^2 = (25\text{kg})(0.22\text{m})^2 = 1.21\text{kg}\cdot\text{m}^2$. $\omega = 2\pi f = 12\pi$rad/s

所以 $KE = \frac{1}{2}(1.21\text{kg}\cdot\text{m}^2)(12\text{rad/s})^2 = 860$J.

12.6　当给飞轮做 100J 的功，其角速度从 60r/min 增加到 180r/min. 求飞轮的转动惯量.

解　☞ 功 $= W = \Delta KE$，即 $100\text{J} = \left(\frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2\right)$　$\omega_f = 2\pi f_f = 6\pi$rad/s；$\omega_i = 2\pi f_i = 2\pi$rad/s. 所以 $100\text{J} = \frac{1}{2}I(36\pi^2\text{rad}^2/\text{s}^2 - 4\pi^2\text{rad}^2/\text{s}^2) = (16\pi^2\text{rad}^2/\text{s}^2)I$. 解之得 $I = 0.63\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

12.7　一只 72lb 的轮子转动半径为 9in，转动 25 转后速度从静止增加到 10r/s. 求所需的力矩以及轮子获得的动能.

解　☞ $\tau = I\alpha$，$I = Mk^2 = \frac{(72\text{lb})(0.75\text{ft})^2}{(32\text{ft/s}^2)} = 1.27\text{slugft}^2$. 根据 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$. $\theta - \theta_0$　(25r)

1in = 2.54 cm

$(2\pi\text{rad/r}) = 50\pi\text{rad}$, $\omega_0 = 0$ 和 $\omega = 2\pi f = 20\pi\text{rad/s}$ 求得 $\alpha = (20\pi)^2/100\pi = 12.5\text{rad/s}^2$. 所以 $\tau = (1.27\text{slug}\cdot\text{ft}^2)(12.5\text{rad/s}^2) = 15.9\text{N}\cdot\text{m}$. 从静止开始 $\Delta KE = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(1.27\text{slug}\cdot\text{ft}^2)(20\pi\text{rad/s})^2 = 2500\text{J}$.(也可根据动能定理, $\tau(\theta-\theta_0) = \Delta KE = \frac{1}{2}I\omega^2$. 所以 $\frac{1}{2}I\omega^2 = (15.9\text{N}\cdot\text{m})(50\pi\text{rad}) = 2500\text{J}$.)

12.8 图 12-1 中质量不计的杆上有三个物体.杆一端固定使之能在竖直平面内摆动.如果杆从图中位置开始释放,求杆到竖直位置时底部物体的速度.

解 ☞ 用 U_g 表示重力势能, K_r 表示转动动能.物体 m 的速度为 $3b\omega$. 由于三个物体减少的势能 U_g 等于关于支点的动能 K_r, 所以 $U_g = 2mbg + (3m)(2b)g + (m)(3b)g = K_r = (I\omega^2)/2$. 关于支点的转动惯量 $I = 2mb^2 + (3m)(2b)^2 + (m)(3b)^2 = 23mb^2$, 所以 $\omega = (22g/23b)^{1/2} = 3.06/b^{1/2}\text{rad/s}$. 所以 $v = 3b\omega = 9.2b^{1/2}\text{m/s}$.

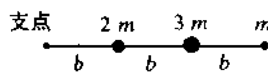


图 12-1

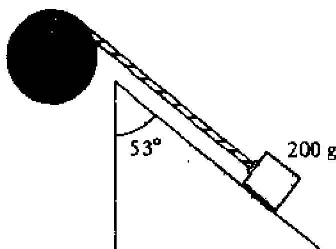


图 12-2

12.9 把图 12-2 所示的装置从静止释放,200g 的木块克服 0.50N 的摩擦力沿斜面滑下.如果滑子的转动惯量为 $0.80\text{kg}\cdot\text{m}^2$, 求木块沿斜面滑动 100cm 后的速度.

解 ☞ 根据能量守恒的观点,设 U_g 表示重力势能, K_r 表示转动动能, K_t 表示木块的动能,则木块减少的重力势能 U_g = 摩擦损耗的能量 + K_r + K_t: $0.2(9.8)(1.0\cos53^\circ) = 0.50(1.0) + (0.80)\times(v/0.70)^2/2 + 0.20v^2/2$, 所以 $v = 0.86\text{m/s}$.

12.10 根据图 12-2.如果从图中位置轮子以 0.30r/s 的速率逆时针转动,物体上升的竖直距离为 80cm 时静止,求轮子的转动惯量.忽略摩擦损耗.

解 ☞ 轮子减少的转动动能 K_r + 物体减少的动能 K_t = 物体增加的重力势能 U_g. 所以, $0.5I(0.60\pi)^2 + 0.5(0.20)(0.60\pi\times0.70)^2 = (0.2\times9.8)(0.80)$, 解得 $I = 0.78\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

12.11 一根长 25cm 的均匀杆绕其一端自由转动(图 12-3).将它从与竖直方向成 θ 角处释放,当竖直悬挂时杆末端的速度 3.0m/s, θ 为多大?

解 ☞ 质心下落的距离为 $(L/2)(1+\cos\theta)$. 由 $U_g = K_r$ 得 $mg(L/2)(1+\cos\theta) = I\omega^2/2$, 其中 $I = mL^2/3$ 且 $\omega = v/L$. 解得 $\cos\theta = (v^2/3gL) - 1$; 由 $v = 3.0\text{m/s}$, $L = 0.25$, $\cos\theta = 0.224\text{m}$, 得 $\theta = 77^\circ$.

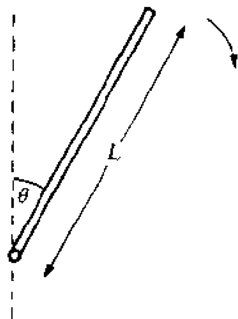


图 12-3

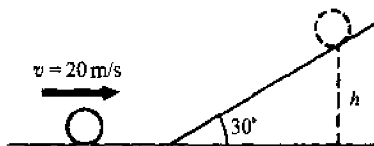


图 12-4

12.12 图 12-4 中一均匀实心球在水平面上以 20m/s 的初速度滚到斜面上.不计摩擦损耗,求球停止时的高度.

解 ☞ 小球的直线运动动能和转动动能在球停止时转化为重力势能.所以

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=Mgh$$

对于实心球,$I=\frac{2}{5}Mr^2$.又 $\omega=v/r$,方程写成

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)Mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2=Mgh$$

即

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{5}v^2=(9.8\text{m/s}^2)\text{h}$$

由 $v=20\text{m/s}$ 解得 $h=28.6\text{m}$ 注意该结果与球的质量和斜面的角度无关.

12.13 一个圆盘从山顶沿一轨道滚下,初速度为 80cm/s.忽略摩擦损耗,求圆盘到达山顶下 18cm 处的速度.

解 ☞ 在山顶,圆盘具有转动动能和平动动能以及相对于下方 18cm 处零势能面的重力势能.在末位置重力势能全部转化为动能.已知 $h=18\text{cm}$,

$$(KE_t+KE_r)_1+Mgh=(KE_t+KE_r)_2$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2+Mgh=\frac{1}{2}Mv_f^2+\frac{1}{2}I\omega_f^2$$

对于圆盘 $I=\frac{1}{2}Mr^2$.又 $\omega=v/r$,代入公式化简得

$$\frac{1}{2}v_0^2+\frac{1}{4}v_0^2+gh=\frac{1}{2}v_f^2+\frac{1}{4}v_f^2$$

已知 $v_0=0.80\text{m/s}$ 和 $h=0.18\text{m}$,解得 $v_f=1.73\text{m/s}$.

12.14 一个实心球(质量为 m,半径为 r)从斜面滚下.证明其动能中转动动能占 $\frac{2}{7}$ 平动动能占 $\frac{5}{7}$.

证 ☞ 转动球的平动动能为 $KE_t=\frac{1}{2}mv_c^2$,转动动能为 $KE_r=\frac{1}{2}I_c\omega^2$.滚动时 $v_c=r\omega$.对实心球

$$I_c=\frac{2}{5}mr^2,\quad KE_t=\frac{1}{2}m\omega^2r^2,\quad KE_r=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)m\omega^2r^2=\frac{1}{5}m\omega^2r^2$$

总动能为

$$KE=KE_t+KE_r=\frac{1}{2}m\omega^2r^2+\frac{1}{5}m\omega^2r^2=0.7m\omega^2r^2$$

$$\frac{KE_t}{KE}=\frac{\frac{1}{2}m\omega^2r^2}{0.7m\omega^2r^2}=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7},\quad \frac{KE_r}{KE}=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

12.15 一厚壳空心球的外半径为 R_0.它从斜面无滑动滚下,到达底部时的速度为 v_0.现在斜面被打蜡使其摩擦不计,小球无滚动滑下,到达底部的速度为 $5v_0/4$.求该空心球关于过其中心转轴的转动半径.

解 ☞ 两种情况下均无需克服摩擦力作功.设斜面高为 h,末动能为 $K_f=Mgh$,其中 M 是球的质量.对于滚动下降的情况,动能为

$$K_f=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}I_c\omega_0^2=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}MG_c^2\left(\frac{v_0^2}{R_0^2}\right)=\frac{1}{2}Mv_0^2\left(1+\frac{G_c^2}{R_0^2}\right)$$

其中 G_c 是球的转动半径,对于滑动下降的情况,动能为

$$K_f=\frac{1}{2}M\left(\frac{5v_0}{4}\right)^2=\frac{1}{2}Mv_0^2\left(\frac{25}{16}\right)$$

由这些方程解得 $G_c^2=9R_0^2/16$,$G_c=3R_0/4$.

12.16 对于 12.15 题,中间空心部分密度为零,半径为 R_i.对于 $R_i<r<R$ 的部分密度均匀.

求 R_i/R_0 以及空腔体积与总体积的比 $4\pi R_0^3/3$.

解 ☞ 设实心部分密度为 ρ_0.则空心球的质量为

$$M = \frac{4\pi}{3}(\rho_0 R_0^3 - \rho_0 R_i^3)$$

转动惯量为

$$I_c = \frac{2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3\right)R_0^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\rho_0 R_i^3\right)R_i^2$$

转动半径 G_c 满足方程

$$G_c^2 = \frac{I_c}{M} = \frac{2}{5}\left(\frac{R_0^5 - R_i^5}{R_0^3 - R_i^3}\right) = \frac{2}{5}R_0^2\left[\frac{1-(R_i/R_0)^5}{1-(R_i/R_0)^3}\right]$$

在 12.15 题中已知 $G_c^2 = 9R_0^2/16$.所以

$$\frac{45}{32} = \frac{1-(R_i/R_0)^5}{1-(R_i/R_0)^3}$$

转化为

$$\frac{13}{45} = \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^3\left[1 - \frac{32}{45}\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]$$

我们通过检验排错,一种简单的算法而无需开三次方解得:$R_i/R_0 = 0.823$.对应的体积比为 $V_i/V_0 = (R_i/R_0)^3 = 0.577$.

12.17 一根 3 m 长的细绳绕在轮子的轴上.用 40 N 的恒定拉力拉动绳子,当绳子离开轴后轮子的转速为 2 r/s.求轮子关于轴的转动惯量.忽略摩擦.

解 ☞ 功 $= W = \Delta KE = (\frac{1}{2}I\omega^2 - 0)$. $W = Fs = (40\ \text{N})(3\ \text{m}) = 120\ \text{J}$. $\omega = 2\pi f = 4\pi\ \text{rad/s}$. 由 $120\text{J} = \frac{1}{2}I(4\pi\ \text{rad/s})^2$ 解得 $I = 1.52\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

12.18 阿特武德机由一个装在水平轴上的滑轮(半径 $= b$)和通过绳子相连且挂在滑轮两侧的两个物体 m_1、m_2($m_1 > m_2$)组成.求滑轮的转动惯量并用 m_1, m_2, b 以及系统释放后 m_1 下降 h 所用的时间 t 表示.假设绳与滑轮间没有滑动.

解 ☞ 系统经过时间 t 减少的势能转化为平动动能和转动动能:$(m_1 - m_2)gh = (m_1 + m_2)(v^2/2) + (I\omega^2)/2$.因为 $\omega = v/b$, $v = 2\bar{v} = 2h/t$,可以消去 ω 和 v.解得 $I = (m_1 - m_2)[(gb^2t^2)/2h] - (m_1 + m_2)b^2$.

12.19 半径为 20 cm 的圆柱体装在与其同轴的转动轴上且可以自由转动.一根绳子绕在圆柱上且绳子一端挂有 50 g 的物体.如果物体被释放后在 12 s 内下降了 100 cm,求该圆柱的转动惯量.

解 ☞ 运用能量守恒,由 $s = \bar{v}t = (v + v_0)(t/2)$ 求出物体的末速度 $v = 0.167\text{m/s}$.减少的重力势能 $U_g = K_r + K_t$ 即 $mgh = (I\omega^2)/2 + (mv^2)/2$; $0.05(9.8)(1.0) = 0.5I(0.167/0.2)^2 + 0.5(0.05)(0.167)^2$.解得 $I = 1.4\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

12.20 一个质量为 M 半径为 R 的均匀盘中心固定竖直放置.如图 12-5 所示,一块小重物(质量也为 M)固定在盘的边缘且位于中心的正上方.该(不稳定的)系统被释放,求重物到达盘中心正下方时系统的角速度.

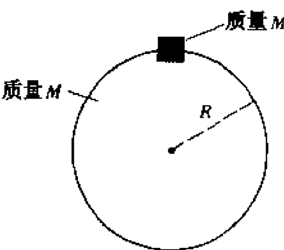


图 12-5

解 ☞ 取盘上的最低点为重力势能的参考面,初始总能量为

$$E_i = K_i + U_i = U_i = MgR + Mg(2R) = 3MgR$$

当重物到达最低点,势能为

$$U_f = MgR + (Mg)(0) = MgR$$

系统的末动能为

$$K_f = \frac{1}{2}I_d\omega_f^2 + \frac{1}{2}M(\omega_f R)^2 = \frac{3}{4}M\omega_f^2 R^2$$

其中均匀盘的转动惯量为 $I_d=\frac{1}{2}MR^2$. 系统能量守恒，所以 $E_i=E_f=U_f+K_f$

$$K_f=\frac{3}{4}M\omega_f^2R^2=E_i-U_f=3MgR-MgR$$

求解 ω_f 得 $\omega_f=\sqrt{8g/3R}$.

12.21 轮子的转动惯量 $I=20\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ 且绕其轴以 3.0 r/s 转动. 如果轮子停止之前转了 40 转，求摩擦力的力矩.

解 ☞ 恒定力矩 τ 在转动角度 θ 时做功 $\tau\theta$. 轮子的转动动能 K_r = 摩擦力矩所做的功，所以 $(I\omega^2)/2-\tau\theta$, $\tau=[0.5(20)(6.0\pi)^2]/[40(2\pi)]=14.1(\mathrm{N\cdot m})$

12.22 图 12-6 中的装置从静止开始释放时弹簧没有伸长. 如果摩擦可以忽略，则物体能沿斜面下滑多远?

解 ☞ 因为开始时和物体停止滑动时 $K=0$, 物体减少的重力势能等于弹簧获得的能量: $mgs\sin37°=(ks^2)/2$, 即 $2.0(9.8)(0.60\ s)=10\ s^2$, $s=1.18$ m.

12.23 在 12.22 题中，当物体沿斜面下滑 1.0 m 时，物体的速度为多大?

解 ☞ 在这种情况下，轮子和物体都有动能. 所以, $mg(0.60\ s)=(ks^2)/2+(I\omega^2)/2+(mv^2)/2$. 已知 $\omega=v/0.30$ 和 $s=1.0$ m, $v=0.68$ m/s.

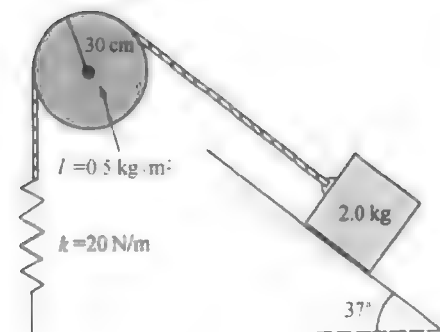


图 12-6

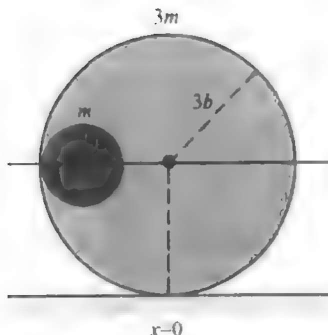


图 12-7

12.24 在 12.22 题中，当物体的速度最大时，物体滑动了多远? 其速度有多少?

解 ☞ 一般情况下的能量方程为 $mg(0.60s)=(ks^2)/2+[I(v/0.3)^2]/2+mv^2/2$. 可以用微积分求 v 的最大值. 然而也可以不用微积分，我们知道振动是关于最终静止的地点对称的. 静止位置为 s_0, 其中 $ks_0=mg\sin37°$(合力为零)即 $s_0=0.588$ m. 当振动时该位置是动能最大的位置.(也可以通过研究系统势能曲线得到该结论. $U_p=(ks^2)/2-mgs\sin37°$. 当 $(\partial U_p)/\partial s=0$ 时势能最小，即 $ks=mg\sin37°$.)运用上述能量方程求出 $s=0.588$ m 处的 v 最大，得到 $v=0.96$ m/s.

12.25 图 12-7 中一个大圆环(半径为 $3b$)紧紧固定在桌面，一个小环(质量为 m，半径为 b)在大环内无滑动地滚动. 把小环从图中位置处释放，当它到达最底点处其质心的速度为多大? 如果是一个同样半径的球壳在大环内滚动呢?

解 ☞ 两种情况下改变的重力势能为 $U_g=2mgb=K_t+K_r$; 对于环而言, $2mgb=[(mb^2)v^2/b^2]/2+(mv^2)/2$, 其中 $v=\omega b$, 所以 $v=(2gb)^{1/2}$. 对于球壳而言, $I=(2mb^2)/3$, (见 11.46 题)所以 $2mgb=[(2mb^2)/3][(v^2/b^2)/2]+(mv^2)/2=(5mv^2)/6$, $v=[(12gb)/5]^{1/2}$.

12.26 图 12-7 中的两个圆环. 内部的环无滑动滚动，另一个环可在桌面上无摩擦运动. 小环的质量为 m 大环的质量为 $3m$. 它们从图中的位置开始释放，内部的环滚动下降到底部并静止. 求系统静止后外环的质心位置.

解 ☞ 开始时该两环系统的质心位于大环中心左侧 $b/2$ 处. 该结论由 $m(2b-x)=3mx$, 得 $x=b/2$. 水平方向没有外力作用在该系统上所以质心的横坐标不改变. 最终每个环的圆心和系统的质心在一条竖直线上，所以外环的中心向左移动 $b/2$.

12.27 如果图 12-7 中两环固定在一起. 系统从所示的位置释放，外环与桌面的摩擦可以忽

略. 求两环的中心在同一竖直线上时大环中心相对于桌面的速度.

解 ☞ 质心距离大环中心 $b/2$, 所以 $\Delta U_g=(4mgb)/2$. 该能量等于各个环的 K_r+K_t, $(mb^2\omega^2)/2+[3m(3b)^2\omega^2]/2+(mv^2)/2+(3mV^2)/2$, 其中 ω 是环相对于其自身的角速度, 因为两个环固定在一起, 故它们的角速度相等; v 和 V 分别是小环和大环中心的线速度. 因为质心没有水平速度且大环中心距质心 $b/2$, 所以 $V=\omega b/2$. 类似有 $v=3\omega b/2$. 把 ω 和 v 用 V 表示并代入能量方程得到 $V=(gb/31)^{1/2}$.

12.28 一个电动机转速为 900 r/min, 功率为 2 hp. 求它所能提供的力矩.

解 ☞ 功率 $=P=\tau\omega$. 已知 $P=2\text{hp}=(2)(746\ \text{W})=1492\ \text{W}$. $\omega=2\pi f=[2\pi(900\ \text{r/min})]/(60\ \text{s/min})=30\ \pi\text{rad/s}$. 所以 $\tau=(1492\ \text{W})/(30\ \pi\text{rad/s})=15.8\ \text{N·m}$.

12.29 运转带的主动端拉力为 1600 N, 松弛端拉力为 500 N. 该运转带带动半径为 40 cm 的滑轮以 300 r/min 转动. 滑轮带动效率为 90% 的发电机, 则该发电机产生多少瓦的功率?

解 ☞ 总力矩 $=(1600\ \text{N}-500\ \text{N})(0.40\ \text{m})=440\ \text{N·m}$. $\omega=2\pi f=10\ \pi\text{rad/s}$. 传给发电机的总功率 $=\tau\omega=(440\ \text{N·m})(10\ \pi/\text{s})=4400\ \pi\text{W}$. 发电机产生的总功率 $=0.9(4400\ \pi\text{W})=12.4\ \text{kW}$.

12.30 假设用半径为 50cm 转速为 300r/s 的均匀盘作为汽车的贮能装置. 如果该装置可以提供 100hp 的发动机工作 10 分钟所需的能量, 该盘的质量应为多大?

解 ☞ 转盘提供的能量为 $K_r=(I\omega^2)/2$, 其中 $I=\frac{1}{2}mR^2$. 100hp 的发动机工作 10min 做功 $(746\text{W/hp})(100\text{hp})(600\text{s})=4.48\times10^7\text{J}$, $K_r=0.5(0.5m\times0.50^2)(300\times2\pi)^2=2.22\times10^5m$; 所以 $m=202\text{kg}$.

12.31 一个小发动机的转速为 1400 r/min 时提供功率为 0.20 hp. 求能够提供的力矩.

解 ☞ 发动机转速为 ω 时提供的功率为 $\tau\omega$. 所以 $\tau=(0.20\ \text{hp})/(1400\ \text{r/min})=(149\ \text{W})/(147\ \text{rad/s})=10.2\ \text{N·m}$.

12.32 一种发动机能够输出力矩 0.8 N·m. 它的转速为 1400 r/min. 求该发动机输出功率是多少马力?

解 ☞ 功率 $=\tau\omega=0.80\{[1400(2\pi)/60]\}=117.3\ \text{W}$, 由于 $746\ \text{W}=1\ \text{hp}$, 所以输出功率等于 0.157 hp.

12.33 一功率为 $\frac{1}{2}$ hp 的发动机(输出)负载时正常转速为 1800 r/min. 求该发动机产生的力矩。如果用它带动直径为 5.0 cm 的滑轮, 求运转带上两部分拉力的差别.

解 ☞ 获得的力矩为功率/ω; $\tau=[0.5(746)]/\{[1800(2\pi)]/60\}=1.98\ \text{N·m}$. 该力矩是由运转带上两部分拉力的差乘以滑轮的半径得到的, ΔTr; 所以 $\Delta T=1.98/0.025=79\ (\text{N})$.

12.2 角冲量;物理摆

12.34 要从球心上方多远处推球可使球无滑动地滚动? 假设球半径为 R, 外力的冲量沿水平方向.

解 ☞ 如图 12-8 所示, 用一任意大的水平推力 F(在任意短的时间 δt 内)推动小球. 因为桌面施加的静摩擦力为 μMg, 唯一避免滑动的方法是使得摩擦力为零. 设 v_0 和 ω_0 分别是施加冲量 $F\delta t$ 后的速度和角速度. 所以有

$$F\delta t = Mv_0 \qquad \text{和} \qquad h(F\delta t) = I_c\omega_0$$

其中 $\omega_0=v_0/R$. 因为球是均匀的, 关心球心的转动惯量为 $I_c=2MR^2/5$. 联立这些方程, 得到 $h(Mv_0)=[(2MR^2)/5](v_0/R)$, 从而有 $h=2R/5$.

12.35 一个均匀细杆长 1.00 m 且开始时竖直在光滑水平面(图 12-9). 现沿水平方向击打杆的末端, 击打的方向与杆轴垂直, 使杆获得的角速度为 3.00 rad/s. 求被击打后杆质心

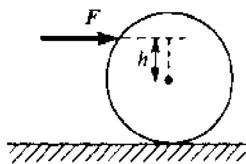


图 12-8

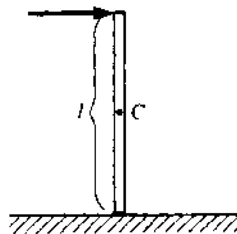


图 12-9

的线速度.

解 ☞ 设被击打后冲量的大小为 P. 根据牛顿第二定律的平动和转动形式,得到 $v_c = P/M$ 和 $I_c\omega_c = Pl/2$. 这里 v_c 是撞击后质心向右的线速度, ω_c 是杆的角速度(顺时针方向为正). 由于 $I_c = (Ml^2)/12$, 我们有 $\omega_c l = 6\ P/M$, 所以 $v_c = (\omega_c l)/6$. 因为 $\omega_c = 3.00$ rad/s, $l = 1.00$ m, 得到 $v_c = 0.500$ m/s.

12.36 根据 12.35 题,打击后杆上哪一点静止?

解 ☞ 打击后杆上距离打击端 d 处的点向右的速度为 $v = v_c + \omega_c[(l/2) - d]$, 该值当 $d > l/2$ 时也为正. 求得当 $d = (l/2) + (v_c/\omega_c)$ 时 $v = 0$. 因为 $v_c = (\omega_c l)/6$, 所以 $d = (l/2) + (l/6) = 2l/3$. 因为 $l = 1$m, 求得距打击端 $\frac{2}{3}$m 处的点开始时静止. 该点称为杆相对于顶端的"打击中心". (打击中心的位置依赖于打击的位置.)

12.37 一个刚体可绕过 A 点的水平轴(指向纸内)自由转动如图 12-10 所示. 求角加速度 α 的表达式,用 θ:与竖直方向所成的夹角; D:转动点 A 与质心的距离; G_c:关于过质心水平轴的转动半径;和 g:重力加速度表示.

解 ☞ 以逆时针方向为正方向. 关于 A 点的力矩为 $\tau_A = -MgD\sin\theta$, 而运用平行轴定理求得转动惯量为 $I_A = MD^2 + I_{CM} = MD^2 + MG_c^2$. 所以 $\tau_A = I_A\alpha$ 也可写成 $M(D^2 + G_c^2)\alpha = -MgD\sin\theta$, 即

$$\alpha = -\left(\frac{gD}{D^2 + G_c^2}\right)\sin\theta$$

(注意 $G_A^2 = D^2 + G_c^2 \Rightarrow \alpha = -[(gD)/G_A^2]\sin\theta$, 其中 G_A 是关于 A 点的转动半径.)

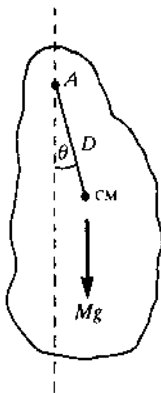


图 12-10

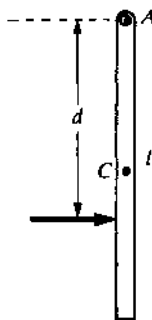


图 12-11

12.38 如果 12.37 题中的刚体从 θ_A 处由静止开始释放. 试定性描述该运动. 这样的装置称作复合摆或物理摆. 假设没有摩擦损耗,如果 θ_A 很小,则系统摆动的频率是多大?

解 ☞ 由机械能守恒定律得,在 θ 减小为零质心下降的过程中势能转化为转动能. 当质心位于 A 点正下方时动能最大. 系统将继续沿原来的方向转动直到质心达到原来的高度, $\theta = -\theta_A$. 接着刚体会沿另一方向摆回到原来的位置 θ_A. 这种运动将反复进行. 如果 θ_A 很小,则摆上各点 $\sin\theta \approx \theta$ 且由 12.37 题得 $\alpha \approx -[(gD)/(D^2 + G_c^2)]\theta$. 因为 α 表示 θ 随时间变化的快慢, $\Omega^2 \equiv (gD)/(D^2 + G_c^2)$ 是常数, θ 必定遵守简谐振动的频率

$$\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gD}{g^2 + G_c^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gD}{G_A^2}} \tag{1}$$

12.39 一根长为 l 质量为 m 的均匀杆悬挂在穿过靠近 A 端小孔的细轴上.应在距离 A 多远处垂直击打杆才能使杆绕 A 点转动且不会折断轴?

解 ☞ 杆如图 12-11 所示.用 P 表示冲量的大小,如果击打使轴上没有受力,杆的质心 C 开始向右以速度 $v_c = P/m$ 运动.以 A 为支点计算力矩,牛顿第二定律的转动形式为 $Pd = I_A\omega$,其中 $I_A = ml^2/3$ 是杆关于支点的转动惯量.因为 C 点距离 A 点 $l/2$,所以 $v_c = (\omega l)/2$.结合这些方程解得 $m[(\omega l)/2]d = [(ml^2)/3]\omega$, $d = 2l/3$.[注意该结论与 12.36 题一致:对末端(或打击中心)的撞打使得杆绕打击中心(或末端)转动.]

12.40 根据 12.39 题.(a)悬挂在 A 点的杆摆动的周期为多大?(b)摆长为多少的单摆有同样的周期?所得的摆长应与 12.39 题中的距离相等.相对于 A 的打击中心也称为相对于 A 的振动中心.

解 ☞ (a)摆动的频率为(见 12.38 题)

$$\nu_A = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l/2)g}{G_A^2}}$$

其中 $G_A^2 = I_A/m = l^2/3$.所以有

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

(b)摆长为 L 的单摆的周期为 $2\pi\sqrt{L/g}$.所以当摆动周期为 T_A 时摆长 $L = 2l/3$,这与 12.39 题中所求的距离相等.

12.41 一个质量为 M 半径为 R 的环放在刀口上,环可以在自身平面内摆动,形成一个物理摆.求小振动的周期 T_1.

解 ☞ 如图 12-12 所示,环放在刀口上 A 点.我们要求纸面上小振动的周期 T_1.以环中心的平衡位置 O 点为坐标原点,z 轴正方向指向读者,转动惯量为 $I_{zo} = MR^2$.由平行轴定理,关于刀口的转动惯量为 $I_{zA} = I_{zo} + MR^2 = 2MR^2$;这里 $G_A^2 = 2R^2$.把 G_A^2 和 $D = R$ 代入 12.38 题的方程(1),得到

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2R}}, \quad T_1 = \frac{1}{\nu_1} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

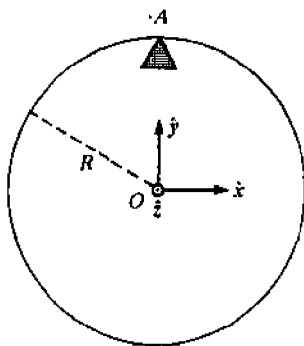


图 12-12

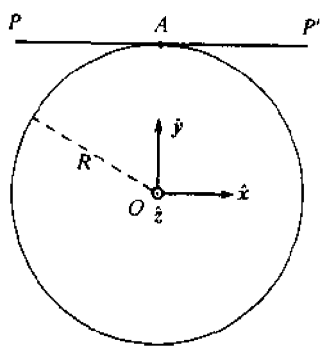


图 12-13

12.42 由 12.41 题.(a)假设一个相同的环固定在与其共面且与圆周相切的轴 PP' 上(图 12-13).环可以在纸面内外摆动.求摆动的周期 T_2,(b)哪种摆动的周期较长?长多少?

解 ☞ (a)现在环固定在轴 PP' 上.由平行轴定理,$I_{PP'} = I_{xo} + MR^2$.在 11.41 题中得到 $I_{xo} = (MR^2)/2$,所以 $I_{PP'} = (3MR^2)/2$.由于 $G_A^2 = 3R^2/2$ 和 $D = R$,由 12.38 题(1)式得 $T_2 = 1/\nu_2 = 2\pi\sqrt{3R/2g}$.(b) $T_1/T_2 = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1.1547$.在平面内的摆动周期比以 PP' 为轴的摆动周期长 15.5%.

12.43　一个均匀角铁挂在细钉上使得铁在结点处自由摆动(图 12-14). 角铁的每根臂质量为 m 长为 l. 求小摆动(在角铁平面内)的周期 T.

解　☞ 该系统的质心在角平分线上,距离支点 A 为 $D=(l\sqrt{2}/4)$. 关于过 A 点且垂直于 xy 面的轴的转动惯量 $I=(ml^2)/3+(ml^2)/3=(2ml^2)/3$. 所以转动半径的平方为 $G^2\equiv I/M=[(2ml^2)/3]/(2m)=l^2/3$. 运用 12.38 题中的(1)式:

$$T\equiv\frac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\frac{G_A^2}{Dg}}=2\pi\sqrt{\frac{l^2/3}{[(l\sqrt{2})/4]g}}=2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}l}{3g}}$$

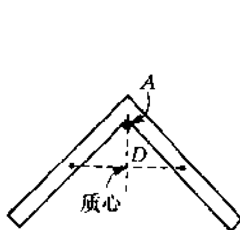


图 12-14

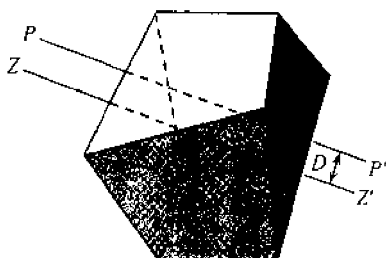


图 12-15

12.44　图 12-15 代表一个三维物体(并不一定密度均匀),质心在 C 点. 过 C 点的轴 ZCZ' 沿任意方向. 物体关于轴 ZCZ' 的回转半径为 $G_c(ZZ')$;符号 $G_c(ZZ')$ 表示关于过 C 点轴的回转半径与轴(ZZ')的选择有关.

假设该物体绕轴 PP' 转动形成物理摆, PP' 与轴 ZCZ' 平行且相距 D。证明小摆动的频率为

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Dg}{G_c^2(ZZ')+D^2}}$$

证　☞ 可直接由 12.38 题的(1)得到该结果. 可见,在以 ZZ' 为中心轴, D 为半径的圆柱上把任意轴 PP' 作为转轴时摆的摆动频率均相等

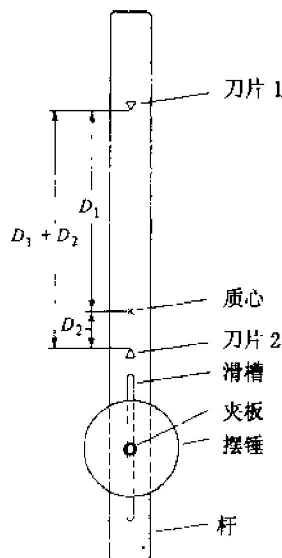


图 12-16

12.45　图 12-16 描绘了卡特摆. 该装置可以高精度测量重力加速度. 它由一根实心杆和装在杆上的摆球构成. 摆球的质量足够大使得摆的质心远离杆的中心. 摆球装在滑槽上,移动摆球并把它固定在某处,从而可以调节摆的质心位置. 杆上有两个锋利的刀刃,摆可以用刀刃 1 作为支点摆动也可以用刀刃 2 作为支点摆动. 如果 G_0 是该摆关于过其质心的轴的回转半径,求关于刀刃 1 和刀刃 2 的小摆动的周期表达式.

解　☞ 由 12.38 题(1)式,

$$T_1=\frac{1}{\nu_1}=2\pi\sqrt{\frac{G_0^2+D^2}{D_1g}},\quad T_2=\frac{1}{\nu_2}=2\pi\sqrt{\frac{G_0^2+D^2}{D_2g}}$$

12.46　根据 12.45 题,当 $D_1\neq D_2$ 时 T_1 能等于 T_2 吗?

解　☞ 可以. 设 G_0 固定, D 为任意值时的周期, $T=2\pi\sqrt{(G_0^2+D^2)/(Dg)}$. 考虑 D 在 0 到 ∞ 之间 T 的变化,发现 $D\to0$ 时 $T\to\infty$ 和 $D\to\infty$ 时 $T\to\infty$. 所以 T 有最小值 T_{min}, 对应于 $D=D_M$. 所以对于任意 $T>T_{min}$, 有两个 D 值,一个比 D_M 大另一个比 D_M 小.

12.3 角动量

12.47 求地球自转一天的转动能量和角动量. 数据: $M_e = 6\times10^{24}$ kg, $R_e = 6.4\times10^6$ m, $\omega = 1/86400$ r/s. 假设地球是均匀球.

解 ☞ $K_r = I\omega^2/2 = [(2Mr^2)/5][(2\pi/86400)^2]/2 = 2.6\times10^{29}$J. 角动量 $= I\omega = [(2Mr^2)/5](2\pi/86400) = 7.1\times10^{33}\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. (角动量还有一个等效的单位 J·s, 常用于原子领域.)

12.48 一个四轮汽车的每一个轮子质量为 30 kg, 回转半径为 30 cm. 当汽车开动时, 轮子的转速为 5.0 r/s, 存贮到四个轮子中的转动动能是多少? 汽车关于平行于轮轴且过质心的轴的转动惯量是多少? 角动量矢量指向司机的右方还是左方?

解 ☞ $K_r = 4(I\omega^2/2) = 2(30)(0.30)^2(10\pi)^2 = 5300$(J). 每个轮子的角动量矢量沿轮轴方向, $L = 4(I\omega) = 4(30)(0.09)(10\pi) = 340(\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$. ω 的单位为弧度每秒. 总角动量 L 与角速度方向相同, 都指向司机的左侧.

12.49 在一次物理演示中, 一位演示者坐在可绕竖直轴作自由转动且摩擦很小的凳子上. 演示者握有一根两端有哑铃的杆, 每个哑铃质量为 m. 他踢动地板获得初始角初速 ω_1, 然后向内移动哑铃使它们与转轴的距离从 R_1 减小到 R_2. 求末角速度 ω_2. 假设演示者与凳子关于转动轴的转动惯量在该过程中没有改变, 计算系统的初动能 K_1 和末动能 K_2. 增加的动能来自何处?

解 ☞ 设 I_0 是演示者与凳子的转动惯量(不包括哑铃), 且 I_0 在实验过程中不改变大小. 因为没有关于竖直轴的力矩, 系统总角动量的竖直分量守恒. 所以 $(I_0+2mR_1^2)\omega_1 = (I_0+2mR_2^2)\omega_2$, 解得

$$\omega_2 = \left(\frac{I_0+2mR_1^2}{I_0+2mR_2^2}\right)\omega_1$$

初动能为 $K_1 = \frac{1}{2}(I_0+2mR_1^2)\omega_1^2$, 末动能为

$$K_2 = \frac{1}{2}(I_0+2mR_2^2)\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{(I_0+2mR_1^2)^2}{I_0+2mR_2^2}\omega_1^2 = \left(\frac{I_0+2mR_1^2}{I_0+2mR_2^2}\right)K_1 > K_1$$

系统增加的动能($K_2 - K_1$)来自演示者对哑铃的作功.

12.50 坐在无摩擦转动的凳子上的人拿着一对哑铃且哑铃与转轴相距 3 ft. 他先获得角速度 2 rad/s, 然后减小哑铃与转轴的距离至 1 ft. 人、凳子以及转杆的转动惯量为 3slug·ft², 且大小守恒. 哑铃可看作 0.5 slug 的质点. (a)求系统的初始角动量, (b)求系统的末角速度.

解 ☞ (a) $I_1\omega_1 = [3+2(0.5)(3^2)]2 = 24\text{slug}\cdot\text{ft}^2/\text{s}$. (b)由于角动量守恒, $I_2\omega_2 = I_1\omega_1$, 即

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2} = \frac{24\ \text{slug}\cdot\text{ft}^2/\text{s}}{[3+2(0.5)(1^2)]\text{slug}\cdot\text{ft}^2} = 6\ \text{rad/s}$$

12.51 一位溜冰者伸开双臂以 1.9 r/s 转动, 初始转动惯量为 1.33 kg·m². 她收起双臂增加转速. 如果她收起双臂后的转动惯量为 0.48 kg·m², 求她现在的转动速度.

解 ☞ $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, $1.33(1.9) = 0.48\omega_2$, $\omega_2 = 5.26$ r/s. 守恒等式中 I 和 ω 的单位可以不对应.

12.52 据推测太阳是由原先太阳系内外的星云发生引力坍缩而成. 假设原来星云是半径为 R_0 的均匀球, 平均角速度为 ω_0, 太阳现在转动多快? 可忽略行星的小质量并假设太阳是半径为 R_r 的均匀球.

解 ☞ 由角动量守恒得 $I_0\omega_0 = I\omega$, 已知 $I_0 = (2MR_0^2)/5$ 以及 $I = (2MR_r^2)/5$, 可以求得 $\omega = (R_0/R_r)^2 W$.

12.53 卫星绕地球运动如图 12-17 所示. 求卫星在近地点的速率 v_a 与远地点速率 v_p 的比值.

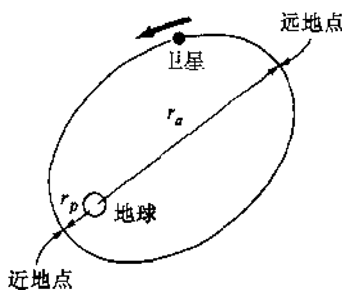


图 12-17

解 ☞ 因为作用在卫星上的引力作用线始终通过地球,卫星关于地球的角动量守恒.(卫星的轨道限制在与 L 垂直的平面内.)所以 $mv_ar_a = mv_pr_p$ 即 $v_p/v_a = r_a/r_p$.

12.54 公园内的旋转木马由一基本均匀的 200 kg 的圆盘绕一竖直轴转动构成.圆盘的半径为 6.0 m 并以 0.20 r/s 的速度转动,在其外边缘处站着一个 100 kg 的人.当人沿半径向中心走 3.0 m 后圆盘转速为多大?若人从盘边缘落下情况会怎样?人可以看成是一个质点吗?

解 ☞ 由角动量守恒得 $I_0\omega_0 = I\omega$, $I_0 = [200(6.0^2)]/2 + 100(6.0^2) = 7200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ 且 $I = [200(36)]/2 + 100(9) = 4500\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.所以,$\omega = 0.20(7200/4500) = 0.32$ r/s.如果人是落下而不是跳下(见 12.56 题),圆盘像以前一样转动且 ω 不变.因为人关于过其质心的竖直轴的转动惯量与他的质量乘以他的质心到旋转木马中心距离的平方相比很小,我们可以把他看作一个质点.这是从平行轴定理得出的结论.

12.55 假设 12.54 题中的旋转木马上没有东西并以 0.20 r/s 的速度转动.如果现在 100 kg 的人很快坐到转盘的边缘,求它的新转速.

解 ☞ 转盘对人产生一个力矩,使他开始转动.所以由牛顿第三定律,人对转盘有一个反向力矩使转盘减速.在人与盘的碰撞中角动量守恒.所以 $I_d\omega_0 + 0 = I_d\omega + I_m\omega$.由于 $I_d = (MR^2)/2$ 和 $I_m = 100(6.0)^2$ 代入数值解得 $\omega = \omega_0/2 = 0.10$r/s.

12.56 由一个 20 kg 的男孩站在小旋转木马的边缘所构成的系统开始时静止.系统关于中心的总角动量为 120 kg·m².男孩从距中心 2.0 m 处以 1.5 m/s 的速度沿切线方向跳离转盘.求男孩跳离后转盘的转速.

解 ☞ 在 2.0 m 处的男孩 $I_c = 20(2.0)^2 = 80(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$则 $I_m = 120 - 80 = 40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.当他沿某一方向切向跳离,他的角速度 $\omega_c = 1.5/2.0 = 0.75$ rad/s.

因为系统的角动量守恒,$I_c\omega_c + I_m\omega_m = 0$ 得 $\omega_m = -\left(\frac{80}{40}\right)(0.75) = -1.5$ rad/s.负号表示转盘运动的方向与男孩相反.

12.57 假设蹲在秋千上的女孩质心在 1.2 m 高处(见图 12-18).女孩重为 400 N,当她蹲下时其质心距秋千的支点 3.7 m.秋千从静止释放,在弧线的底部女孩突然站起来,使她的质心上升 0.6m(回到其原有水平).求在弧线最高处她的质心的高度.

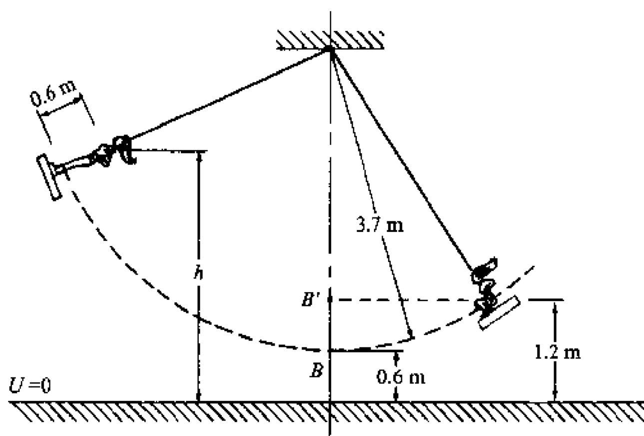


图 12-18

解 ☞ 重力矩是唯一作用在秋千支点的外力矩.该力矩在 B 点为零且在女孩站起的过程中保持为零.在 B 点角动量守恒.

把女孩站起前后这段时间内女孩和秋千组成的系统看成刚体,有 $I\omega = I'\omega'$.设 $R = 3.7$ m 和 $R' = 3.1$ m 是女孩站立前后其质心距支点的距离,有 $I = mR^2 + I_c$, $I' = mR'^2 + I'_c$,其中 I_c 和 I'_c 是她

站立前后关于自己质心的转动惯量.因为 R, R' 远大于女孩的身高,有 $I_c \ll mR^2$ 和 $I'_c \ll mR'^2$.所以原式近似为 $mR^2\omega = mR'^2\omega$ 即 $mRv_B = mR'v'_B$,其中 v_B、v'_B 是质心的速率.所以 $3.7mv_B = 3.1mv'_B$,即 $v'_B = 1.2v_B$.由能量守恒得 $\frac{1}{2}mv_B^2 = mg(1.2-0.6)$,即 $v_B = 3.43$ m/s.所以 $v'_B = 1.2v_B = 4.1$ m/s.再次运用能量守恒得到

$$\frac{1}{2}mv'^2_B = mg(h-1.2) \quad 得 \quad h = \frac{v'^2_B}{2g} + 1.2 = 2.1(\mathrm{m})$$

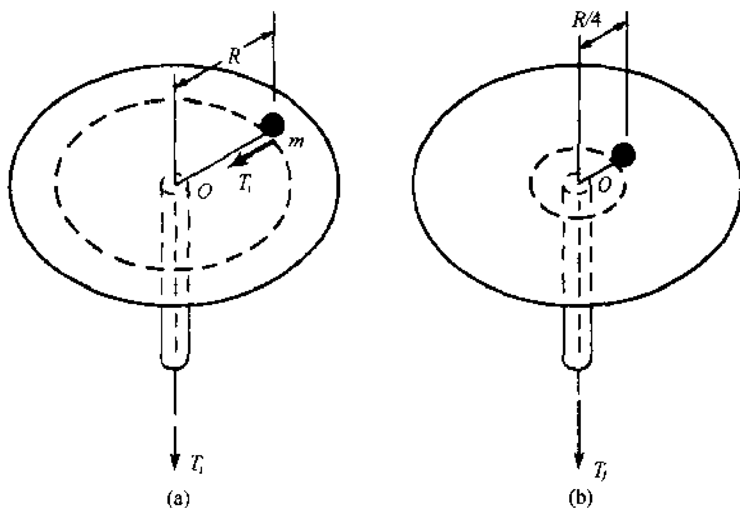


图 12-19

12.58 一男孩站在可自由转动的平台上.当他的手臂伸开时其转速为 0.25 r/s.当他收回手臂时其转速为 0.80 r/s.求前后两种情况下转动惯量的比值.

解 ☞ 因为系统绕其转轴运动时不受外力矩,由角动量守恒知

伸展时的角动量 = 收缩时的角动量 $I_0\omega_0 = I_f\omega_f$ 所以 $I_0/I_f = \frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{0.80\mathrm{r/s}}{0.25\mathrm{r/s}} = 3.2$.

12.59 一颗质量为 m 的珠子系在不可伸长的轻绳上并在光滑水平面上做半径为 R 的圆周运动(见图 12-19).开始时绳子上从 0 到珠子各段的角速度为 ω_0,增加绳上的拉力 T 使 0 到珠子的距离为 $R/4$.求(a)末角速度与初角速度的比值以及(b)绳子上后来的拉力与开始时拉力的比值.

解 ☞ (a)该过程中(向心力)没有关于 O 点的力矩.所以 L = 常数,即

$$mR^2\omega_i = m\left(\frac{R}{4}\right)^2\omega_f \quad 即 \quad \frac{\omega_f}{\omega_i} = 16$$

(b)由于 T 提供向心力,$T = mr\omega^2$.所以

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{(R/4)\omega_f^2}{R\omega_i^2} = \frac{1}{4}(16)^2 = 64$$

12.60 图 12-20 中下方转盘的角速度为 ω_1.转盘和其转轴的总转动惯量为 I_1.另一转动惯量为 I_2 的圆盘加到第一个圆盘上并和其一起转动.求当上方圆盘原来的角速度(a)为零,(b)ω_2 且与 ω_1 同方向,(c)ω_2 且与 ω_1 反方向时的合角速度.

解 ☞ 设 ω_1 和 ω_2 分别代表角速度的大小.由角动量守恒得 $I_1\omega_1 \pm I_2\omega_2 = (I_1+I_2)\omega$.所以(a)$\omega = (I_1\omega_1)/(I_1+I_2)$;(b)$\omega = (I_1\omega_1 + I_2\omega_2)/(I_1+I_2)$;(c)$\omega = (I_1\omega_1 - I_2\omega_2)/(I_1+I_2)$.可与两木块做一维完全非弹性碰撞类比.

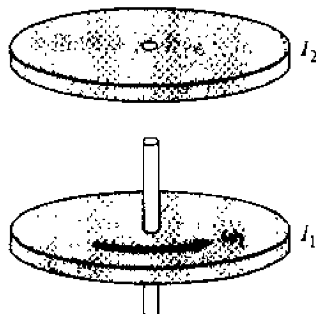


图 12-20

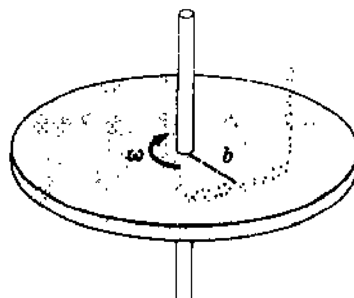


图 12-21

12.61　如图 12-21 所示把沙子加到绕轴自由转动的圆盘上.圆盘关于轴的转动惯量为 I,开始转动速率为 ω_0.求质量为 M 的沙子加到圆盘上半径为 b 处时圆盘的转速.

解　☞ 圆盘和下落的沙子都不受外力矩,角动量守恒.由 $I\omega_0 = (I + Mb^2)\omega$ 得到 $\omega = \omega_0/(1 + Mb^2/I)$.

12.62　一个半径为 R 的木轮子,转动惯量为 I,装在轴上可以自由转动.一颗质量为 m 的子弹以速度 v 沿切向射向轮子并嵌入轮子的边缘.如果轮子原来静止,求碰撞后的转动角速度.

解　☞ 碰撞前系统中只有子弹对轴有角动量,$L_0 = R(mv)$.碰撞后,$L_f = (mR^2 + I)\omega$.由 $L_0 = L_f$ 解得

$$\omega = \frac{mvR}{mR^2 + I}$$

12.63　图 12-22 中两个均匀盘可以分别绕两平行轴转动.开始时上转盘角速度为 ω_0 下转盘停止.现让两转盘一起运动且边缘接触,一小段时间后两个接触的转盘做没有滑动的转动.求上方转盘的最终转动角速度.

解　☞ 两转盘接触时相互作用力大小相等方向相反.该力产生的力矩改变两个盘的角动量:$\overline{F}a\Delta t = I_1(\omega_0 - \omega_1)$和 $\overline{F}b\Delta t = I_2\omega_2$.两式相比得 $a/b = [I_1(\omega_0 - \omega_1)]/(I_2\omega_2)$.达到末速度时 $a\omega_1 = b\omega_2$,所以 $\omega_2 = (a\omega_1)/b$.消去 ω_2 得到 $\omega_1 = (I_1\omega_0)/[I_1 + (a^2I_2)/b^2]$.

12.64　一女子站在可绕过中心的竖直轴以 2.0 r/s 自由转动的水平转台的中心.她手中握有两个 5 kg 的物体靠近身体.转台,女子和物体的总转动惯量为 1.2 kg·m^2.现该女子伸开手臂使物体远离她从而使得系统的总转动惯量增加 2.0 kg·m^2.(a)求转台的末转速,(b)该过程中系统的动能改变吗?试解释之.

解　☞ (a)由角动量守恒得到 $1.2(2.0) = (1.2 - 2.0)\omega$,所以 $\omega = 0.75$r/s.(b)因为$[1.2(2.0^2)]/2 > [3.2(0.75^2)]/2$,故 K 改变.因为系统在展开 5kg 的物体时做功,所以减少了动能.

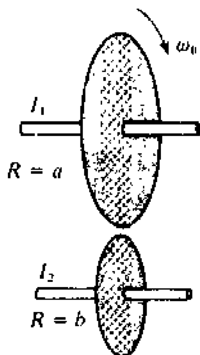


图 12-22

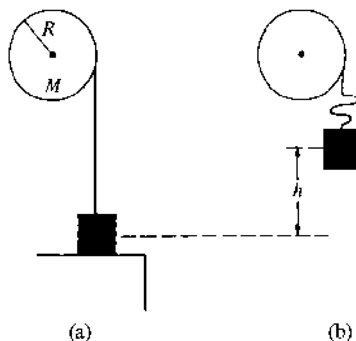


图 12-23

12.65 一个均匀的圆柱质量为 M，半径为 R，水平固定在对称轴上，如图 12-23(a)所示．一根绳子绕在圆柱上几圈且一端系有质量为 m 的物体，物体静止放在支持面上使绳子上无拉力．现把物体轻轻举高 h 高度，然后突然松开，如图 2-23(b)所示．(a)求绳子刚拉紧前圆柱的角速度 ω_0，落体 m 的速度 v_0 和系统的动能 K_0，(b)求绳子拉直的瞬间相应的 ω_1，v_1 和 K_1 的数值．

解 ☞ (a)绳子拉紧前圆柱仍然静止；没有外力使它转动．即 $\omega_0=0$．因为绳子对质量为 m 的物体没有作用力，物体自由落下：$v_0=\sqrt{2gh}$．系统的动能 $K_0=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I_c\omega_0^2=mgh$．(b)假设绳子不可伸长，所以 $v_1=\omega_1 R$．又由于绳子的瞬间冲量作用时间很短重力 mg 可忽略．所以 $L_1\equiv mv_1R+\frac{1}{2}MR^2\omega_1=L_0$，其中 $L_0=mv_0R=m\sqrt{2gh}R$．求解角速度得

$$\omega_1=\frac{v_0}{R[1+(M/2m)]}=\frac{\sqrt{2gh}}{R[1+(M/2m)]}$$

对应的速率为

$$v_1=\omega_1R=\frac{v_0}{[1+(M/2m)]}=\frac{\sqrt{2gh}}{[1+(M/2m)]}$$

动能 K_1 为

$$K_1=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I_c\omega_1^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_1}{R}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{2}\right)v_1^2=\frac{1}{2}\left[\frac{mv_0^2}{1+(M/2m)}\right]=\frac{K_0}{1+(M/2m)}$$

12.66 根据 12.65 题，(a)为什么 K_1 小于 K_0？能量到哪儿去了？(b)如果 $M=m$，当绳子拉直时动能损失了多少？

解 ☞ (a)"损失的动能"K_0-K_1 转化为绳子和两个物体形变产生的热能和势能．(绳子的突然拉直导致动能的损耗，这与两个物体的完全非弹性碰撞相似．)

(b)如果 $M=m$，$K_1=2K_0/3$，所以动能减少的部分所占的比率为$(K_0-K_1)/K_0=\frac{1}{3}$．

12.67 一个学生演示者坐在静止的钢琴椅上且脚不与地面接触．椅子可自由转动．
(a)演示者手中握有装在轴上的自行车车轮．一手竖直握住轴，另一只手转动轮子边缘使之沿顺时针方向转动(从上方看)．则此时演示者怎样运动？(b)若使车轮的转轴沿水平方向，情况怎样？(c)接着她把转动的轮子递给教师，教师把转轴竖起并使轮子沿顺时针方向转动(从上方看)．教师又把轮子递给演示者，情况怎样？(d)演示者握住轴的末端又使轴沿水平方向，现在情况怎样？(e)她继续转动轴使之沿竖直方向并且轮子从上方看沿逆时针方向，则结论如何？

解 ☞ 因为钢琴椅的轴没有摩擦，在人-椅系统上没有竖直方向的力矩．所以角动量的竖直分量守恒．(有水平方向的力矩；这是由于地面对椅子底部有作用力．)
(a)初始角动量为零，所以末角动量也为零．所以演示者逆时针转动．(b)现在轮子的角动量沿水平方向，演示者竖直方向的角动量必须为零，所以她停止转动．(c)当轮子又回到演示者手中时，轮子和演示者的系统具有向下的竖直角动量且都是由轮子产生．故演示者保持静止．(d)因为角动量的竖直分量不变，演示者沿顺时针方向转动．(e)现在轮子的角动量向上，为使得总角动量的竖直分量向下则演示者应有向下的竖直角动量．所以她沿顺时针方向转动．(转动速率是(d)中两倍．)

12.68 一个陀螺由一个质量为 m_0，半径为 R_0 的均匀盘和一根质量不计的轴杆构成．陀螺在光滑的桌面上以角速度 ω_s 沿对称轴转动．要给陀螺做多少功可使之这样转动？已知 $m_0=0.050$ kg，$r_0=2.0$ cm，$\omega_s=200\pi$ rad/s(或 6000 r/min)．

解 ☞ 陀螺的转动惯量为 I_0 且 $I_0=\frac{1}{2}m_0r_0^2$．使陀螺以角速度 ω_s 转动所需的功等于转动动能 $\frac{1}{2}I_0\omega_s^2$．由已知的数值知 $I_0=(0.50)(0.050)(2.0\times10^{-2})^2=10^{-5}(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$．所需做的功为$(0.5)(10^{-5})$

$(200\pi)^2 = 1.97(\text{J})$.

12.69　在 12.68 题中,圆盘的中心距离陀螺与桌面的接触点为 d. 陀螺绕竖直轴以角速度 ω_p 进动. 假设 $\omega_p \ll \omega_s$,把 ω_p 用 r_0, d, ω_s 和 g 表示. 用 $d = 3.0$ cm 和 $g = 9.8$ m/s^2 以及 12.68 题中给出的值求出 ω_p. 得出的结论满足 $\omega_p \ll \omega_s$ 吗?

解　☞ 当 $\omega_p \ll \omega_s$ 时进动角速度近似为

$$\omega_p = \frac{gd}{G_0^2}\frac{1}{\omega_s}$$

其中 $G_0^2 = I_0/m_0 - \frac{1}{2}r_0^2$. 代入已知的数值解得

$$\omega_p = \frac{(9.80)(3.00\times10^{-2})}{(0.5)(2.00\times10^{-2})^2}\frac{1}{200\pi} = 2.34(\text{rad/s})$$

该角速度与 ω_s 的比值为 $(\omega_p/\omega_s) = 3.72\times10^{-3}$. 满足 $(\omega_p/\omega_s) \ll 1$ 的条件.

12.70　如图 12-24 所示,一实心锥形陀螺质量为 M,高为 h,半径为 R 且绕对称轴 OO' 以角速度 ω_s 转动. 轴 OO' 与竖直方向成 α 角. 已知该系统的质心在轴 OO' 上且距顶点 $3h/4$,关于轴 OO' 的转动惯量 I 为 $I = \frac{3}{10}MR^2$. (a)求陀螺关于竖直方向的进动角速度 ω_p,(b)如果陀螺 $h = 10.0$ cm, $R = 3.0$ cm,转速为 5800 r/min. 取 $g = 9.80$ m/s^2,求进动角速度 ω_p.

解　☞ (a)假设 $\omega_p \ll \omega_s$,得到

$$\omega_p \approx \frac{z_c g}{(I/M)\omega_s} = \frac{(3h/4)g}{(3R^2/10)\omega_s} = \frac{5hg}{2R^2\omega_s}$$

与 α 无关. (b)代入 $h = 10.0$ cm, $R = 3.0$ cm, $\omega_s = 5800$ r/min $= 607.4$ rad/s,求得

$$\omega_p = \frac{5(10.0)(980)}{2(3.0)^2(607.4)} = 4.48(\text{rad/s})$$

因为 $\omega_p/\omega_s = 7.38\times10^{-3}$,所以条件 $\omega_p \ll \omega_s$ 满足.

12.71　一枚火箭质量为 10^6 kg,具有水平方向的速度 500 m/s. 如果它的高度(y)是 10 km 且距所选原点的水平距离(x)为 10 km. 求火箭相对于原点的角动量?

解　☞ 对于火箭有 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ 以及 $\boldsymbol{V} = v\boldsymbol{i}$. 所以 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = m(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})\times v\boldsymbol{i} = -myv\boldsymbol{k} = -5\times10^{12}$ kg·m^2/s.

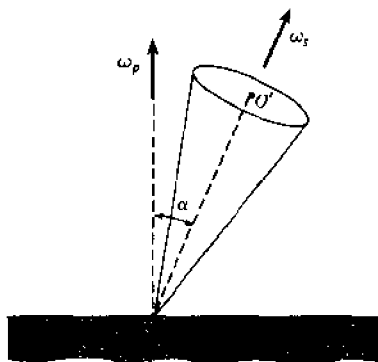


图 12-24

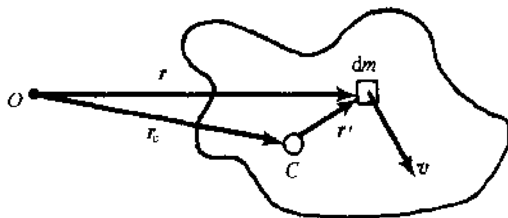


图 12-25

12.72　质量为 m 的质点速度为 $\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$,位于 $\boldsymbol{r} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ 处. 求质点相对于原点的角动量.

解　☞ $$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{r} = m\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = m(42\boldsymbol{j} - 28\boldsymbol{k})$$

12.73[c]　证明物体的角动量可以看成两部分之和,一部分来自物体质心的运动,另一部分由于

物体相对于质心的运动.

解 ☞ 由图 12-25 得相对于一惯性坐标系中的固定点 O,有

$L_o=\int r\times v\mathrm{d}m=\int(r_c+r')\times v\mathrm{d}m=r_c\times\int v\mathrm{d}m+\int r'\times v\mathrm{d}m=r_c\times P+\int r'\times(v'+v_c)\mathrm{d}m=r_c\times P+\int r'\times v'\mathrm{d}m+(\int r'\mathrm{d}m)\times v_c=r_c\times P+L_c$

其中由质心的定义得 $\int r'\mathrm{d}m=0$.

第一项 $r_c\times P$ 是质心相对于 O 的角动量;这叫做轨道角动量(相对于 O).第二项是物体关于其质心的角动量;称为自旋角动量.总之,$L=L_o+L_s$.

12.74[c] 一个半径为 0.10 m 质量为 0.50 kg 的环在桌面上沿平行于一边方向以 0.5 m/s 的速度滚动.以桌子的左后角为原点建立一个直角坐标系.在某一时刻 t,从原点到圆环与桌面接触点的连线长为 1 m 且与 x 轴成 30°角(图 12-26).求圆环在 t 时刻相对于原点的角动量.

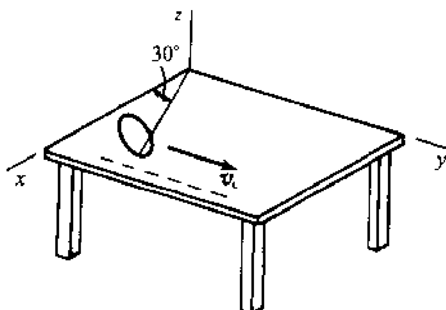


图 12-26

解 ☞ 运用 12.73 题的结论,在时刻 t 质心的位置矢量为

$$r_c=i(\cos30°)+j(\sin30°)+k(0.10)$$
$$=0.866i+0.5j+0.10k$$

圆环的总动量为

$$P=mv_c=(0.50)(0.50j)=0.25j$$

所以,轨道角动量为

$$L_o=r_c\times P$$
$$=(0.866i+0.5j+0.10k)\times0.25j$$
$$=-0.025i+0.216k(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$$

为求自旋角动量,已知圆环上每个质量元与质心的距离相等,都为 $r'=0.10$ m.每个质量元绕质心的转动速度为 V'(大小为 0.50m/s)且与 r'垂直.所以,自旋角动量为

$$L_s=\int r'\times v\mathrm{d}m=\int r'v'(-i)\mathrm{d}m=-mr'v'i=-0.025i(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$$

则 $L=L_o+L_s=-0.05i+0.216k(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$

12.75[c] 证明质点在向心力场 $F=f(r)r$ 中运动的轨迹是平面曲线(参见 12.53 题).

证 ☞ 由牛顿第二定律得 $F=m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$,其中 $v=\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 是粒子的速度.所以由 $r\times F=0$ 得到

$$r\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\times v)=\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\times v\right)+\left(r\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)=0+0=0$$

即 $r\times v=c$,是一个常矢量.最后一个方程(角动量守恒;$c=L/m$)说明 r 总是垂直于固定矢量 c,即运动限制在过原点的平面内.

第十三章 物 性

13.1 密度与比重

13.1 定义质量密度，重量密度和比重. 以水为例分别讨论各物理量的值.

解 ☞ 物体的质量密度 ρ 指单位体积物质的质量，

$$\rho=\frac{\text{物体质量}}{\text{物体体积}}=\frac{m}{V}$$

密度的国际标准单位是 kg/m^3，另外还有 $g/cm^3(=g/mL)$，$slug/ft^3$（不常用），三者之间换算关系为

$$1000\ kg/m^3=1\ g/cm^3=1.94\ slug/ft^3$$

水的密度约为 1000 kg/m^3，质量密度通常简称为密度. 物体的重量密度 D 指单位体积物体的重量

$$D=\frac{\text{物体重量}}{\text{物体体积}}=\frac{mg}{V}=\rho g$$

重力密度单位为 N/m^3，lb/ft^3，lb/m^3. 水的重量密度约为 62.4 lb/ft^3.

比重指该物质的密度与某种标准物质密度的比值，对液体、固体，通常以水（4℃）作为标准；对气体，通常选大气作为标准.

$$\text{比重}=\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{D}{D_0}\quad \rho_0、D_0\ \text{为标准值}.$$

由于比重是无量纲的比值，因此采用各种单位制它都具有相同值. $\rho_0\approx 1$ g/mL，对于采用 g/mL 或 g/cm^3 作为单位的液体和固体的密度在数值上约等于比重值.

13.2 80 ml 的酒精质量为 63.3 g，求此酒精的密度和比重.

解 ☞ 密度 $\rho=\frac{m}{V}=\frac{63.3\ g}{80.0\ mL}=0.791\ g/mL=791\ kg/m^3$

$$\text{比重}=\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{791\ kg/m^3}{1000\ kg/m^3}=0.791$$

13.3 求质量为 200 g 的木炭的体积，已知木炭比重 = 1.60.

解 ☞ 设木炭密度为 ρ，水密度为 ρ_0. 因为比重 $=\frac{\rho}{\rho_0}=1.60$，所以 $\rho=1.60\rho_0=1.60(1\ g/mL)=1.60\ g/mL$. 又因为 $\rho=\frac{m}{V}$，所以 $V=\frac{m}{\rho}=\frac{200\ g}{1.60\ g/mL}=125\ mL$.

13.4 已知铝的密度为 2.70 g/cm^3，求质量为 2 kg 的铝的体积.

解 ☞ $\rho=\frac{m}{V}$，$V=\frac{m}{\rho}=\frac{2000\ g}{2.70\ g/cm^3}=741\ cm^3$

13.5 一桶能装入 200 lb 的水或 132 lb 的汽油，求此汽油的：(a) 比重，(b) 密度（以 kg/m^3 作单位），(c) D（以 lb/ft^3 为单位）.

解 ☞ 水的重量 $=D_0V=\rho_0gV$，汽油的质量 $=DV=\rho gV$

(a) $\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{\rho gV}{\rho_0 gV}=\frac{G}{G_0}=\frac{132\ lb}{200\ lb}=0.66$，所以，比重 = 0.66，(b) $\rho=0.66\rho_0=0.66(1000\ kg/m^3)=660\ kg/m^3$，(c) $D=0.66D_0=0.66\times(62.4\ lb/ft^3)=41.21\ lb/ft^3$

13.6 在标准状况下，大气密度为 1.29 kg/m^3，求体积为 10 m×8 m×3 m 的房间内大气的质量.

解 ☞ $m=\rho V=1.29\ kg/m^3\times 10\ m\times 8\ m\times 3\ m=310\ kg$

13.7 求氢原子核内物质的密度. 可将氢原子核看作半径为 1.2×10^{-15} m 的球体，已知其质量约为 1.67×10^{-27} kg.

解 ☞ $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times(1.20\times10^{-15}\ m)^3=7.23\times10^{-45}\ m^3$

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{1.67\times10^{-27}\ \text{kg}}{7.23\times10^{-45}\ \text{m}^3}=2.31\times10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

13.8 一实心金属圆柱体半径为 0.60 cm，长 8.0 cm，质量为 71 g，求此金属的密度.

解 ☞ 此圆柱体体积 $V=\pi r^2L=\pi\times(0.60)^2\times8.0=9.05(\text{cm}^3)$

$\rho=\frac{m}{V}=\frac{71\ \text{g}}{9.05\ \text{cm}^3}=7.85\ \text{g/cm}^3=7850\ \text{kg/m}^3$

13.9 一铝球半径为 $r=0.25$ cm，质量为 0.125 g. 判断此铝球是否实心，若不是实心，求若将空心部分用铝填满将增重多少?

解 ☞ 此球密度 $\rho=\frac{m}{V}=\frac{0.125\ \text{g}}{\frac{4\pi}{3}\times(0.25)^3\ \text{cm}^3}=1.91\ \text{g/cm}^3$ 因为 $1.91\ \text{g/cm}^3<2.70\ \text{g/cm}^3$，所以此球不是实心的. 若此球为实心，则质量 $m=2.70\ \text{g/cm}^3\times0.0654\ \text{cm}^3=0.177$ g. 故增重为 $0.177-0.125=0.052$ (g).

13.10 一均匀毛细管内盛有 2.375 cm 长的水银柱，水银柱重量为 0.242 g，求此毛细管的内径. 已知水银密度为 $13.6\times10^3\ \text{kg/m}^3$.

解 ☞ $m=\rho V=\rho\pi r^2h$. $0.242\ \text{g}=13.6\ \text{g/cm}^3\times3.14\times r^2\times2.375$ cm. 得 $r^2=0.00239\ \text{cm}^2$，$r=0.049$ cm.

13.11 浓度为 38% 的电池液的比重为 1.285，求 1 L 电池液内溶质的质量.

解 ☞ $\rho=1.285\ \rho_0=1.285\times1.000\ \text{kg/L}=1.285\ \text{kg/L}$. 1$L$ 电池液的质量 $m=\rho V=1.285$ kg，$0.38\times1.285=0.488(\text{kg})$

13.12 一半透明的金膜面积为 14.5 cm^2，质量为 1.93 mg，(a)求 1.93 mg 此金膜的体积；(b)求薄膜的厚度； 1 Å$=10^{-10}$ m；(c)金原子直径为 5 Å，此膜有多少个原子的厚度?

解 ☞ (a)$m=\rho V$，$V=\frac{m}{\rho}=\frac{1.93\times10^{-3}\ \text{g}}{19.3\ \text{g/cm}^3}=0.100\ \text{mm}^3$

(b)$V=Ad$，$d=\frac{V}{A}=\frac{0.100\ \text{mm}^3}{1450\ \text{mm}^2}=6.90\times10^{-6}\ \text{cm}=690$ Å

(c)$\frac{d}{5\ \text{Å}}=\frac{690\ \text{Å}}{5\ \text{Å}}=138$

13.13 在标准状况下，22.4 m^3 的氦气质量为 4 kg，由 6×10^{26} 个氦原子组成，求此气体的密度和每个原子的质量.

解 ☞ 每个原子质量为 $\frac{4.0\ \text{kg}}{6.0\times10^{26}}=6.7\times10^{-27}$ kg

气体密度 $\rho=\frac{4.0\ \text{kg}}{22.4\ \text{m}^3}=0.179\ \text{kg/m}^3$

13.14 中子星的密度为 $\rho=1.0\times10^{19}\ \text{kg/m}^3$，若把地球密度压缩成此值，则地球直径将为何值? 地球质量为 $M=6\times10^{24}$ kg.

解 ☞ $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{M}{\rho}=\frac{6\times10^{24}\ \text{kg}}{1\times10^{19}\ \text{kg/m}^3}=6\times10^5\ \text{m}^3$

得 $R=52.5$ m，$d=2R=105$ m

13.15 在不洁环境下，每立方米的空气中含有 2.6×10^9 个灰尘粒子，比重为 3.0. 假定灰尘粒子直径为 2 μm，计算(a)在一体积为 20 m×15 m×8 m 的房间中尘粒的质量；(b)平均每次呼吸 400 cm^3 的空气体积中含有尘粒的质量.

解 ☞ (a)每个灰尘粒子的质量 $m=\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$$m=\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=3\rho_0\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3=12.6\times10^{-15}\ \text{kg}$$

房间中尘粒质量

$$M=12.6\times10^{-15}\text{kg/粒}\times2.6\times10^9\ \text{粒/m}^3\times20\ \text{m}\times15\ \text{m}\times8\ \text{m}$$
$$=78\times10^{-3}\ \text{kg}=78\ \text{g}$$

(b)$M'=(12.6\times10^{-15})(2.6\times10^9)(4\times10^{-4})=131\times10^{-10}\ \text{kg}=13.1\ \mu\text{g}$

13.2　弹性

13.16　什么是应力和应变?

解　☞ 应力描述导致形变的力的作用效果.如果力作用于面积 A 上(不一定垂直),则应力 $=\frac{\text{作用力}}{\text{作用面积}}=\frac{F}{A}$,单位即为压强单位,见题 13.19.应变是由于施加应力后导致物体的微小形变率,它是用长度改变量与原长的比值来描述,即应变 $=\frac{\text{改变量}}{\text{原长}}$,应变是比值无单位.在不同情况下,形变的具体表达式不同,其它形式的形变由题 13.18～13.20 给出.

13.17　写出弹性、胡克定律、弹性限度和极限压强的定义.

解　☞ 弹性是指物体在受到外力迫使它发生形变时具有恢复原形的特性.

胡克定律可用应力和应变来表述,如果体系服从胡克定律,则应力正比于应变.我们定义一个比例常数,称为弹性模量,满足关系:弹性模量 $=\frac{\text{应力}}{\text{应变}}$.此模量单位与压强单位相同.在只有张力情况下,此模量称为杨氏模量.弹性限度是使物体产生永久性形变的最小压强,当所受应力超过此值,则撤去应力物体也不再恢复原形.极限压强是物体断裂所需的最小压强.

13.18　什么是杨氏模量?

解　☞ 杨氏模量(又称弹性模量)用于描述材料的弹性长度.假设一细绳或杆原长为 L,横截面积为 A,在它的一端施加力 F 后伸长 ΔL,于是

应力 $=\frac{F}{A}$,　　应变 $=\frac{\Delta L}{L}$,杨氏模量 $Y=\frac{\text{应力}}{\text{应变}}=\frac{F/A}{\Delta L/L}=\frac{FL}{A\Delta L}$

Y 的值只与绳或杆的材料有关与直径无关.

13.19　什么是体积弹性模量 B?

解　☞ 体积弹性模量描述材料的体积弹性.假设一均匀分布的作用力垂直作用在物体表面 A 的所有点上,定义 A 上的压强 $p=\frac{F}{A}$.国际单位制中压强单位为帕斯卡(Pa),1 Pa = 1N/m^2,压强的其它单位还有 lbf/in^2、lbf/ft^2.

假设原体积为 V 的物体上的压强增加 Δp,压强的增加导致体积改变 ΔV,ΔV 是负值,我们定义:体应力 $=\Delta p$;体应变 $=-\frac{\Delta V}{V}$;体积弹性模量 $B=\frac{\text{应力}}{\text{应变}}=-\frac{\Delta p}{\Delta V/V}=-\frac{V\Delta p}{\Delta V}$,负号用于消除 ΔV 的负值,因此 B 为正值.体积弹性模量的单位与压强单位相同.体积弹性模量的倒数称为压缩率,用 k 表示;对于液体、气体、固体都可以定义体积弹性模量.

13.20　什么是剪切弹性模量?

解　☞ 剪切弹性模量(S)描述材料的形变弹性.假设图 13-1 中大小相等方向相反的力 F 作用在长方体上,此剪切力 F 使长方体产生如图形变(总体积不变),我们定义

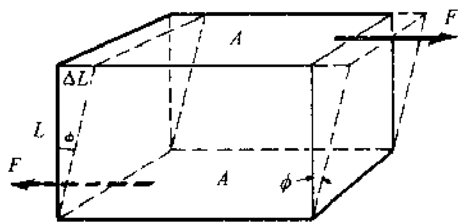


图 13-1

剪切应力 $=\frac{\text{剪切力}}{\text{剪切表面积}}=\frac{F}{A}$,

剪切应变 $=\frac{\text{剪切距离}}{\text{两表面间距离}}=\frac{\Delta L}{L}$

于是,剪切弹性模量 $S=\frac{\text{剪切应力}}{\text{剪切应变}}=\frac{F/A}{\Delta L/L}=\frac{FL}{A\Delta L}$.因为 ΔL 通常很小,$\frac{\Delta L}{L}$ 的比值大约等于剪切角 ϕ,所以 $S=F/(A\phi)$.确切地说,$\frac{\Delta L}{L}=\tan\phi$,$S=F/(A\tan\phi)$.和 Y、B 一样,S 的单位为 Pa.

13.21　一长为 4 m,表面积为 0.5 cm^2 的钢杆在末端挂上 225 kg 的物体后伸长 1 mm,计算钢的杨氏模量.

解　☞ $Y=\frac{F/A}{\Delta L/L}$

其中 $\Delta L/L=(1\times10^{-3}\text{ m})/(4\text{ m})=0.25\times10^{-3}$

$$A=0.5\times10^{-4}\text{ m}^2,\quad F=(225\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)=2205\text{ N}$$

得到 $Y=1.76\times10^{11}\text{ N/m}^2=176000\text{MPa}$.(因为 Pa 是个小量,大概 10^{-5}大气压强,弹性模量通常用 kPa, MPa)

13.22 如果我们将题 13.21 的杆看作弹簧,在它的弹性限度内,求此弹簧的等效劲度系数.

解 ☞ $F=(YA\Delta L)/L\equiv k\Delta L$,其中 k 定义为等效劲度系数

$$k=\frac{YA}{L}=\frac{(1.76\times10^{11}\text{N/m}^2)(0.5\times10^{-4}\text{ m}^2)}{4\text{ m}}=2.2\text{ MN/m}$$

13.23 弹簧挂上 1.8 kg 的物体后伸长 2 cm,求弹簧的劲度系数.若要弹簧伸长 5 cm,需挂质量为何值的物体?

解 ☞ 施加力 F,伸长量为 s,

$$k=\frac{F}{s}=\frac{mg}{s}=\frac{(1.8\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{0.02}=882\text{ N/m}$$

$F=ks=(882\text{ N/m})(0.05\text{ m})=44.1\text{ N},\ m=4.50\text{ kg}$

13.24 质量为 10 kg 的物体悬挂在劲度系数为 12 N/cm 的弹簧上,计算弹簧的伸长.

解 ☞ $F=mg,\ s=\dfrac{F}{k}=\dfrac{mg}{k}=\dfrac{(10\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{12\text{ N/cm}}=8.17\text{ cm}$

注意:k 的单位无需转换,因为 mg 的单位牛顿在 k 中可约去.

13.25 重 100 lbf 的物体挂在一根长 3 ft,直径为 0.20 in 的钢杆末端,求杆的伸长?钢的杨氏模量 $Y=3.3\times10^7\text{ lbf/in}^2$

解 ☞ $Y=\dfrac{F/A}{\Delta L/L}$或

$$\Delta L=\frac{LF}{AY}=\frac{(3\text{ ft})(100\text{ lbf})}{\pi(0.01\text{in}^2)(3.3\times10^7\text{ lbf/in}^2)}=2.9\times10^{-4}\text{ft}=3.5\times10^{-3}\text{in}$$

注意:只要 A 与 Y 一致,L 和 A 的单位可以不一致,因为长度的平方可约去.

13.26 横截面积为 4 mm^2 的细绳被一重物拉伸 0.1 mm.如果在同样材料,同样长度,但横截面积变为 8 mm^2 的绳上挂同一重物,伸长量又为多少?

解 ☞ 如果材料、长度、物重固定,则 F、L、Y 满足关系:$\Delta L=(FL)/AY$,于是 $\Delta L\propto\dfrac{1}{A}$,即 $A\Delta L=$常数,所以:$A_1\Delta L_1=A_2\Delta L_2$

$$\Delta L_2=\frac{A_1}{A_2}\Delta L_1=\frac{4\text{ mm}^2}{8\text{ mm}^2}\times0.1\text{ mm}=0.05\text{ mm}$$

13.27 一钢丝长 4.0 m,直径为 2 mm,若悬挂质量为 20 kg 的物体伸长多少?钢的杨氏模量为 196000 MPa.

解 ☞ 设伸长 ΔL,由胡克定律得$\dfrac{F}{A}=Y\dfrac{\Delta L}{L}$,其中 Y 为杨氏模量,则伸长量

$$\Delta L=\frac{1}{Y}\frac{FL}{A}=\frac{mgL}{YA}=\frac{(20)(9.8)(4.0)}{(196\times10^9)\pi(0.001)^2}$$

$$=1.273\times10^{-3}(\text{m})=1.273(\text{mm})$$

13.28 将长 2.0 m,直径为 2 mm 的铜丝被拉长 1 mm 须加多大力?铜的杨氏模量为 117600 MPa.

解 ☞ $\dfrac{F}{A}=Y\dfrac{\Delta L}{L},\quad F=Y\dfrac{\Delta L}{L}A=(117.6\times10^9)\dfrac{0.001\pi}{2}(0.001)^2=184.7(\text{N})$

13.29 一根金属丝被 1 kN 的力拉长了 1 mm.(a)用同样材料制成相同长度但直径为原来 4 倍的金属丝,施加同样的力会伸长多少?(b)拉伸这两根金属丝分别做多少功?

解 ☞ (a)伸长量反比于横截面积,所以 $\Delta L=(1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}(\text{mm})$

(b)因为力与位移成线性关系,拉伸金属丝所做的功 $W=\overline{F}x,\ \overline{F}=\dfrac{F_i+F_f}{2}$

所以 $W_1=\dfrac{1000+0}{2}\times0.001=0.5(\text{J}),\quad W_2=\dfrac{1}{16}W_1=0.0313(\text{J})$

13.30 一根长 2.0 m,直径为 1.0 mm 的钢丝挂上 5 kg 重物后伸长多少?已知 $Y=195000$

MPa.

解　☞ 因为弹性模量等于 $\frac{应力}{应变}$,得出

$\frac{\Delta L}{L}=\left(\frac{F}{A}\right)/Y=[5\times(9.8)]/[\pi(5\times10^{-4})^2(195\times10^9)]=3.2\times10^{-4}$

$\Delta L=6.4\times10^{-4}$ m

13.31　要使一直径为 2.0 cm 的钢杆伸长 0.01% 大概要加多大的力? $Y=195000$ MPa

解　☞ 利用胡克定律求出 F

$F=AY(\Delta L/L)=\pi(0.01)^2(195\times10^9)(10^{-4})=6100(\mathrm{N})$

13.32　用四根金属丝在四个角处将平台吊起,金属丝长 3 m,直径为 2.0 mm.材料的杨氏模量为 180000 MPa,如在平台中心处放一重为 50 kg 的重物,平台下降多少?

解　☞ $\Delta L=(LF)/(AY)$

其中 $L=3$ m, $A=\pi(1.0\times10^{-3}\ \mathrm{m})^2=3.14\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2$.

因为每根金属丝承受物重的 $\frac{1}{4}$,所以 $F=[(50\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})]/4=123$ N.

$$\Delta L=\frac{(3\ \mathrm{m})(123\ \mathrm{N})}{(3.14\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2)(1.8\times10^{11}\ \mathrm{N/m^2})}=65\times10^{-5}\ \mathrm{m}=0.65\ \mathrm{mm}$$

13.33　一根铜丝承受 400 N 的重物后没有超过其弹性限度,铜丝的最小直径为多少?假设弹性限度为 379 MPa.

解　☞ 要求最小直径,可先求最小横截面积,假设作用 400 N 的力后铜丝恰好达到弹性限度,此时压强为 $\frac{F}{A}=379\times10^6$ Pa,得到 $A=(400\ \mathrm{N})/(379\times10^6\ \mathrm{Pa})=1.0554\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2$.

因为 $A=\frac{\pi D^2}{4}$,所以 $D^2=\frac{4A}{\pi}=\frac{4(1.0554\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2)}{\pi}=1.344\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2$

$D=\sqrt{1.344\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2}=1.16\times10^{-3}\ \mathrm{m}=1.16$ mm

13.34　一根 18 号铜丝长 10 ft,直径为 0.04 in.(a)在它的弹性限度内所能承受的最大物重是多少?(b)计算挂上此重物后铜丝的伸长;(c)不使铜丝断裂所能承受的最大物重是多少?(d)最大伸长量是多少?(假设弹性限度内承受的最大压强为 23000 lbf/in^2;承受的极限压强为 49000 lbf/in^2)

解　☞ (a)$F/A=23000$ lbf/in^2,所以 $F_{max}=(23000\ \mathrm{lbf/in^2})A$

$$A=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\pi(0.04\mathrm{in})^2}{4}=4\pi\times10^{-4}\ \mathrm{in}^2$$

所以 $F_{max}=(23000)(4\pi\times10^{-4})=28.9(\mathrm{lbf})$

(b)$\Delta l=(F/A)(l/Y)=(23000\ \mathrm{lbf/in})10\ \mathrm{ft}/17\times10^6\ \mathrm{lbf/in}=0.0135$ ft

(c)$F'/A=49000\mathrm{lbf/in^2}$,　$F'=(49000\ \mathrm{lbf/in^2})(4\pi\times10^{-4}\mathrm{in^2})=61.6$ lbf

(d) $\Delta l'=(49000\ \mathrm{lbf/in^2})(10\ \mathrm{ft}/17\times10^6\ \mathrm{lbf/in^2})=0.0288\ \mathrm{ft}=0.346$ in

13.35　一根钢丝所能承受的极限压强为 35000 lbf/in^2,这样的一根直径为 0.5 in 的钢丝在断裂之前能挂多大的重物?

解　☞ $F=(35000\ \mathrm{lbf/in^2})A$

$$A=\frac{\pi(0.25\ \mathrm{in^2})}{4}=1.964\times10^{-3}\ \mathrm{in}^2$$

$$F=(35000\ \mathrm{lbf/in^2})(1.964\times10^{-3}\ \mathrm{in^2})=68.7\ \mathrm{lbf}$$

13.36*　原长为 L,截面积为 A 的金属丝承受 τ 的压强后在弹性限度内被拉伸,证明弹性势能密度为 $\tau^2/2Y$.

解　☞ 设总伸长量为 ΔL,则根据胡克定理 $\tau=Y(\Delta L/L)$,再利用胡克定律,伸长 x,金属丝上拉力为 $F(x)=[(AY)/L]x$.因此弹性势能为

$$W=\int_0^{\Delta L}F(x)\mathrm{d}x=\frac{AY}{L}\int_0^{L\tau/Y}x\,\mathrm{d}x=\frac{\tau^2}{2Y}AL$$

不计微小改变，体积为常数 $V=AL$，因此 $\frac{W}{V}=\frac{\tau^2}{2Y}$. 注意到能量密度与金属丝直径无关.

13.37 一金属块承受大气压强为 0.1MPa，现将它移到真空室中，求此过程中体积的变化率. 已知此金属的体积弹性模量为 125000 MPa.

解 ☞ $B=\frac{-\Delta P}{\Delta V/V}, \frac{\Delta V}{V}=-\frac{\Delta P}{B}=-\frac{(-0.1)}{125000}=8\times10^{-7}$

13.38 计算边长为 40 mm 的立方铜块承受 20 MPa 压强后体积的改变量.

解 ☞ $\Delta V=\frac{-V\Delta p}{B}=\frac{-(40\ \text{mm})^3(20\ \text{MPa})}{125000\ \text{MPa}}=-10\ \text{mm}^3$

注意：V 和 Δp 的单位可以不一致，因为 $\Delta p/B$ 无量纲.

13.39 一爆炸室的压强为 345 MPa，一铜片在此压强下体积变化率为多少？该铜片的体积弹性模量为 138 GPa($=138\times10^9$ Pa).

解 ☞ 体积弹性模量 $B=-\Delta p/(\Delta V/V)$. 当 Δp 为正时，ΔV 为负，故加了一负号.

$100\left|\frac{\Delta V}{V}\right|=100\frac{\Delta p}{B}=100\frac{345\times10^6}{138\times10^9}=0.25\%$

13.40 水的压缩率为 $5\times10^{-10}\ \text{m}^2/\text{N}$，求 100 mL 的水承受压强 15 MPa 后体积减少多少？

解 ☞ 压缩率 k 是体积弹性模量 B 的倒数，所以

$$\Delta V=-Vk\Delta p=-(100\ \text{mL})(5\times10^{-10}\text{m}^2/\text{N})(15\times10^6\ \text{Pa})=-0.75\ \text{mL}$$

即体积减少了 0.75 mL.

13.41 若将水体积压缩 0.1% 需加多大压强？这个压强是大气压强的多少倍？水的体积弹性模量 $B=2100$ MPa.

解 ☞ 体积形变为 $\Delta V/V_0=1.0\times10^{-3}$

由 $B=p/(\Delta V/V_0)$ 求出 $p=(2.1\times10^9)(1.0\times10^{-3})=2100(\text{kPa})$

除以大气压强得比例为 21.

13.42 将一钢板放在一小室中抽去其中的空气，求钢板体积的改变率. 标准大气压强为 0.101 MPa，钢的体积弹性模量为 160000 MPa.

解 ☞ $\Delta V/V_0=-\Delta p/B=0.101/160000=6.3\times10^{-7}$

13.43 200 L 的水体积压缩 0.004%，需增加多大的压强？求出体积改变量($B=2100$ MPa).

解 ☞ $\Delta V=0.00004(200\ \text{L})=0.008\ \text{L}$

$$\Delta p=B\left(-\frac{\Delta V}{V}\right)=(2100\ \text{MPa})\left(\frac{0.008\ \text{L}}{200\ \text{L}}\right)=0.084\ \text{MPa}=84\ \text{kPa}$$

13.44 体积为 64 in^3 的甘油在承受 290 lbf/in^2 的压强后体积减少了 $3\times10^{-3}\text{in}^3$. 计算甘油的压缩系数.

解 ☞ 压缩系数是 B 的倒数

$$k=-\frac{1}{\Delta p}\frac{\Delta V}{V_0}=\frac{3\times10^{-3}\ \text{in}^3}{(290\ \text{lbf/in}^2)(64\ \text{in}^3)}=1.62\times10^{-7}\ \text{in}^2/\text{lbf}.$$

13.45 两个大小为 4000 N 的平行反向剪切力作用于边长为 25 cm 的金属立方体上下表面. 求剪切角及上下表面的相对位移. 此金属的剪切模量为 80 GPa.

解 ☞ 利用公式 $S=F/(A\phi)$(题 13.20)求出 ϕ

$$\phi=\frac{(4000\ \text{N})}{(6.25\times10^{-2}\text{m}^2)(8\times10^{10}\ \text{N/m}^2)}=8.0\times10^{-7}\ \text{rad}$$

上表面位移为 $d=L\phi$，其中 L 为立方体边长

$d=(8\times10^{-7})(25\ \text{cm})=2.0\times10^{-5}\ \text{cm}$

13.46 某金属的剪切模量为 50000 MPa，大小为 200 N 的剪切力作用于边长为 3.0 cm 的金属立方体的上表面，求上表面的位移.

解 ☞ 剪切应变 $= \frac{\Delta L}{L} = \frac{F/A}{S} = 200/[L^2(5\times10^{10})] = (4\times10^{-9})/L^2$

$$L = 0.030\ \text{m}$$

解得 $\Delta L = 1.33\times10^{-7}\ \text{m} = 0.133\ \mu\text{m}$

13.47　一橡胶块体积为 60 mm×60 mm×20 mm,0.245 N 的剪切力作用在上表面一角处并产生相对下表面 5 mm 的位移(图 13-2),求(a)剪切应力,(b)剪切应变,(c)剪切模量.

解 ☞ (a)剪切应力 $= \frac{F}{A} = \frac{0.245}{36\times10^{-4}} = 68.1\ (\text{Pa})$

(b)剪切应变 $= \tan\theta = \frac{d}{h} = \frac{5}{20} = 0.25$

(c)剪切模量 $S = \frac{F/A}{\tan\theta} = \frac{68.1}{0.25} = 272.4(\text{N/m}^2)$

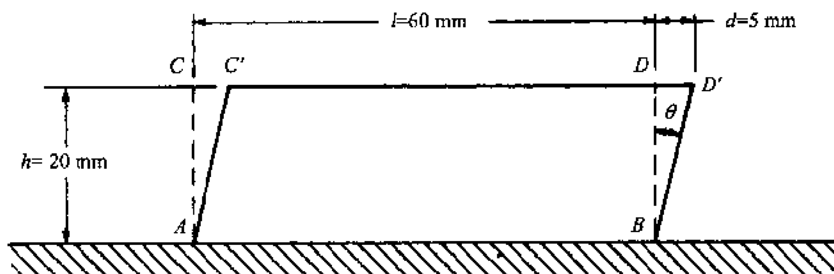


图 13-2

13.48　剪刀的两个铝片由截面积为 0.25 in² 的铆钉铆合,每个铆钉的剪切应力不能超过铝弹性限度的$\frac{1}{10}$.如要承受 25000 lbf 的剪切力需安装几个铆钉?设弹性限度内承受的最大压强为 19000 lbf/in².

解 ☞ 每个铆钉的最大压强为$\frac{F}{A} = \frac{1}{10}(19000\ \text{lbf/in}^2) = 1900\ \text{lbf/in}^2$,则剪切力 $F = (1900\ \text{lbf/in}^2)(0.25\ \text{in}^2) = 475\ \text{lbf/个}$,所以铆钉数目为$\frac{25000\ \text{lbf}}{475\ \text{lbf/个}} = 52.7$ 个≐53 个.

13.49　60 kg 的汽车下部有 4 个圆柱形橡胶轮胎,每个轮胎高 3 cm,横截面积为 15 cm²,橡胶的剪切模量为 2 MPa.(a)如果在汽车上施加一 300 N 的侧力,汽车将有多大的侧移量.(b)此时汽车前后晃动的频率多大?

解 ☞ (a)假设剪切力均匀作用于 4 个轮胎上,则每个轮胎承受 $F = 75$ N.

$$\phi = \frac{F}{AS} = \frac{75\ \text{N}}{(15\times10^{-4}\text{m}^2)(2\times10^6\ \text{N/m}^2)} = 2.5\times10^{-2}\ \text{rad}$$

位移 $d = L\phi = (3.0\ \text{cm})(2.5\times10^{-2}\ \text{rad}) = 0.075\ \text{cm}$

(b)因为每个轮胎上的剪切力与 ϕ 和水平位移 d 成正比. $F = AS\phi = [(AS)/L]d$,因为有 4 个轮胎,外加的水平力 $F_T = [(4AS)/L]d$, F_T 应与弹性回复力平衡,所以 $F_S = -[(4AS)/L]d$.若撤去剪切力,体系的有效劲度系数 $k = (4AS)/L = 4.0\times10^5(\text{N/m})$,忽略轮胎的质量,可以得到

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4.0\times10^5\text{N/m}}{60\ \text{kg}}} = 13\ \text{Hz}$$

13.50　将一圆柱形杆扭转一 θ 角度,如图 13-3,分析得到扭角满足 $\theta = \frac{2\tau l}{\pi SR^4}$.其中 τ = 所加的力矩; l = 圆柱体长度; R = 圆柱体半径; S = 材料的剪切模量.如用 100 lbf·ft 的力矩作用于 10 ft 长,直径为 2 in 的此种圆柱杆上,它将扭转多大角度. $S = 12\times10^6$ lbf/in²

解 ☞ 已知 $S = 12\times10^6\ \text{lbf/in}^2$, $R = 1$ in, $\tau = 100\ \text{lbf·ft} = 1200\ \text{lbf·in}$, $l = 10\ \text{ft} = 120$ in.

根据所给公式得

$$\theta = \frac{2\tau l}{\pi S R^4} = \frac{2(1200\ \mathrm{lbf\cdot in})(120\ \mathrm{in})}{\pi(12\times10^6\ \mathrm{lbf/in^2})(1\ \mathrm{in})^4}$$
$$= 7.64\times10^{-3}\ \mathrm{rad} = 0.437^\circ$$

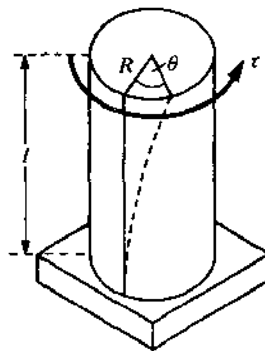


图 13-3

13.51 发动机以 800 rad/min 的转速将 140 hp 的功率传给金属驾驶杆，驾驶杆长 8 ft，直径为 2 in. 求它的扭角. $S = 10\times10^6\ \mathrm{lbf/in^2}$.

解 ☞ 先求出力矩，再用题 13.50 的结论.

$$P = 140\ \mathrm{hp}\left(550\ \frac{\mathrm{ft\cdot lbf/s}}{\mathrm{hp}}\right) = 7.7\times10^4\ \mathrm{ft\cdot lbf/s}$$
$$\omega = 2\pi f = 2\pi(800\ \mathrm{rad/s})(1\ \mathrm{min}/60\ \mathrm{s}) = 83.78\ \mathrm{rad/s}$$
$$P = \tau\omega$$

所以 $\tau = \dfrac{P}{\omega} = \dfrac{7.7\times10^4\ \mathrm{ft\cdot lbf/s}}{83.78\ \mathrm{rad/s}} = 919\ \mathrm{lbf\cdot ft} = 11000\ \mathrm{lbf\cdot in}$

$$\theta = \frac{2\tau l}{\pi S R^4} = \frac{2(11000\ \mathrm{lb\cdot in})(8\ \mathrm{ft})(12\ \mathrm{in/ft})}{\pi(10\times10^6\ \mathrm{lb/in^2})(1\ \mathrm{in})^4} = 0.0674\ \mathrm{rad} = 3.86^\circ$$

第十四章 简谐运动

14.1 弹簧振子的运动

14.1 一弹簧在 40 s 内振动了 12 次，求此弹簧的周期与频率.

解 ☞ $T=\frac{40\ \text{s}}{12}=3.3\ \text{s}, f=\frac{1}{T}=\frac{12}{40\ \text{s}}=0.30\text{Hz}$

14.2 一质量为 50 g 的物体悬挂在弹簧(服从胡克定律)底端，若再增重 20 g，发现弹簧伸长了 7.0 cm，求(a)求弹簧的劲度系数，(b)拿掉 20 g 的物体后弹簧的运动周期.

解 ☞ (a)$k=\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{0.02\ \text{kg}\times 9.8\ \text{m/s}^2}{0.07\ \text{m}}=2.8\ \text{N/m}$

(b)$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.05\ \text{kg}}{2.8\ \text{N/m}}}=0.84\ \text{s}$

14.3 一弹簧挂上 50 g 的物体后伸长 4 cm，若挂一 150 g 的物体并开始沿竖直方向振动，求此振动的周期.

解 ☞ 先求弹簧的劲度系数 $k=\frac{50\ \text{g}\times 980\ \text{cm/s}^2}{4\ \text{cm}}=12250\ \text{dyn/cm}$

周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{150\ \text{g}}{12250}}=2\pi\times 0.1107=0.695\ \text{s}$

14.4 现将重为 27 N 的物体悬挂在弹簧上，此弹簧在 9 N 力作用下伸长 0.05 m，让挂上重物的弹簧振动，求振动周期.

解 ☞ 弹簧劲度系数 $k=\frac{9}{0.05}=180\ (\text{N/m})$

周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{27/9.8}{180}}=0.78\ (\text{s})$

14.5 一重为 3 lbf 的物体悬挂在劲度系数为 25 lbf/ft 的弹簧上.将物体轻轻拉离平衡位置后释放，求振动频率.

解 ☞ $m=\frac{3\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/s}^2}=0.093\ \text{slug}, f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\ \text{lb/ft}}{0.093\ \text{slug}}}=2.61\ \text{Hz}$

14.6 质量为 m 的物体悬挂在劲度系数为 k 的弹簧上，运动周期为 T.若再挂上质量为 M 的物体，周期变为 $3T$.用 m 表示 M.

解 ☞ 周期与质量的平方根成正比.故第二次的质量是第一次的 9 倍，得到 $M=8\ m$.

14.7 一 0.5 kg 的物体做简谐运动，频率为 2 Hz，振幅为 8 mm，求此物体的最大速度、最大加速度及最大回复力.

解 ☞ $\omega=2\pi\gamma=2\pi\times 2\ \text{Hz}=4\pi\ \text{rad/s}$

$$v_{max}=\omega R=4\pi\times(0.008)=0.101(\text{m/s})$$

$$a_{max}=\omega^2 R=16\pi^2\times(0.008)=1.264(\text{m/s}^2)$$

根据牛顿第二运动定律

$$F_{max}=ma_{max}=0.5\ \text{kg}\times 1.264\ \text{m/s}^2=0.632\ \text{N}$$

14.8 一质量为 250 g 的物体悬挂在一轻质弹簧上并以 1.1 s 的周期在竖直方向做简谐运动.若要使周期加倍还应增重多少?

解 ☞ 与 14.6 题同理，还需增加质量为$(4-1)\times 250\ \text{g}=750\ \text{g}$

14.9 一做简谐运动的物体最大加速度为 $8\ \pi\ \text{m/s}^2$，最大速度为 1.6 m/s，求周期和振幅 R.

解 ☞ 用 R 和 T 表示 a_{max}和 V_{max}.

$$a_{max}=\omega^2R=\frac{4\pi^2}{T^2}R=8\pi m/s^2,\ v_{max}=\omega R=\frac{2\pi R}{T}=1.6\ m/s$$

所以 $\frac{a_{max}}{v_{max}}=\frac{2\pi}{T}=\frac{8\pi}{1.6}$，　$T=0.4$ s

$\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi R}{0.4}=1.6$，　$R=\frac{0.4\times1.6}{2\pi}=0.102(\mathrm{m})$

14.10 一竖直悬挂的轻质弹簧的劲度系数为 k，挂上质量为 m 的物体后伸长 l. 将物体拉离平衡位置 y 后松手. 证明：物体的运动方程为 $a=-ky/m$. 因此物体在平衡位置附近做简谐运动，并证明振动周期与一长度为 l 的单摆的振动周期相同.

解 ☞ 平衡位置可根据此时满足的方程 $mg=kl$ 得到.

用 $y(t)$ 代表瞬时位置，$y=0$ 时，物体处于平衡位置；$y>0$ 时，偏离平衡位置.

松手后，根据牛顿第二定律

$$ma=mg-k(l+y)=-ky$$

所以 $a=-ky/m$ 物体在平衡位置做简谐运动

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，又因为 $mg=kl$ 得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

最后一个公式也就是长度为 l 的单摆周期.

14.11 某发电机的活塞在竖直方向做简谐运动，振幅为 7 cm，一垫片位于活塞顶部. 当这台机器缓慢开始运动后，在什么频率时，垫片与活塞脱离？

解 ☞ 垫片的最大加速度为自由落体加速度 g. 若活塞加速度大于 g 时，两者开始脱离. 在简谐运动中，加速度表达式为 $a=-4\pi^2f^2x$，取向下方向为正，最大加速度（通常为负值）$a_0=4\pi^2f^2x_0=4\pi^2f^2(0.07\ \mathrm{m})$. 当 $a_0=g$ 时，垫片开始脱离活塞

$4\pi^2f_c^2(0.07\ \mathrm{m})=9.8\ \mathrm{m/s^2}$

$f_c=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{0.07}}=1.88(\mathrm{Hz})$

14.12 质量为 m 的物体通过悬绳挂于劲度系数为 k 的弹簧上，悬绳与弹簧的质量忽略不计，且绳无弹性形变，将物体拉离平衡位置 A 然后释放.（a）假设在整个过程中绳保持紧绷，求物体的最大加速度，（b）假设绳中只要有张力就保持紧绷，求整个运动过程中当绳保持紧绷时的最大振幅 A_{max}，（c）若 $m=0.1$ kg，$k=10$ N/m，计算 A_{max}.

解 ☞（a）只要悬绳保持紧绷，物体受一个与位移有关的回复力. 因此，悬绳的作用只是把弹簧的作用力传递给物体. 物体作振幅为 A、频率为 $\omega=\sqrt{k/m}$ 的简谐运动，最大加速度 $a=\omega^2A=kA/m$.（b）若悬绳拉力是时间 t 的函数 $T(t)$，则向下的加速度 $a(t)=g-\{[T(t)]/m\}$. 因此若悬绳上有拉力 T，则 a 不会超过 g，对应的最大振幅 $A_{max}=mg/k$. 注意到这个振幅在数量上与弹簧伸长相等，这与我们的直觉一致.

（c）$m=0.1$ kg，　$k=10$ N/m，$A_{max}=\frac{0.1\times9.8}{10}=9.8\times10^{-2}(\mathrm{m})=98(\mathrm{mm})$

14.13 某物体固定于一根在桌面上做简谐运动的弹簧上，忽略物体与桌面间的摩擦力. 振动频率为 ν. 将一稍小的物块放在此物体顶部，两物块间静摩擦因数为 μ_s.（a）要使两物体之间无相对滑动，求振动的最大振幅，（b）$\nu=3.0$ Hz，$\mu_s=0.60$，求出结果.

解 ☞（a）若振幅为 A，则最大加速度为 $\omega^2A=4\pi^2\nu^2A^2$. 为使两者保持共同运动状态，摩擦力所能提供的加速度应大于此加速度，静摩擦力的最大加速度为 μ_sg. 因此需有 $4\pi^2\nu^2A\leqslant\mu_sg$，所以最大振幅 $A_{max}=\mu_sg/4\pi^2\nu^2$，（b）$\nu=3.0$ Hz，$\mu_s=0.60$

$$A_{max}=\frac{0.6\times9.8}{4\pi^2\times(3.0)^2}=1.65\times10^{-2}(\mathrm{m})=16.5(\mathrm{mm})$$

14.14 质量为 M_1 的物体与劲度系数为 k 的固定弹簧相连后，在光滑水平面上作简谐运动.

一质量 $M_2=\alpha M_1$ 的物体放在 M_1 上，两物体间的摩擦因数为 μ_s.(a)假设两者共同运动，求此振动系统的周期 T，(b)求两者共同运动的最大振幅 A_{max}，(c) 若 $k=6.0$ N/m, $M_1=1.0$ kg, $\alpha=0.50$, $\mu_s=0.4$, 求 T、A_{max}.

解 ☞ (a)用 x_1 和 x_2 分别标记物体1和2，从初始位置开始计算，弹簧拉伸时 $x_1>0$. 若两物体以整体共同运动，则 $x_1=x_2=x$，由牛顿第二定律可得 $(M_1+M_2)a_x=-kx$，简谐运动周期 $T=2\pi\sqrt{(M_1+M_2)/k}=2\pi\sqrt{\frac{(1+\alpha)M_1}{k}}$

(b)物体 M_2 的最大加速度 $a_x=\omega^2A$. 因为摩擦力是 M_2 所受的唯一水平作用力. 当 $M_2\omega^2A\leqslant\mu_sM_2g$ 时，M_1 和 M_2 才能以一整体运动，因此最大振幅 $A_{max}=[\mu_s(M_1+M_2)g]/k=[(1+\alpha)M_1g\mu_s]/k$

(c) $k=6.0$ N/m, $M_1=1.0$ kg, $\alpha=0.50$, $\mu_s=0.40$

$T=2\pi\sqrt{(1.5)\times1.0/6.0}=\pi=3.14$(s)

$A_{max}=1.5\times1.0\times9.8\times0.4/6.0=0.98$(m)

14.15 xy 平面内有一半径为 A 的圆，圆心在原点，一粒子以恒定速度 $A\omega$ 沿圆周运动. 证明，粒子在 x 方向上的运动满足公式 $x=A\cos(\omega t+\phi)$，ϕ 为 $t=0$ 时粒子与 x 轴间所张的角. 并用 f 表示粒子运动的角频率 ω，即 x 方向振动的频率.

解 ☞ 根据图14-1，在 $t=0$ 时刻粒子位于 B 处，与水平轴成 ϕ 角. 在某一时刻 t，粒子运动到 C 处，张角增加 ωt，C 点的 x 坐标 $x=A\cos(\omega t+\phi)$

周期 T 是运动一周所需时间 $T=\frac{2\pi A}{A\omega}=\frac{2\pi}{\omega}$，因为 $f=\frac{1}{T}$，所以 $\omega=2\pi f$，这也是 ω 称为角频率的原因.

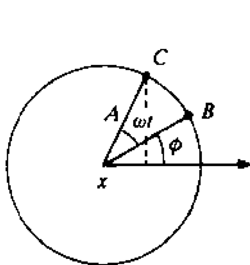


图 14-1

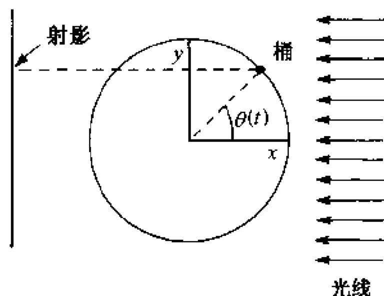


图 14-2

14.16 在牛顿水桶实验中，系在长为 r 的绳一端的桶以速率 v 作水平面内的圆周运动，远处一平行光将水桶的影子射到垂直墙上，证明：水桶的投影作角频率 $\omega=v/r$ 的简谐运动.

解 ☞ 图14-2是此运动的俯视图，在给出的坐标系中，$y(t)$ 是水桶投影的运动方程. 我们用 $\theta(t)$ 标记水桶的角位置，从正 x 轴位置逆时针取值. 于是 $\omega=\pm v/r$，取 $\theta(0)=\theta_0$，角位置 $\theta(t)=(\pm vt/r)+\theta_0$. 而

$$y=r\sin\theta(t)=r\sin\left[\left(\pm\frac{vt}{r}+\theta_0\right)\right]=\pm r\sin\left(\frac{v}{r}t\pm\theta_0\right)$$

所以桶的投影做简谐运动，振幅为 $|\pm r|=r$，角频率为 $\omega=v/r$

14.17 一石块在直径为 0.8 m 的水平圆周上运动，频率为 30 r/min. 远处射来的光束将此石块投影到附近墙壁上，求投影运动的振幅、频率及周期.

解 ☞ 振幅即为圆半径 $R=\frac{0.8\text{ m}}{2}=0.4$ m，投影的频率与周期和圆周运动相同，所以

$\omega=30$ r/min $=0.5$ r/s $=\pi$ rad/s, $\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}=0.5$(Hz), $T=\frac{1}{\nu}=2$s

14.18 一球以恒定角速度 20 r/min 沿直径为 0.15 m 的圆周运动，它的投影在后面墙壁上作

简谐运动，求投影的加速度与速度.(a)在最大位移处，(b)在平衡位置处，(c)离平衡位置 6 cm 的一点处.

解 ☞ 解法与 14.17 相同，$R=0.075$ m；$\omega=\frac{20}{60}\times 2\pi=\frac{2\pi}{3}$ rad/s 根据简谐运动一般公式：

(a) $a=a_{max}=\omega^2R=\frac{4\pi^2}{9}\times 0.075=0.329(\mathrm{m/s^2})$, $v=0$

(b) $a=0$, $v=\omega R=\frac{2\pi}{3}\times 0.075=0.157(\mathrm{m/s})$

(c) $|a|=\omega^2y=\frac{4\pi^2}{9}\times(0.06)=0.263(\mathrm{m/s^2})$

$|v|=\omega\sqrt{(A^2-y^2)}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{(0.075)^2-(0.06)^2}=\frac{2\pi}{3}\times 0.045=0.0942(\mathrm{m/s})$

14.19 质量为 2 kg 的物体悬挂在劲度系数为 $k=800$ N/m 的弹簧上，将物体拉离平衡位置 20 cm 后释放.(a)求振幅、角频率、运动周期，(b)求物体偏离平衡位置 12 cm 时的速度和加速度.

解 ☞ (a)因为物体从 20 cm 处释放 $A=20$ cm，故角频率 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{800\ \mathrm{N/m}}{2\ \mathrm{kg}}}=20$ rad/s.
(b)$a=-\omega^2y$. 位于平衡位置下 $y=12$ cm 时，$a=-4800\ \mathrm{cm/s^2}$，方向向下；位于平衡位置上 $y=-12$ cm 时，$a=4800\ \mathrm{cm/s^2}$，方向向上. 为求出速度用 $v=\pm\omega\sqrt{A^2-y^2}$，对于两不同位置，均有两个速度 $v=\pm 320$ cm/s，方向一个向上，一个向下.

14.20 上题中的物体将在何时到达平衡位置下方 10 cm 处.

解 ☞ 设释放时刻 $t=0$，此时物体位于最大振幅处，得到 $y=A\cos\omega t$，令 $y=10$ cm. 将 $A=20$ cm，$\omega=20$rad/s 代入得 $\cos(20t)=\frac{1}{2}$ 或 $\omega t=60°\times 2\pi\mathrm{rad}/360°=\frac{\pi}{3}$ rad. 求出最短时间 t，得 $t=\frac{\pi}{60}$s.

14.21 质量为 4 kg 的物体悬挂在劲度系数 $k=400$ N/m 的弹簧上，将物体拉离平衡位置 15 cm 处并释放.(a)求振幅、频率和运动周期，(b)求位于平衡位置上 10 cm 时物体的动能.

解 ☞ (a)$A=0.15$ m，$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=10$ rad/s

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{5}{\pi}\ \mathrm{Hz},\quad T=\frac{1}{f}=\frac{\pi}{5}\ \mathrm{s}$$

(b)$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2==\frac{1}{2}kA^2$ （机械能守恒）

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)=2.5\ \mathrm{J}$$

14.22 根据题 14.21，物体从距离平衡位置下 12 cm 处运动到距离平衡位置上 9 cm 处需多少时间？

解 ☞ 这个问题能用图 14-3 的参考圆解决. 物体的运动可以用一粒子在半径为 15 cm 的圆周上运动时，其投影在竖直直径上的运动来模拟. a 点为圆周上投影为 $y=12$ cm 的一点；b 点为投影为 $y=-9$ cm 的一点. 因为 $12=15\cos 37°$；$9=15\cos 53°$，角度如上所示. 从 $a\to b$ 的运动方程中，粒子扫过 90°，若用 t_{ab}表示所需时间，$\omega t_{ab}=(90°)\times 2\pi\ \mathrm{rad}/360°=\pi/2$ rad；$t_{ab}=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{1}{4}(2\pi/\omega)=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{20}$s.（或者直接根据 90°等于$\frac{1}{4}$圆周，所以 $t_{ab}=\frac{1}{4}T$），当然 t_{ab}也代表投影从平衡位置下 12 cm 到平衡位置上 9 cm 时所需的时间.

14.23 质量为 36 g 的物体作振幅为 13 cm，周期 $T=12$ s 的简谐运动. 在 $t=0$ 时，位移 $x=+13$ cm.(a)求 $x=5$ cm 处时，物体的速度，(b)求 $t=2$ s 时物体所受的力.

解 ☞ (a)$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$，$A=13$ cm，$x=5$ cm，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$rad/s；

$$v=\pm 2\pi\ \mathrm{cm/s}=\pm 6.28\ \mathrm{cm/s}$$

(b)$t=0$ 时，$x=A$，所以 $x=A\cos\omega t$，$t=2$ s 时

$$x = (13 \text{ cm}) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6.5 \text{ cm}$$

因为 $F = ma, a = -\omega^2 x$

所以 $F = -36 \text{ g} \times \left(\frac{\pi}{6} \text{ rad/s}\right)^2 \times 6.5 \text{ cm} = -64\text{dyn}^*$

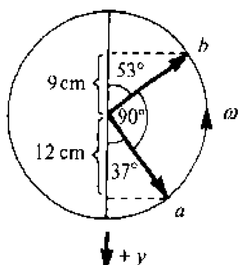


图 14-3

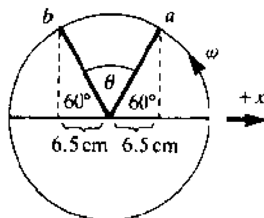


图 14-4

14.24 根据题 14.23,求从 $x = \pm 6.5$ cm 到 $x = -6.5$ cm 所需的最短时间.

解 ☞ 根据题 14.22 的推理,我们可以考察粒子以 $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/s 在半径为 13 cm 的圆周上运动时投影在水平直径上的运动(如图 14-4).我们所关注的时间 t_{ab} 是粒子扫过 θ 角,此处 $\theta = 60°$ 时所需的时间,因为这正好是$\frac{1}{6}$个圆周. $t_{ab} = \frac{T}{6} = 2$ s.(注意 14.23(b)中,从 $x = 13$ cm 到 $x = 6.5$cm 所需时间 2 s;从 $x = 13$ cm 到 $x = 0$ 是$\frac{3}{4}T = 3$ s,相减得到从 $x = 6.5$ cm 到 $x = 0$ 需1 s.由对称得从 $x = 6.5$ cm 到 $x = -6.5$ cm 时间应为 2 倍,为 2 s,与参考圆所得结果相同)

14.25 100 g 的物体悬挂在弹簧下,拉离平衡位置 10 cm 后释放,它以 2 s 为周期振动.(a)求它经过平衡位置时的速度,(b)当它在平衡位置上方 5 cm 时加速度多大?

解 ☞ (a)在平衡位置处 $v = v_{max} = \omega A$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s, $A = 10$ cm,所以 $v_{max} = 10\pi$ cm/s.(b)加速度 $a = -\omega^2 x$,设位于平衡位置下方时取正,则 $x = -5$ cm,所以 $a = 5\pi^2 \text{cm/s}^2$.注意到质量与 a 无关.

14.26 题 14.25 中的物体在向上运动过程中,从离平衡位置下方 5 cm 处运动到离平衡位置上方 5 cm 处,求此过程所需要的时间.

解 ☞ 若体系从 $t = 0$ 时释放,运动方程为 $y = A\cos\omega t = (10 \text{ cm})\cos \pi t$.我们关心的是从 $y_1 = +5$ cm到 $y_2 = -5$ cm 所需的时间.

$$5 = 10 \cos \pi t_1, \quad \pi t_1 = 60°\left(\frac{2\pi\text{rad}}{360°}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad t_1 = \frac{1}{3}\text{s}$$

$$-5 = 10 \cos \pi t_2, \quad \pi t_2 = 120°\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right) = \frac{2\pi}{3}\text{rad}, \quad t_2 = \frac{2}{3}\text{s}$$

所需时间 $t = t_2 - t_1 = \frac{1}{3}$ s.同样,我们注意到参考圆中相关点(题 12.24)扫过角度为 $120° - 60° = 60° = \frac{1}{6}$圆周.因此所需时间为$\frac{1}{6}T = \frac{1}{3}$s.

14.27 求图 14-5 所示的运动的振幅、周期、频率.

解 ☞ 振幅是离平衡位置的最大位移,因此为 0.75 cm.周期是运动一周所需时间.如从 $A \to B$,因此 $T = 0.2$ s.频率 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.20 \text{ s}} = 5$ Hz.

14.28 求图 14-6 所代表振动的(a)振幅,(b)频率,(c)周期,(d)写出公式 $y = y_0 \sin(2\pi ft + \theta_0)$的数字表达式.

解 ☞ (a)振幅为 4.0 cm;(b)运动一周用 1.2 s,所以 $f = \frac{1}{1.2} = 0.83$ (Hz);(c)$T = 1.2$ s;(d)初始位置处角度为$\frac{\pi}{2}$, $t = 0$ 时, $y = y_0$,所以, $y = 4.0\sin\left(5.2t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm.

---

* 1 dyn = 10^{-5}N

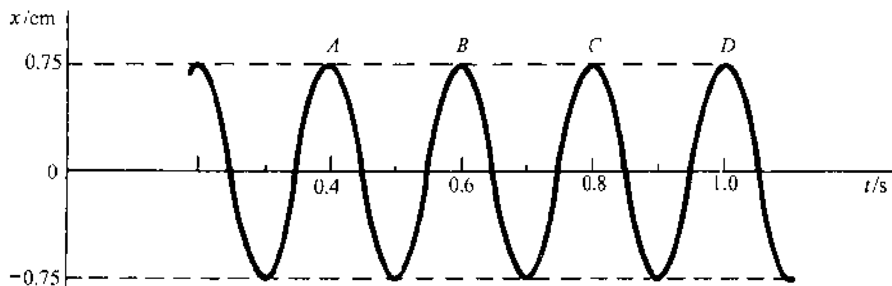
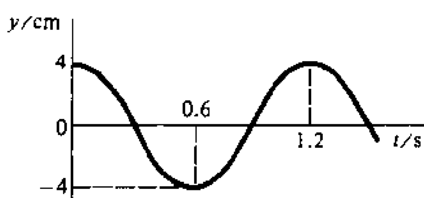


图 14-5



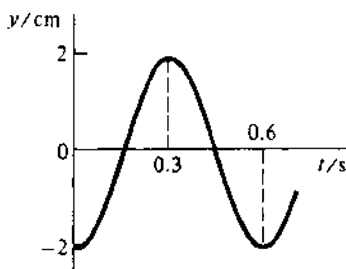


图 14-6　　　　图 14-7

14.29 根据图 14-7,重解题 14.28.

解 ☞

(a) y_0 为振幅,等于 2.0 cm;(b) $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.6}=1.67$(Hz);(c) $T=0.6$ s;(d) $y=2.0\sin\left(10.5t-\frac{\pi}{2}\right)$ ($y(0)=-2.0$ cm).

14.30 挂在一弹簧底端的物体的运动方程为 $y=0.30\cos 0.50t$(m),求位移、速度、加速度,(a) $t=0$ 时刻,(b) $t=3.0$ s 时刻.

解 ☞ $v=\frac{dy}{dt}=-0.15\sin(0.50t)$(m/s), $a=\frac{dv}{dt}=-0.075\cos(0.50t)$(m/s^2)

所以(a) $y=0.30$ m, $v=0$, $a=-0.075$ m/s^2. (b) $t=3.0$ s 时

$$y=0.021\ \text{m},\quad v=-0.150\ \text{m/s},\quad a=-0.0053\ \text{m/s}^2$$

14.31 系于弹簧底部的粒子作简谐运动,其最大加速度为 18 m/s^2,最大速度为 3 m/s,求(a)粒子运动的频率,(b)振幅.

解 ☞ (a)粒子的运动方程为 $x=x_0\cos(\omega t+\theta_0)$,对 x 求导得到速度、加速度.

$$\dot{x}=-x_0\omega\sin(\omega t+\theta_0),\quad \ddot{x}=-x_0\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$\dot{x}_{max}=x_0\omega,\quad \ddot{x}_{max}=x_0\omega^2$$

所以

$$\omega=\ddot{x}_{max}/\dot{x}_{max},\ f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\ddot{x}_{max}}{2\pi\dot{x}_{max}}=\frac{18}{2\pi\times 3}=0.95(\text{Hz})$$

(b) $x_0=\frac{\dot{x}_{max}}{\omega}=\frac{3}{6}=0.5$ m

14.32 某一振动遵从等式 $y=1.60\sin(1.30t-0.75)$(cm).其中 t 以 s 为单位,角度以弧度为单位.在 $t=0$ 时刻,求(a)位移,(b)速度,(c)加速度,(d)求 $t=0.60$ s 时各量的值.

解 ☞ 速度 $v=\frac{dy}{dt}=1.60\times1.30\cos(1.30t-0.75)$ (cm/s)

$$a=\frac{dv}{dt}=-1.60\times(1.30)^2\sin(1.30t-0.75)\ (\text{cm/s}^2)=-(1.30)^2y$$

$t=0$ 时,(a) $y=1.60\sin(-0.75)=-1.60\sin 43^\circ\approx-1.09(\text{cm})$

(b) $v=2.08\cos(-43^\circ)=1.52\ (\text{cm/s})$

(c) $a=-(1.30)^2\times(-1.09)=1.84(\text{cm/s}^2)$

(d) $t=0.60$ s 时,

$$y=1.60\sin0.03\doteq1.60\times0.03=0.048(\text{cm})$$
$$v=2.08\cos0.03\doteq2.08(\text{cm/s})$$
$$a=-(1.30^2)\times0.048=-0.081(\text{cm/s}^2)$$

14.33 已知某物体运动方程为 $x=0.20\sin(3.0t)$m,求此物体偏离平衡位置 5 cm 时的速度、加速度;再求 $x=0$ 时各量的值.

解 ☞ $v=\dfrac{dx}{dt}=0.60\cos 3.0t,\ a=\dfrac{dv}{dt}=-1.8\sin 3.0t$

$$x=0.05,\quad \sin 3.0t=\frac{0.05}{0.2}=0.25,\quad 3.0t=14.5^\circ$$

将此值代入 v、a 表达式得 $v=0.58$ m/s; $a=-0.45$ m/s^2.

$x=0$ 时,得 $v=0.60$ m/s, $a=0$

14.34 一物体作频率为 5.00 Hz 的简谐运动. 在 $t=0$ 时刻位移为 $x(0)=10.0$ cm, 速度 $v(0)=-314$ cm/s. (a)写出物体位移表达式 $x(t)$, 速度表达式 $v(t)$, 加速度表达式 $a(t)$, (b)求位移, 速度, 加速度的最大值.

解 ☞ (a)写出表达式通式 $x(t)=A\cos(2\pi\nu t+\delta)$, 则 $v(t)=-2\pi\nu A\sin(2\pi\nu t+\delta)$

因此 $x(0)=A\cos\delta$, $v(0)=-2\pi\nu A\sin\delta$

求出 $A=\dfrac{\sqrt{[2\pi\nu x(0)]^2+[v(0)]^2}}{2\pi\nu}$, $\delta=\arctan\left[\dfrac{-v(0)}{2\pi\nu x(0)}\right]$

将已知值代入得

$$A=\frac{\sqrt{[(2\pi)\times5\times10]^2+[(-2\pi)(50)]^2}}{2\pi\times5}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}=14.1(\text{cm})$$

$$\delta=\arctan\left[\frac{314}{2\pi\times5\times10}\right]=\frac{\pi}{4}\text{rad}$$

根据初始条件, $\sin\delta$、$\cos\delta$ 都为正值, 因此

位移公式 $x(t)=(14.1\ \text{cm})\left[\cos\left(10\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

速度公式 $v(t)=-(100\pi\sqrt{2}\text{cm/s})\left[\sin\left(10\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

加速度公式 $a(t)=-(1000\pi^2\sqrt{2}\text{cm/s}^2)\left[\cos\left(10\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

(b) $x_{max}=10\sqrt{2}=14.1(\text{cm})$, $v_{max}=100\pi\sqrt{2}=444(\text{cm/s})$, $a_{max}=1000\pi\sqrt{2}=1.4\times10^9(\text{cm/s}^2)$

14.35 一物体作简谐运动, 振幅为 2.00 cm, 频率为 3.00 Hz. 在 $t=0$ 时刻, 位移 $x(0)=0$ cm, 速度 $v(0)$为正值. (a)求出位移表达式 $x(t)$, 速度表达式 $v(t)$, 加速度表达式 $a(t)$, (b)计算 $t=50$ ms 时刻上述各量的值.

解 ☞ (a)利用 $x(t)=A\cos(2\pi\nu t+\delta)$得到,

$$v(t)=-2\pi\nu A\sin(2\pi\nu t+\delta)$$

因为 $x(0)=0$ 得到 $\delta=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$, 又因为 $v(0)>0$, 故 $\delta=\dfrac{3\pi}{2}$, 根据已知值 $A=2.00$ cm, $\nu=3.00$ Hz, 得

$$x(t)=(2.00\ \text{cm})\cos\left(6.00\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$v(t)=(-12.0\ \pi\ \text{cm/s})\sin\left(6.00\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$a(t)=(-72.0\pi^2\ \text{cm/s}^2)\cos\left(6.00\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$$

(b)在 $t=0.050$ s 时刻, $6.00\pi t+\dfrac{3\pi}{2}=1.80\pi=5.65$ rad

因此, $x=(2.00\ \text{cm})\cos(1.80\pi)=1.62$ cm

$$v=(-12.0\ \pi\text{cm/s})\sin(1.80\pi)=22.2\ \text{cm/s}$$
$$a=(-72.0\pi^2\text{cm/s}^2)\cos(1.80\pi)=-575\ \text{cm/s}^2$$

14.36 质量为 0.2 kg 的物体悬挂在弹簧上并一起做简谐运动，周期 $T=3$ s，振幅 R 为 10 cm. 在 $t=0$ 时刻，物体向上经过平衡位置. (a)求弹簧的劲度系数 k，(b)求 $t=1$ 秒时的位移、速度、加速度.

解 ☞ (a)$4\pi^2\nu^2=\frac{k}{m}$，$k=4\pi^2\nu^2m=\left(\frac{4\pi^2}{9}\right)\times0.2=0.88(\text{N/m})$

(b)选向上为正方向

$y=R\sin2\pi\nu t$ 因此 $t=0$ 时 $y=0$，$v>0$，在 $t=1$ s 时

$y=R\sin2\pi\nu t=0.10\sin\left[\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times1\right]=0.1\sin120°=0.0866(\text{m})$

$v=2\pi\nu R\cos2\pi\nu t=\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times(0.1)\cos120°=-0.105(\text{m/s})$

$a=-4\pi^2\nu^2R\sin2\pi\nu t=-\left(\frac{4\pi^2}{9}\right)\times(0.10)\sin120°=-0.38(\text{m/s}^2)$

14.37 参见题 14.36，验证弹性势能与动能之和等于$\frac{1}{2}kR^2$.

解 ☞ $\frac{1}{2}kR^2\overset{?}{=}\frac{1}{2}ky^2+\frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{1}{2}(0.88)(0.1)^2\overset{?}{=}\frac{1}{2}(0.88)(0.0866)^2+\frac{1}{2}(0.2)(0.105)^2$$
$$4.4\times10^{-3}\text{J}=(3.3\times10^{-3}+1.1\times10^{-3})\text{J}$$

14.38 质量为 50 g 的物体在弹簧下端做简谐运动，振幅为 12 cm，周期为 1.70 s. 求(a)频率，(b)劲度系数，(c)物体的最大速度，(d)物体的最大加速度，(e)位移为 6 cm 时的速度，(f)$x=6$ cm 时的加速度.

解 ☞ (a)$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1.70\text{s}}=0.588$ Hz

(b)因为 $T=2\pi\sqrt{m/k}$

所以 $k=\frac{4\pi^2m}{T^2}=\frac{4\pi^2(0.050\ \text{kg})}{(1.70\ \text{s})^2}=0.68$ N/m

(c)$v_0=x_0\sqrt{\frac{k}{m}}=(0.12\ \text{m})\sqrt{(0.68\ \text{N/m})/(0.050\ \text{kg})}=0.44$ m/s

(d)从 $a=-(k/m)x$ 看，当 x 取最大值时 a 也取到最大值，因此在 $x=\pm x_0$ 处

$$a_0=\frac{k}{m}x_0=\frac{0.68\text{N/m}}{0.050\ \text{kg}}(0.12\ \text{m})=1.63\ \text{m/s}^2$$

(e)$|v|=\sqrt{(x_0^2-x^2)(k/m)}$

$$|v|=\sqrt{(0.12^2-0.06^2)\frac{0.68}{0.050}}=0.38(\text{m/s})$$

(f)$a=-\frac{k}{m}x=-\frac{0.68\ \text{N/m}}{0.050\ \text{kg}}(0.06\ \text{m})=-0.82\ \text{m/s}^2$

14.39 一弹簧振子总能量为 E_0，振幅为 x_0. (a)当 $x=\frac{1}{2}x_0$ 时，K 和 U 分别为多少？(b)x 取何值时 $K=U$？

解 ☞ (a)总能量 $E_0=U+K$ 或写成$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kx^2+K$，当 $x=\frac{1}{2}x_0$ 时

$$U=\frac{1}{8}kx_0^2=\frac{1}{4}E_0, K=E_0-U=\frac{3}{4}E_0$$

(b)$U=K$，$U=\frac{1}{2}E_0=\frac{1}{4}kx_0^2=\frac{1}{2}kx^2$，因此 $x=x_0/\sqrt{2}$.

14.40 火箭发射器的反冲能量被质量 $m=4536$ kg 的反冲弹簧吸收，装上一个撞击垫后，发射器在反冲后能无振动地返回点火位置(临界阻尼). 若发射器以 10 m/s 的初速度反冲了 3 m，求反冲弹簧的劲度系数和撞击垫的临界阻尼系数($b=2\sqrt{mk}$)

解 ☞ 为求解弹簧劲度系数，我们可以用能量守恒定律 $K+U=$常数

$\frac{1}{2}mv_0^2+0=0+\frac{1}{2}kx_{\max}^2$，　$k=\frac{mv_0^2}{x_{\max}^2}=\frac{(4536)(10^2)}{3^2}=50.4(\mathrm{kN/m})$

临界阻尼系数为 $b=2\sqrt{mk}=2\sqrt{(4536)(50400)}=30.24(\mathrm{kN\cdot s/m})$

14.41　质量为 m 的物体悬挂在劲度系数为 k 的轻质弹簧上.证明弹簧的势能与物体的重力势能之和可表达为 $\frac{1}{2}ky^2$，其中 y 指偏离平衡位置的距离(比较题 14.10).

解　☞ 选择弹簧原长时与挂重物后平衡位置的中点处为重力零势能面.(见图 14-8)，则总势能写为

$$U=\frac{1}{2}k(h+y)^2-mg\left(\frac{h}{2}+y\right)$$

但在平衡位置处有 $mg=kh$，所以

$$U=\frac{1}{2}k(h^2+2hy+y^2)-kh\left(\frac{h}{2}+y\right)=\frac{1}{2}ky^2$$

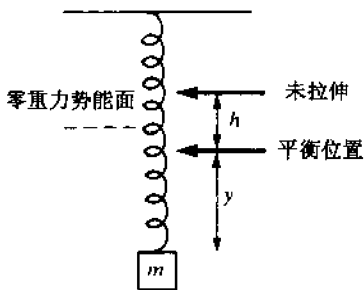


图 14-8



图 14-9

14.42　图 14-9 中两物体在光滑桌面上滑动.因为零势能面的选择对势能 U 来说只差一个常数，可以不计，我们的结果具有普遍性. m_1 固定在弹簧上，m_2 自由运动.如果将 m_1 和 m_2 推至左边使弹簧有压缩量 d，放手后 m_1 的振幅为多少?

解　☞ 放手后 m_2 将被弹出.弹簧的势能等于物体动能最大值，即 $\frac{1}{2}(kd^2)=(m_1+m_2)\left(\frac{v^2}{2}\right)$，得到 $v^2=(kd^2)/(m_1+m_2)$.弹簧上只有 m_1 时，能量守恒方程变为弹性势能等于 m_1 的动能最大值.因此 $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m_1v^2=\frac{1}{2}kd^2\frac{m_1}{m_1+m_2}$，得到 $A=d\sqrt{\frac{m_1}{m_1-m_2}}$，注意到振幅与 k 值无关.

14.2　单摆及其他装置的简谐运动

14.43　求周期为 2.4 s 的单摆的长度.

解　☞ $T=2\pi\sqrt{l/g}$，$(2.4)^2=4\pi^2(l/9.8)$，$l=1.43$ m

14.44　长度为 35.90 cm 的单摆周期 $T=1.200$ s，求当地的 g.

解　☞ $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，$T^2=4\pi^2\frac{l}{g}$，$g=4\pi^2\left(\frac{l}{T^2}\right)=984\ \mathrm{cm/s^2}$

14.45　把一在地球上走得很准的钟摆搬到月球，月球上的物重是地球上物重的 1/6，则标准的 1 分钟对此钟摆来说等于多少秒?

解　☞ 因为 $2\pi f=(g/l)^{1/2}$，月球上的频率是地球上的 $1/\sqrt{6}=0.408$ 倍，则钟摆显示出的时间为 $0.408(60)=24.5(\mathrm{s})$

14.46　长为 60 cm 的单摆下挂 200 g 的球，将摆拉出 15°后放手.若时钟在球经过最低点时报时，写出摆角 θ 满足的运动方程.

解　☞ 振幅为 15°，因为 $2\pi f=(g/l)^{1/2}$，即 $2\pi f=4.04/\mathrm{s}$

$t=0$ 时 $\theta=0$(用正弦函数表示).因此：$\theta=15\sin 4.04t$.

14.47 如图 14-10 所示，在均匀杠的中心处系一细绳后将杆水平悬挂，在杆上加一 5N·m 的力矩使杆转过 12°. 松手后，杆做周期为 0.5 s 的扭摆运动，求转动惯量.

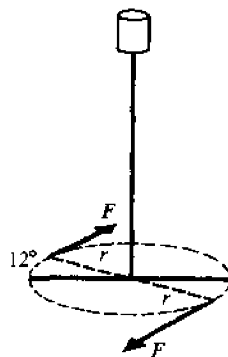


图 14-10

解 ☞ 对于扭摆，$T=2\pi\sqrt{I/\kappa}$，此例中，扭摆常数 $\kappa=\dfrac{\text{外力矩}}{\text{角位移}}=\dfrac{5\text{N}\cdot\text{m}}{12°\cdot\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{360°}}=23.9\ \text{N}\cdot\text{m/rad}$，代入周期公式整理得

$$I=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\kappa=\left(\frac{0.5\ \text{s}}{2\pi}\right)^2(23.9\ \text{N}\cdot\text{m})=0.151\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

14.48 一个质量 400 g，半径为 8.0 cm 的均匀球悬挂在长 20 ft 的摆线下构成一扭摆，在摆线上作用一 40 N·m 的力矩后摆线转过 90°，求这个扭摆运动周期.

解 ☞ 已知 $2\pi f=(\kappa/I)^{1/2}$，$\tau=-\kappa\theta$，得到 $\kappa=\dfrac{0.40}{0.5\pi}=0.25$

$$I=\frac{2mr^2}{5}=1.02\times10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

所以 $T=\dfrac{1}{f}=0.40$ s(与扭摆长度无关)

14.49 将一刻度尺悬挂起来做成一复摆，转轴在 90 cm 处，求摆动频率. 若转轴位于 50.10 cm 处，结果如何?

解 ☞ 对一复摆，$2\pi f=[(MgL)/I]^{1/2}$，其中 L 是旋转轴线到质心的距离；I 是对转轴的转动惯量，M 为质量. 此题中，$L=0.40$ m，由平行轴定理得 $I=I_c+M(0.40)^2$，$I_c=[M(1.0)^2]/12$，所以 $I=0.243M$，$f=0.64$ Hz. 同理，对于 $L=0.0010$ m，$I=0.0833M$，$f=0.055$Hz.

14.50 如图 14-11 所示，一半径为 R，质量为 M 的圆盘固定在一长L，质量为 m 的硬质杆底部，当盘如图中所示悬挂在支点上时求它的运动周期.

解 ☞ 运动方程为 $\tau=I\alpha$，其中 τ 代表外力矩，I 代表转动惯量，α 代表角加速度. τ 和 I 都是相对支点而言的.

对硬质杆 $\tau=-mg\left(\dfrac{L}{2}\right)\sin\theta$；对圆盘 $\tau=-Mg(R+L)\sin\theta$，θ 为与竖直方向的微小角位移.

$$I=I_{\text{rod}}+I_{\text{disk}}=[(mL^2)/3]+[(MR^2)/2-M(R+L)^2]$$

对微小角 θ，$\sin\theta\doteq\theta$，所以运动方程可写为

$$-g[MR-ML+(mL)/2]\theta$$
$$-[(mL^2)/3+(MR^2)/2+MR^2+2MRL+ML^2]\alpha$$

解出 α 并注意到$(2\pi f)^2=(2\pi/T)^2$ 是 θ 项的系数. 我们有

$$T^2=[(2\pi)^2/g][(mL^2)/3+(3MR^2)/2$$
$$+2MRL+ML^2]/[MR+ML+(ML)/2]$$

令 $a\equiv m/M$，$b=R/L$，得周期为

$$T=2\pi(L/g)^{1/2}[a/3+b^2/2+(1+b)^2]^{1/2}[1+b+(a/2)]^{1/2}$$

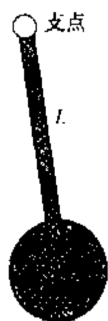


图 14-11

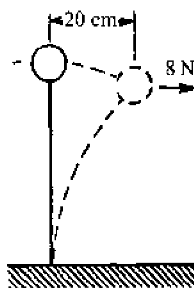


图 14-12

14.51 如图 14-12 所示,一轻质长弹性钢丝底端固定,上端紧扣一质量为 2 kg 的球,作用一个 8 N 的力使小球偏离平衡位置 20 cm,设放手后球做简谐运动.求(a)弹簧的劲度系数,(b)小球来回运动的周期.

解 ☞ (a)$k=\frac{外力\ F}{位移}=\frac{8\ \text{N}}{0.2\ \text{m}}=40\ \text{N/m}$

(b)$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2\ \text{kg}}{40\ \text{N/m}}}=1.40\ \text{s}$

14.52 一长方体木块浮在水面上,根据阿基米德定律可知,水对下底面有一个向上的力,最大值为 $Ad\rho g$. A 是底面积,d 是在水面下的深度,ρ 是水密度,g 是重力加速度.(a)木块质量为 m,求木块在平衡位置时 d 的值,(b)求木块在任意 d 值处所受合力的表达式.根据这个表达式,证明平衡位置是稳定的,(c)证明:如果木块压到平衡位置下(不浸没)后放手,木块将做简谐运动,(d)求振动周期.

解 ☞ (a)用 d_0 标记平衡位置处的深度.在平衡位置处,浮力 $Ad_0\rho g$ 与重力 mg 平衡,即 $Ad_0\rho g=mg$ 或 $d_0=\frac{m}{\rho A}$.

(b)取向下为正方向,合力 $F=-\rho Agd+mg=-\rho Ag(d-d_0)$,从这个等式可得木块有向下的位移($d>d_0$)时,合力向上($F<0$).若木块有向下位移($d<d_0$),合力向下($F>0$).因此平衡位置是稳定的.

(c)假设水流运动可忽略不计,则 $ma_y=-\rho Ag(d-d_0)=-\rho Agy$, $y=d-d_0$.于是 $a_y=-(\rho Ag/m)y$,满足简谐运动公式.

(d)参考以前公式,我们可以得到 $\omega=\sqrt{\rho Ag/m}$,所以频率 $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\rho Ag/m}$

14.53 如图 14-13 所示将 9 kg 的水银注入 U 形管,U 形管内直径为 1.2 cm.水银在平衡位置附近作振动,计算(a)振动的等效劲度系数,(b)振动周期.1 m^3 水银质量 $\mu=13600$ kg,不考虑摩擦力和表面张力作用.

解 ☞ (a)当水银离平衡位置有 x 的位移时,回复力即为处于非平衡状态的高为 $2x$ 的水银柱的重力,应有

$$重力=体积\times单位体积水银重力=[(\pi r^2)(2x)]\mu g$$

根据胡克定律得 $F=-(2\pi r^2\mu g)x$,可以看出有效劲度系数为 $k=2\pi r^2\mu g=2\pi(0.006\ \text{m})^2(13.6\times10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)=30\ \text{N/m}$

(b)振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{9\ \text{kg}}{30\ \text{N/m}}}=3.4\ \text{s}$

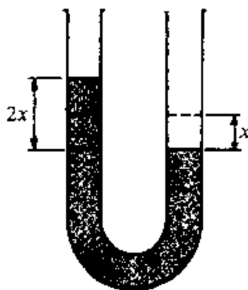


图 14-13

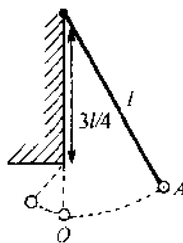


图 14-14

14.54 在月球表面运送宇航员的车子上有一弹簧悬架,此悬架在地球上时振动频率为 0.4 Hz,求它在月球上时的振动频率(月球上的物重为地球上的 1/6).

解 ☞ 劲度系数、质量和所处位置无关,所以 $\omega=2\pi f=(k/m)^{1/2}$也与所处位置无关.因为弹簧的振动频率与所加的初始力无关,则因重力改变引起的初始伸长与频率也无关.所以,$f=0.4$ Hz.

14.55 单摆做周期为 T 的微小摆动,一障碍物位于支点下方,故在通过平衡位置向左摆动时,只有 1/4 的摆绳能随摆球继续左摆(图 14-14).单摆从某一点处自由释放,需多长

时间摆球回到该点处.在解题时,可以假设摆绳与竖直方向夹角很小.

解 ☞ 当摆球处于平衡点 O 左边时,障碍物相当于支点,单摆长度变为 $l'=\frac{l}{4}$;当摆球处于平衡点 O 右边时,摆长为 l.如果摆球从 A 处释放,它将经历半个周期摆长为 l 的运动,半个周期摆长为 $\frac{l}{4}$ 的运动,所需时间为:$\frac{1}{2}(2\pi\sqrt{l/g})+\frac{1}{2}(2\pi\sqrt{l/4g})$.因为周期 $T=2\pi\sqrt{l/g}$,所需时间即为 $\frac{T}{2}+\frac{T}{4}=\frac{3}{4}T$.

14.56 弹簧 A 和 B 的劲度系数分别为 2000 N/m 和 1000 N/m.弹簧 A 挂在水平硬质杆上,另一端与弹簧 B 连接.然后用这对弹簧吊起质量为 50 kg 的物体,求此系统作简谐运动的周期.

解 ☞ 弹簧自重忽略不计,在拉力 F 作用下,复合弹簧的伸长 $x=x_A+x_B$.其中 $x_A=F/k_A$,$x_B=F/k_B$,因此 $x=\frac{F}{k_A}+\frac{F}{k_B}=F\left(\frac{k_A+k_B}{k_Ak_B}\right)=\frac{F}{k_{\text{eff}}}$,若等效于一根弹簧,此弹簧劲度系数为 $k_{\text{eff}}=\frac{k_Ak_B}{k_A+k_B}$.

振动周期 $T=2\pi\sqrt{m/k_{\text{eff}}}$,根据已知值得 $k_{\text{eff}}=\frac{(2000)(1000)}{3000}=\frac{2000}{3}$(N/m),因此 50 kg 物体的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{(50)(3)}{2000}}=2\pi\sqrt{0.075}=1.72$ s.

14.57 一物体悬挂在弹簧下端作简谐运动,周期为 T.现将弹簧等分成两段,如图 14-15.证明:新弹簧振动周期变为 $\frac{T}{2}$.

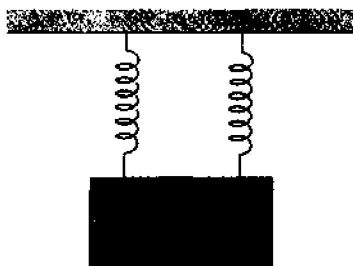


图 14-15

解 ☞ 设原弹簧劲度系数为 k,将弹簧等分成两段后每一段的劲度系数为 $k'=2k$(在外力作用下,每段弹簧伸长值等于原弹簧伸长量的一半).当两段弹簧并联吊住物体,每段弹簧都对物体作用一回复力.因此,物体相当于被一劲度系数为 $k''=2k'=4k$ 的弹簧挂住,物体作简谐运动的周期 $T''=2\pi\sqrt{m/k''}=2\pi\sqrt{m/4k}=(2\pi\sqrt{m/k})/2=\frac{T}{2}$.

14.58 两根劲度系数为 $k=20$ N/m 的完全相同的弹簧,质量为 0.3 kg 的物体如图14-16(a)、(b)与弹簧相连,求每个系统的运动周期(不计摩擦).

解 ☞ (a)考察物体位移 $x>0$ 时将如何运动.

此时一根弹簧伸长 x,另一根压缩 x,它们都对物体作用一大小为(20 N/m)x,方向与位移相反的作用力,因此总回复力为 $F=-(20\text{ N/m})x-(20\text{ N/m})x=-(40\text{ N/m})x$.比较 $F=-kx$,得到系统的劲度系数 $k=40$ N/m.所以,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.3\text{ kg}}{40\text{ N/m}}}=0.54\text{ s}$$

(b)当物体向下有 y 位移时,每根弹簧被下拉距离 y,物体所受回复力 $F=-(20\text{ N/m})y-(20\text{ N/m})y=-(40\text{ N/m})y$.比较 $F=-ky$,得 $k=40$ N/m,与(a)相同.因此周期也为 0.54 s.

14.59 如图 14-17 所示质量为 m,长为 L 的均质棒中心处为转轴,在图示平衡位置处两根相同的轻质弹簧均为原长.(a)证明:若将棒从图示位置转过一小角 θ_0 后释放,棒将做简谐运动.(b)求此简谐运动的频率.(c)当棒经过水平位置时,棒两端点处的速度多大?

解 ☞ 当杆绕过一小角 θ 时,每根弹簧被拉伸 $L\theta/2$,产生力矩等于 $(kL\theta)/2\times L/2$,两力矩方向

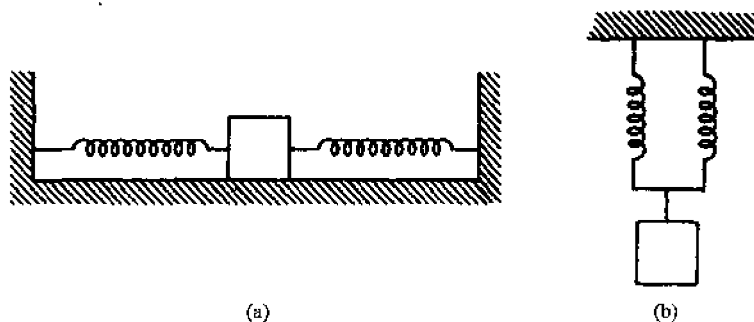


图 14-16

相同. 力矩公式为 $-2k\theta(L/2)\left(\frac{L}{2}\right)=I\alpha$, 其中 $I=mL^2/12$, 解得 $\alpha=-(6k/m)\theta$, 这正是频率为 $f=(\sqrt{6k/m})/2\pi$ 的简谐运动满足的方程. 解出 $\theta=\theta_0\cos2\pi ft$, 所以最大速度为 $(L/2)(2\pi f)\theta_0=L\theta_0(1.5k/m)^{1/2}$.

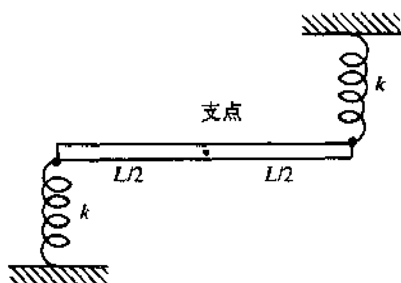


图 14-17

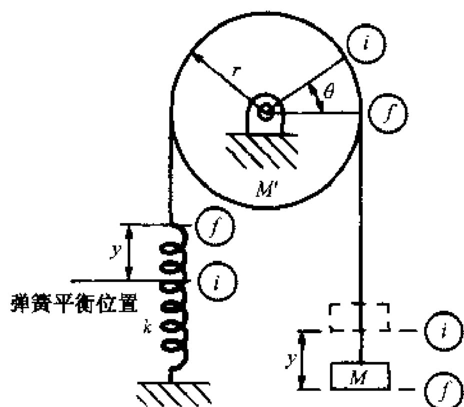


图 14-18

14.60 从能量的角度讨论图 14-18 所示装置的微小运动, 求出此系统的运动频率. 假设圆盘上绳子不打滑.

解 ☞ 根据题 14.41, 系统势能为 $U=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}kr^2\theta^2$, 比较 $U=\frac{1}{2}K\theta^2$, 可以看到此系统做扭摆运动, 扭转常数 $K=kr^2$, 因为此系统的转动惯量 $I=mr^2$, 其中 $m=M+\frac{1}{2}M'$, 立刻得到频率为 $\omega=\sqrt{\frac{K}{I}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$

14.61 判断图 14-19(a)所示的体系能否作竖直方向上的简谐运动, 如果可以, 求角频率 ω.

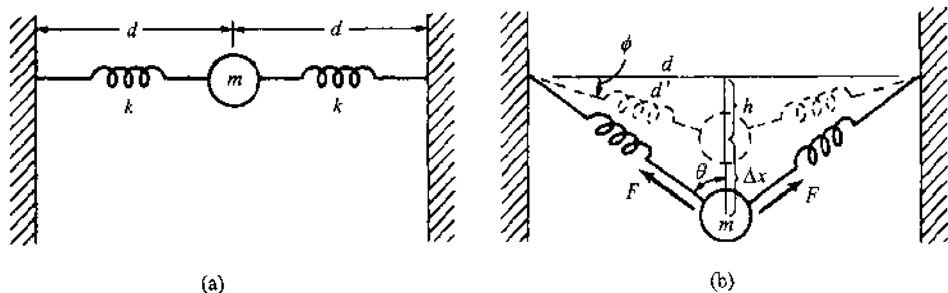


图 14-19

解 ☞ 判断简谐运动的标准是,回复力是否正比于物体离开平衡位置的位移.由于存在物重 mg,平衡状态如图 14-19(b)所示,弹簧伸长至 $d'=\sqrt{d^2+h^2}$.

如果物体 m 在平衡位置下有小位移 Δx,其中 Δx 与 h、d' 相比很小,弹簧上的力 $F=k\left(\sqrt{d^2+(h+\Delta x)^2}-d'\right)$,则物体上的回复力为

$$F_{res}=-2F\cos\theta=-2k\left(\sqrt{d^2+(h+\Delta x)^2}-d'\right)\frac{h+\Delta x}{\sqrt{d^2+(h+\Delta x)^2}}$$

$$=-2kh\left(1+\frac{\Delta x}{h}\right)\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{2h(\Delta x)+(\Delta x)^2}{d'^2}}}\right]$$

$$=-2kh\left(1+\frac{\Delta x}{h}\right)\left[\frac{1}{2}\,\frac{2h(\Delta x)+(\Delta x)^2}{d'^2}\right]$$

$$\doteq -2\frac{kh^2}{d'^2}(\Delta x)=-(2k\sin^2\phi)\Delta x$$

其中,我们用到了级数展开 $(1+u)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}u+\cdots$,只取微小量的一次项.

因此,简谐运动可以发生.弹簧的等效劲度系数,$k_{eff}=2k\sin^2\phi$,$\omega=\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}=\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\phi$.

14.62[c] 如图 14-20 所示的曲柄装置作微小振动,求体系的运动方程.(杆与阻尼器的质量忽略不计,阻尼器的阻力 F_D 正比于活塞的速度,即 $F_D=-bv$.)

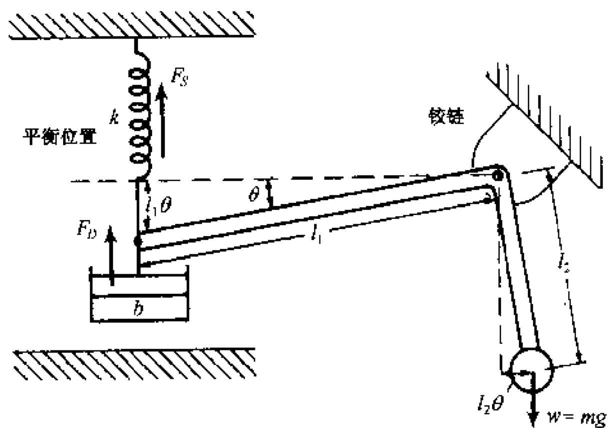


图 14-20

解 ☞ θ 很小时,铰链上三个力的力矩为

$$\tau_S=-F_Sl_1=-kl_1^2\theta,\ \tau_D=-F_Dl_1=-bl_1^2\dot\theta,\ \tau_w=-mgl_2\theta$$

铰链的转动惯量 $I=ml_2^2$,因此运动方程为

$$\sum\tau=I\ddot\theta$$

即 $-(kl_1^2+mgl_2)\theta-bl_1^2\dot\theta=ml_2^2\ddot\theta$.这个方程代表撞击角的简谐运动.

14.63[c] 如图 14-21 所示,质量 m 的珠子在光滑细线上滑动.P 点处细线形状可近似为一抛物线,P 点附近珠子的势能为 $U=cx^2$.其中 x 为距 P 的距离,c 为一常数.如果将珠子拿到 P 点附近并释放珠子将开始振动.利用 $F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$ 证明珠子做简谐运动,周期为 $2\pi\sqrt{m/2c}$.同理可推得,对于保守体系,如果振幅足够小,在势能曲线中的极小值附近物体将做简谐运动.

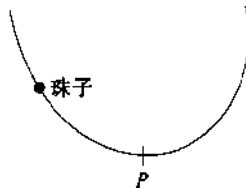


图 14-21

解 ☞ 因为 $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(cx^2) = -2cx$

体系的有效劲度系数 $k = 2c$，所以

$$T = 2\pi(m/2c)^{1/2}$$

第十五章　流体静力学

15.1　压强和密度

15.1　求一半径为 1.5 cm，质量为 0.038 kg 的固体球的比重.

解 ☞ 半径 1.5 cm $=1.5\times10^{-2}$ m

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(1.5\times10^{-2})^3=1.413\times10^{-5}(\mathrm{m}^3)$$

$$d=\frac{m}{V}=\frac{0.038}{1.413\times10^{-5}}=2690(\mathrm{kg/m^3})$$

$$比重=\frac{2690\ \mathrm{kg/m^3}}{1000\ \mathrm{kg/m^3}}=2.69$$

15.2　一比重瓶(用于测量密度的小烧瓶)空瓶称为 20.00 g，装满水后为 22.00 g，装满苯后为 21.76 g.(a)求苯的密度.(b)精确测量密度，要考虑空瓶时空气的质量，求出空瓶中空气的质量.

解 ☞ (a)装入水的质量为 2×10^{-3} kg，$\rho_水=1000\ \mathrm{kg/m^3}$，所以 $V=2\times10^{-6}\ \mathrm{m^3}$. 而相同体积的苯的质量为 1.76×10^{-3} kg，所以：$\rho_苯=\frac{质量}{体积}=\frac{1.76\times10^{-3}}{2\times10^{-6}}=880(\mathrm{kg/m^3})$

(b)空气密度为 1.29 kg/m^3，烧瓶体积为 $2\times10^{-6}\ \mathrm{m^3}$，则空气质量为 $\rho V=2.58\times10^{-6}$ kg.

15.3　水的重量密度为 62.5 lb/ft^3，一比重为 0.25 的软木塞在空气中称重为 4 lb，求这块软木塞的体积.

解 ☞ 比重 $=\frac{软木塞密度}{水的密度}$，即 $0.25=\frac{软木塞密度}{62.5}$，得软木塞密度

$d_W=15.6\ \mathrm{lb/ft^3}$

$W=d_WV$，$W=15.6\ V$，$V=0.26\ \mathrm{ft^3}$

15.4　液体不能承受剪切应力，如何解释自由液面将保持水平，即与重力方向垂直？

解 ☞ 如果液面不是水平，则表面液体的重力在平行于液面方向有一分力. 因为相邻液体间无剪切应力，所以这部分液体将会流动，直至液面水平.

15.5　火车餐车桌子上有一碗汤，若火车具有向前的加速度 $a=g/4$，汤的表面与水平方向夹角为多少？

解 ☞ 以火车车厢(或汤碗)为参照物，每个质量为 m 的物体均受一大小为 $ma=mg/4$ 的惯性力作用，方向与火车加速度方向相反. 重力有效值为合力 $m\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}}=m\boldsymbol{g}-m\boldsymbol{a}$. 当汤处于平衡状态时，汤表面一定与 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}}$ 的方向垂直(题 15.4)，如图 15-1 所示. 因此，汤表面与水平方向夹角 $\theta=\arctan\frac{1}{4}=14.0°$，指向火车尾部的液面较高.

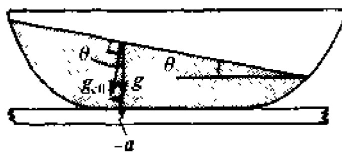


图 15-1

15.6　面积为 40 cm^2 的活塞将气体限制在容器中，如在活塞上施加一个 20N 的垂直作用力，求气体的压强.

解 ☞ 活塞处于平衡状态，所以气体对活塞的作用力也为 20N，则 $p=F/A=20\ \mathrm{N}/(40\times10^{-4}\ \mathrm{m^2})=5$ kPa

15.7　一个 80 kg 的圆柱高 2 m，底面积为 25 cm^2，垂直竖在地板上，求圆柱对地板的压强.

解 ☞ $p=\frac{F}{S}=\frac{(80\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{25\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}}=3.14\times10^5\ \mathrm{N/m^2}=314$ kPa

15.8 大气压强约为 100 kPa，房间内一块面积为 40 cm×80 cm 的窗户上受到的大气压力有多大？

解 ☞ 大气对置于其中的任何表面都将施加作用力，因此玻璃窗上受到的垂直作用力 $F = pA = (100\text{kN/m}^2)(0.40\times0.80\ \text{m}^2) = 32\ \text{kN}$

15.9 离水平面 10 km(33000 ft)高处的大气压强约为 210 mmHg*. 求在此高度飞行的飞机上一扇面积为 600 cm² 的窗户上所受到的合力.（假设飞机内压强为 760 mmHg，水银密度为 13600 kg/m³.）

解 ☞ 合力(方向指向窗外)为 $N_{out} - N_{in}$，即

$$\rho_{Hg}gh_1A - \rho_{Hg}gh_2A = (13600\ \text{kg/m}^3)(9.8\text{m/s}^2)(0.76\ \text{m} - 0.21\text{m})(0.06\ \text{m}^2)$$
$$= 4398\ \text{N}\quad（约为 1000 lbf）$$

15.10 如图 15-2 所示，压强计内有一根劲度系数为 $k = 60$ N/m 的弹簧，活塞面积为 0.5 cm²，活塞右端与一封闭容器相联，容器中气体压强为 30 kPa. 求弹簧在下列两种情况下的压缩量：(a)装弹簧的一端置于真空中；(b)装弹簧的一端置于大气中.

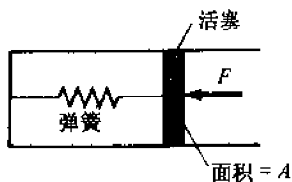


图 15-2

解 ☞ (a)活塞右端受到压强为(30 + 101)kPa，压力为$(131\times10^3\ \text{Pa})\times(0.50\times10^{-4}\ \text{m}^2) = 6.55$ N，除以 $k = 60$ N/m，得到压缩量为 10.9 cm.

(b)此种情况下，弹簧受的合力为容器中气体对活塞的压力，弹簧压缩量为 $3.0\times10^4(5\times10^{-5})/60 = 2.5(\text{cm})$

15.11 一气压计中水银柱的高度为 760 mm，求大气压(用帕斯卡做单位).

解 ☞ $p = \rho gh = (13.6\times10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.760\ \text{m}) = 1.013\times10^5\ \text{Pa}$

15.12 在底楼处水压计显示的压强为 270 kPa，则它能将水送到多高处？

解 ☞ 水压计显示出的是进入水管的水的压强，因此最高水柱底部的压强为 270 kPa. 因为

$p = \rho gh$

所以 $h = \dfrac{p}{\rho g} = \dfrac{2.7\times10^5\text{N/m}^2}{(1000\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)} = 27.6\ \text{m}$

15.13 求 10 m 高的水柱产生的压强. 已知大气压强为 760 mmHg，水和水银的密度分别为 10^3kg/m³ 和 13.6×10^3 kg/m³.

解 ☞
$$p = p_{atm} + \rho gy = \rho_{Hg}gh_{Hg} + \rho gy$$
$$= (13.6\times10^3)(9.8)(0.760) + (10^3)(9.8)(10)$$
$$= 1.99\times10^5(\text{Pa}) = 199(\text{kPa})$$

15.14 大气压强为 101 kPa. 此压强能支持多高的水柱，多高的水银柱？设水银的比重为 13.6.

解 ☞ $\rho gh = 1.01\times10^5\ \text{N/m}^2$

对于水 $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$，$h = 10.3$ m

对水银 $\rho = 13600\ \text{kg/m}^3$，$h = 0.76$ m

15.15 求 120 mmHg 的血压与大气压的比值. 标准气压为 1.01×10^5 Pa.

解 ☞ 120 mmHg 的压强 $= \rho gh = (13600)(9.8)(0.120) = 0.16\times10^5$ Pa

比值 = 0.16/1.01 = 0.16

15.16 假设人类血管可以当作普通管子(当然事实并非如此)，求高 1.80 m 的人站立时，他脚部与头部的血压差. 设血的比重为 1.06.

* 1 mmHg = 133.322 Pa.

解 ☞ $\Delta p = \rho g h = 1060(9.8)(1.8) = 18.7\ \text{kPa}$

15.17 求海平面下 1 mi 处的压强. 设海水的平均密度为 1025 kg/m³. 若它的压缩率与纯水相同($B = 2000$ MPa), 问从海水表面到此深度密度改变率为多少?

解 ☞ $\Delta p = \rho g h = 1025(9.8)(1609) = 16.2\ \text{MPa}$

根据体积弹性模量定义 $B = -\Delta p/(\Delta V/V)$

又因为质量是常数, 即

$$0 = \Delta m = \rho \Delta V + V\Delta \rho, \text{因此} \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho}{\rho}$$

而 $B = \Delta p/(\Delta \rho/\rho)$, 则

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{B} = \frac{16.2}{2000} = 0.0081 = 0.81\%$$

15.18 一圆柱形贮水槽直径为 3 ft, 高度为 4 ft, 现装满重量密度为 62.5 lb/ft³ 的水, 求贮水槽底的压强.

解 ☞ 利用液体 y 深处压强公式(忽略大气压强):

$$p_L = d_W y = 62.5\ \text{lbf/ft}^3 \times 4\ \text{ft} = 250\ \text{lbf/ft}^2$$

15.19 在容器中先注入 0.30 m 深的水银, 再注入 1.2 m 深的水. 水的密度为 1.0×10^3 kg/m³, 水银密度为 13.6×10^3 kg/m³. 求容器底所受的压强(大气压强不计).

解 ☞ 先求水银层上表面处的压强, 对于水银层下某点来说, 这可以看作是附加压强 p_1

$$p_1 = \rho_{H_2O} g h_{H_2O} = (1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(1.2\ \text{m}) = 12\ \text{kPa}$$

水银柱自身产生的压强用同样方法求出

$$p_2 = \rho_{Hg} g h_{Hg} = (13.6 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.30\ \text{m}) = 40\ \text{kPa}$$

所以总压强为 52 kPa

15.20 当大气压强为 98.6 kPa 时, 水银计中水银柱高度为多少?

解 ☞ $h = \dfrac{p_{atm}}{\rho_{Hg} g} = \dfrac{98.6 \times 10^3\ \text{N/m}^2}{(13.6 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)} = 740\ \text{mm}$

15.21 如图 15-3 所示, 两种不发生化学反应的液体装在 U 形管内. 证明: 两液面距离分界面处的高度与它们的密度成反比.

解 ☞ 两管在分界面高度处的压强应该是相同的, 因为两管是开放的. 所以

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \text{即}\ h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1$$

15.22 如图 15-3 所示, U 形管中两液体为水和油. 若水柱高 19 cm, 油柱高 24 cm, 求油的密度.

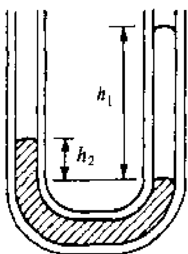


图 15-3

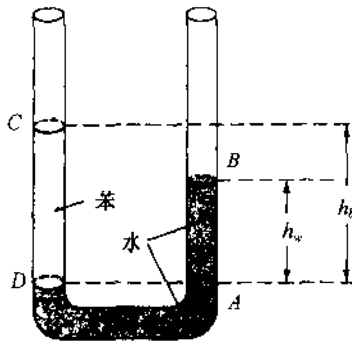


图 15-4

解 ☞ 我们利用题 15.21 的结果

$$\rho_{\text{oil}} = \left(\frac{h_w}{h_{\text{oil}}}\right)\rho_w = \frac{19\ \text{cm}}{24\ \text{cm}}(1000\ \text{kg/m}^3) = 792\ \text{kg/m}^3$$

15.23　如图 15-4 所示,将一均匀玻璃管弯成 U 形,在管中注入水,直至两管中的高度为 10 cm.然后在左管中缓慢注入苯(苯的比重为 0.879)使右管的水柱上升 4 cm.求此时苯的高度.水和苯是不相容的

解　☞ 根据题 15.21,8 cm 的水柱与苯柱产生的压强平衡,则

$$h_b = \frac{h_w}{\rho_b/\rho_w} = \frac{8\ \text{cm}}{0.879} = 9.1\ \text{cm}$$

15.24　如图 15-5 所示的压力计中装有水银.若大气压强为 100 kPa,问左边容器中气体压强是多少?

解　☞ 当液体静止时,A、B 两点的压强相等,因此

$$p = p_a + \rho gh = 1000\ \text{kPa} + [(13.6)(9.8)(0.12)]\text{kPa} - 116\ \text{kPa}$$

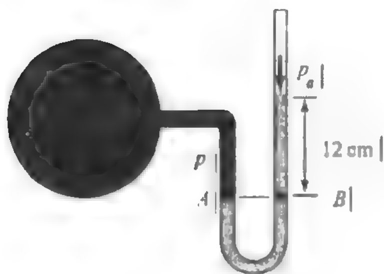


图 15-5

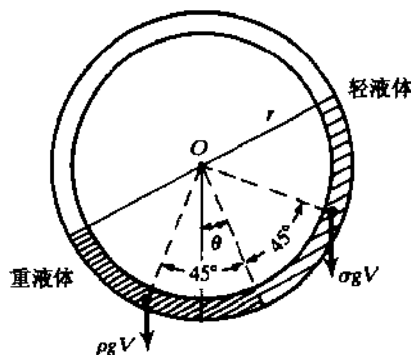


图 15-6

15.25　一水银气压计中水柱高度为 762 mm,一个气泡在 45.7 m 深的湖底时体积为 33 cm³,当气泡上升到表面时气泡体积变为多大?

解　☞ 用水的重量密度,湖底的压强为

$$p_b = \rho gy + p_{\text{atm}} = \rho gy + \rho\left(\frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho}\right)gh_{\text{Hg}}$$

$$= \rho g[45.7 + (13.6)(0.76)] = 45.7\rho g + 10.4\rho g = 56.1\rho g$$

设温度保持不变,利用玻意耳定律 pV = 常数,于是,表面处气泡体积为

$$V_s = \frac{p_b}{p_s}V_b = \frac{56.1\rho g}{10.4\rho g} \times 33 = 178(\text{cm}^3)$$

15.26　在竖直平面内有一均匀管弯成的半径为 r 的圆,等体积的两种密度分别为 ρ 和 σ($\rho > \sigma$)的液体注满半个圆管(如图 15-6),求两液体分界面与竖直方向间的夹角.

解　☞ 作用在两液体上的外力只有重力,分别为 ρgV 和 σgV,且对 O 点产生力矩,而容器壁产生的力呈放射状,指向圆心,无力矩.平衡时,

$$0 = \rho gVr\sin(45^\circ - \theta) - \sigma gVr\sin(45^\circ + \theta)$$

$$0 = \rho(\sin45^\circ\cos\theta - \cos45^\circ\sin\theta) - \sigma(\sin45^\circ\cos\theta + \cos45^\circ\sin\theta)$$

$$0 = \rho(1 - \tan\theta) - \sigma(1 + \tan\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma}$$

15.27　利用液体界面处压强相等重解题 15.26.

解　☞ 当轻的液体和重的液体处于平衡状态时,对分界面处压强相等,如图 15-6.我们分别从两种液体求分界面处的压强,数值上应相等.(管中气体对两液面的压强相等,故可忽略)于是有

$$\rho gh_1 = \sigma gh_2$$

其中 h_1 和 h_2 是各液体距分界面的高度

$$h_1 = r\cos\theta - r\cos(90^\circ - \theta) = r(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$h_2 = r\cos\theta + r\sin\theta = r(\cos\theta + \sin\theta)$$

代入压强公式并在等式两边约去 g 和 r，可以得到

$$\rho(\cos\theta - \sin\theta) = \sigma(\cos\theta + \sin\theta)$$

两边同除 $\cos\theta$ 得 $0 = \rho(1 - \tan\theta) - \sigma(1 + \tan\theta)$

解得 $\tan\theta = \dfrac{\rho - \sigma}{\rho + \sigma}$

15.28 如图 15-7(a)所示，大坝左侧水高 h，水对大坝施加一水平合力，使大坝具有沿坝基滑动的趋势；同时也产生一力矩使大坝关于 O 点有一转动趋势．求(a)水平合力的大小，(b)相对于 O 点力矩的大小，(c)若要产生相同大小的力矩，合力 F 的作用点在何处？

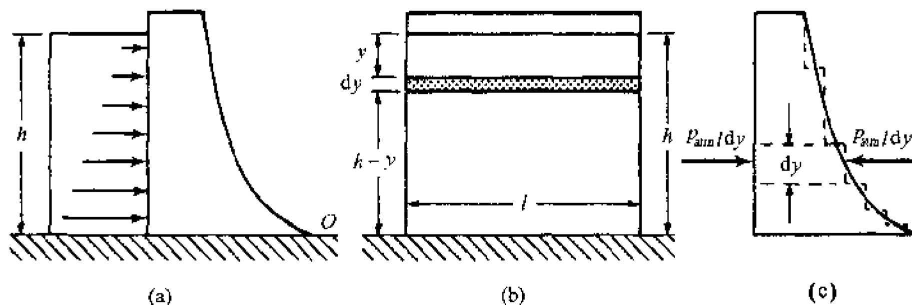


图 15-7

解 ☞ (a)图 15-7(b)是大坝侧面的截面图．深度 y 处压强 $p = \rho gy$，忽略大气压强(因为在大坝另一侧也受大气压强，图 15-7(c)可用于证明大气压强可忽略)，阴影部分受力 $\mathrm{d}F = p\mathrm{d}A = \rho gyl\mathrm{d}y$，所以总的力 $F = \rho gl\int_0^h y\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2}\rho glh^2$

(b)$\mathrm{d}F$ 对支点 O 的力矩大小 $\mathrm{d}\tau = (h - y)\mathrm{d}F = \rho gly(h - y)\mathrm{d}y$ 所以总力矩 $\tau = \rho gl\int_0^h y(h - y)\mathrm{d}y = \dfrac{1}{6}\rho glh^3$

(c)若合力 F 的作用点高度为 H，要产生相同大小的力矩，则

$$HF = \tau, \quad H = \frac{\tau}{F} = \frac{\rho glh^3/6}{\rho glh^2/2} = \frac{h}{3}$$

15.29[c] 一圆锥杯 $r = (b - z)\tan\alpha$，将它倒扣在光滑的水平桌面上，如图 15-8 所示．在杯中注入密度为 ρ，高为 h 的液体，求杯壁受到的向上的压力

解 ☞ 将杯子内表面分解成无数个圆环，则每个圆环的垂直面上所受压强 $p(z)$ 在竖直向上方向无效果，因为此压强是水平作用的．所以向上的压力仅由圆环水平面上的压强提供．

$$\mathrm{d}F_z = p(z)\mathrm{d}A = \rho g(h - z)(2\pi r\mathrm{d}r)$$

$$= \rho g(h - z)[2\pi(b - z)\tan\alpha](-\mathrm{d}z\tan\alpha)$$

将上式积分得到向上的压力为

$$F_z = -2\pi\rho g\tan^2\alpha\int_h^0 (h - z)(b - z)\mathrm{d}z = \pi\rho g\left(bh^2 - \frac{h^3}{3}\right)\tan^2\alpha$$

15.30 利用液体重量及它施加于水平面的作用力重新做题 15.29.

解 ☞ 静止液体对容器产生的合力应该等于液体重力，因此：$F_b - F_z = W$

其中 F_b 是液体对底面向下的压力，F_z 是杯子受到的向上的压力(由于对称，杯子受到的水平方向的压力抵消)，w 是液体重力．有

$$F_b = p(0)A = \rho gh(\pi b^2\tan^2\alpha)$$

$$w = \rho g V = \rho g \int_0^h \pi r^2 \mathrm{d}z = \rho g \pi \tan^2\alpha \int_0^h (b-z)^2 \mathrm{d}z$$

$$= (\rho g \pi \tan^2\alpha)\left(b^2 h - bh^2 + \frac{h^3}{3}\right)$$

所以 $F_z = F_b - w = (\rho g \pi \tan^2\alpha)\left(bh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$

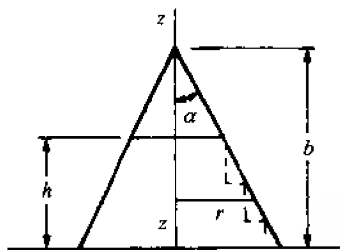


图 15-8

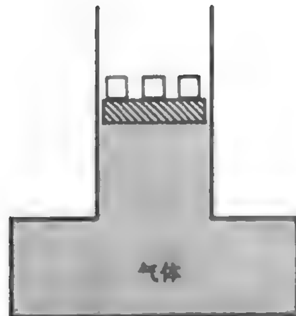


图 15-9

15.31 如图 15-9 所示,活塞上压上重物将压缩气体封闭在容器内.活塞及上面的重物总质量为 20 kg,活塞横截面积为 8 cm^2.求容器内气体的总压强和容器上压强计的读数.

解 ☞ 容器内气体的总压强是大气压强加上活塞及重物对气体的压强.

$$p = 1.0 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} + \frac{(20)(9.8)\mathrm{N}}{8 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = 1.0 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} + 2.45 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

$$= 3.45 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 345\ \mathrm{kPa}$$

容器上的压强计的读数应是内外压强差,所以读数为:$2.45 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 245\ \mathrm{kPa}$,即为活塞与重物产生的压强.

15.32 参照题 15.31,设容器底面积为 20 cm^2.(a)作用于容器底的力有多大?并将之与活塞及重物的重力、作用于活塞上的大气压力之和作比较,(忽略压缩气体自身重量.)(b)解释比较结果.

解 ☞ (a)根据题 15.31 可知,容器底部受到的压强为 $p = 345\ \mathrm{kPa}$. $F = pA = (345 \times 10^3\ \mathrm{N/m^2})(0.002\mathrm{m^2}) = 690\ \mathrm{N}$

活塞和重物总重力为 $(20\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2}) = 196\ \mathrm{N}$

活塞上受到的大气压力为 $(1.0 \times 10^5\ \mathrm{Pa})(0.0008\ \mathrm{m^2}) = 80\ \mathrm{N}$

$$196\ \mathrm{N} + 80\ \mathrm{N} = 276\ \mathrm{N}$$

(b)底部所受压力大于活塞和重物重力及作用于活塞上的大气压力之和.原因:容器与竖直部分相连的水平部分对气体也施加了一个向下的力,此力大小为$(345\ \mathrm{kPa})(0.0012\ \mathrm{m^3}) = 414\ \mathrm{N}$,正好是比较得到的差值.

15.33 容器与盛在其中的液体一起绕竖直轴匀速旋转.证明:容器中液面呈一抛物面.

证 ☞ 如图 15-10 所示,设液面因旋转而成曲线 APK,OA 为旋转轴,此液面是等压面(自由液面上每一点压强相等),液面上 P 点处受到的空气作用力与除 P 点外液面其余部分对其施加的力,合力方向应垂直 P 点液面(否则空气与液体将有一平行液面的切向力).另外 P 点还有自身重力 mg.这一小部分液体以 NP 为半径作角速度为 ω 的圆周运动.列出垂直与水平方向的运动方程.

$$\sum F_{\mathrm{ver}} = F\cos\theta - mg = 0; \quad \sum F_{\mathrm{hor}} = F\sin\theta = m\omega^2 \overline{PN}$$

联立两式得 $\tan\theta = \frac{\omega^2 \overline{PN}}{g}$ 或 $\overline{NG} = \frac{\overline{PN}}{\tan\theta} = \frac{g}{\omega^2} =$ 常数

曲线 AP 的次法距 $\overline{NG}$ 是一个常数,所以曲线 AP 是抛物线.(因为次法距为常数是判定抛物线的标准)

15.34ᶜ 如图 15-11 建立坐标轴,证明题 15.33 中的抛物线满足方程

$$y=(\omega^2/2g)x^2$$

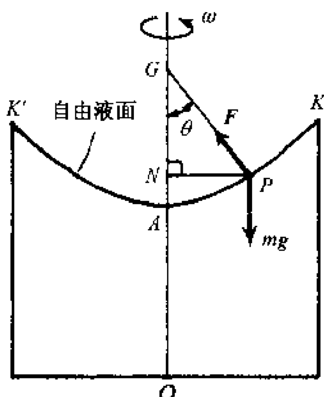


图 15-10

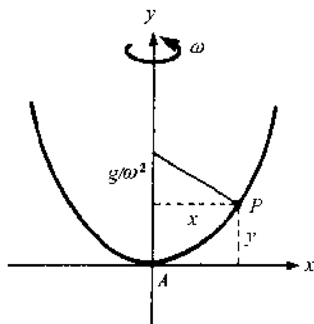


图 15-11

证 ☞ 我们知道 P 点切线斜率为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，则它的法线斜率为 $-\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$，图 15-11 中法线的斜率为 $(g/\omega^2)/x$.

因此 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{g/\omega^2}{x}$，$\mathrm{d}y=\dfrac{\omega^2}{g}x\,\mathrm{d}x$

$y=\dfrac{\omega^2}{2g}x^2$ （因 $x=0$ 时 $y=0$，故积分常数为 0）

15.35[c] 某学生想计算出大气压施加在马德堡半球上的压力大小. 他用大气压强乘以半球表面积 $2\pi R^2$，这种方法为何不对？写出正确方法.

解 ☞ 这种方法不正确是因为半球表面每一小面积上所受的压力方向处处指向球心，求合力时应该用矢量相加. 如图 15-12 所示，我们建立一球坐标系. 以半球球心为原点，z 轴为半球的对称轴. 写出合力表达式

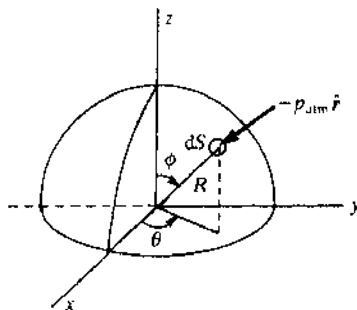


图 15-12

$$F=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$$

容易得到 $F_x=F_y=0$（对称性）

$$F_z=\iint p_{\mathrm{atm}}\mathrm{d}S\cos\varphi$$
$$=-p_{\mathrm{atm}}R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$
$$=-p_{\mathrm{atm}}R^2\left(2\pi\times\frac{1}{2}\right)=-p_{\mathrm{atm}}(\pi R^2)$$

合力方向沿 z 方向，大小为大气压强与半球底面积的乘积.

15.36 利用物理推理（不经过计算）解题 15.35.

解 ☞ 假设半球（重力不计）有一平整的底面，因为这个封闭半球在大气中处于平衡状态，则作用在曲面上的力为：$-$（作用在平面上的力）$=-p_{\mathrm{atm}}(\pi R^2)$，现在撤去底面，但作用在曲面上的压力不会改变.

15.37 如图 15-13(a)，若静止时两管中液体在同一高度处，但当体系有一向右的加速度 a 时，两管液面产生一高度差. 证明 $h=aL/g$

证 ☞ 加速时液面状态如图 15-13(b)所示，沿着液面方向的虚线是等压线，在等压线上取一小液面，如图 15-13(c)，由牛顿公式得 $A\Delta p\sin\theta=ma$；$A\Delta p\cos\theta=mg$，两式相除得 $\tan\theta=\dfrac{a}{g}$. 而在图 15-13(b)中 $\tan\theta=h/L$，所以 $h=aL/g$.

15.38 利用管中水平部分液体受力 $F=ma$ 重做题 15-37.

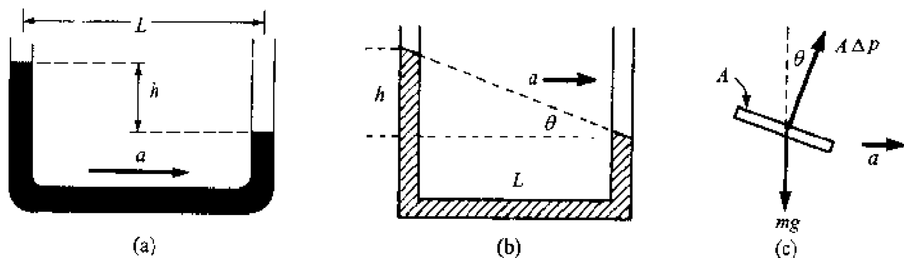


图 15-13

解　☞　p_1、p_2 分别代表管底左、右两端处的压强，则　$F=(p_1-p_2)A=\rho ghA$，其中 A 是试管横截面积管中水平部分液体质量 $m=\rho LA$，所以　$\rho ghA=(\rho LA)a$，$h=aL/g$，结果与前一致

15.2　帕斯卡定律；阿基米德定律；表面张力

15.39　工作站一台液压机的大活塞直径为 30 cm，小活塞直径为 2 cm.（a）要提升 1500 kg 的重物，需在小活塞上施加多大的力？（b）液体的压强增加多少？

解　☞（a）根据帕斯卡定律：液体能均匀传递压强，所以

$\Delta p=F_1/A_1=F_2/A_2$

其中 F_1、F_2 分别为施加在小活塞、大活塞上的压力，A_1、A_2 为两活塞的表面积．即

$$\frac{F_1}{\pi(2^2/4)}=\frac{1500\times 9.8}{\pi(30^2/4)}$$

等式两边同乘 $\pi/4$，解出 $F_1=\dfrac{(1500)(9.8)(2^2)}{30^2}=65\ (\mathrm{N})$

(b) $\Delta p=\dfrac{F_1}{A_1}=\dfrac{65}{\pi(2^2/4)}=21\ \mathrm{N/cm^2}=210\ \mathrm{kPa}$

15.40　液压机提升一台重 5000 lbf 的拖拉机，若大活塞直径为 1 ft，需对液体施加多大的压强（用 $\mathrm{lbf/in^2}$ 做单位）？

解　☞　根据帕斯卡定律，液体压强对大活塞产生的压力应等于需提升的物重．所以

$$\Delta p=\frac{F}{A}=\frac{5000}{\pi r^2}=\frac{5000}{\pi(0.5)^2}=6370(\mathrm{lbf/ft^2})$$

$$=\frac{6370}{144}=44.2(\mathrm{lbf/in^2})$$

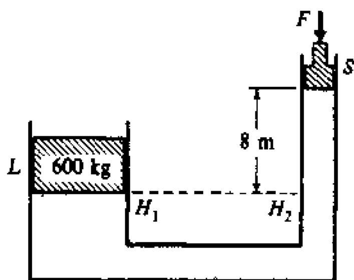


图 15-14

15.41　液压机大活塞截面积 $A_1=200\ \mathrm{cm^2}$，小活塞截面积 $A_2=5\ \mathrm{cm^2}$．若在小活塞上施加一个 2500 N 的力，求大活塞上产生的力的大小．

解　☞　根据帕斯卡定理：大活塞所受压强等于小活塞所受的压强．

所以 $F_1=\dfrac{A_1}{A_2}F_2=\dfrac{200}{5}(250\ \mathrm{N})=10\ \mathrm{kN}$

15.42　如图 15-14 所示的装置，左管 L 处有一截面积为 800 $\mathrm{cm^2}$，质量为 600 kg 的圆柱体；右管 S 处有一不计重力，截面积为 25 $\mathrm{cm^2}$ 的活塞．若此装置装入的是密度 $\rho=0.78\ \mathrm{g/cm^3}$ 的油，要使体系平衡，需加 F 为多大？

解　☞　处于同一高度的 H_1，H_2 处压强相等，因此 $p_{H_1}=p_{H_2}$，$p_{左活塞}=p_{右活塞}+p_{油}$

$$\frac{(600)(9.8)\ \mathrm{N}}{0.08\ \mathrm{m^2}}=\frac{F}{25\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}}+(8\ \mathrm{m})(780\ \mathrm{kg/m^3})(9.8\ \mathrm{m/s^2})$$

解得　$F=31\ \mathrm{N}$

15.43 一木块重 71.2 N,它的比重为 0.75.为使此木块全部浸没水中,用一端固定在容器底的绳子将木块系住.求绳上拉力的大小.

解 ☞ 木块受三力作用后处于平衡状态,这三个力分别为重力 $w=71.2\text{N}$,张力 T,浮力 B,且满足关系 $B=w+T$.利用 $B=\rho_L g V_B$ 求出 B.其中 ρ_L 为水的密度,V_B 为浸没在水中的木块的体积.

$w=\rho_B g V_B$,其中 ρ_B 是木块密度.于是 $w/B=\rho_B/\rho_L=$ 木块比重 $=0.75$.所以 $B=w/0.75=94.9$ N.代入平衡方程 $94.9\text{ N}=71.2\text{ N}+T$,得 $T=23.7\text{ N}$

15.44 一重 0.096 N 的金属球浸入水中称重为 0.071 N,求此金属的密度.

解 ☞ 利用 $\rho=m/V$ 求密度.因为球体积 V 即为浸入水中的体积,所以浮力 $B=\rho_水 gV$,于是

$$\rho=\frac{(mg)}{B}\rho_水=\frac{(0.096\text{ N})(1\times10^3\text{ kg/m}^3)}{(0.096-0.071)\text{N}}=3840\text{ kg/m}^3$$

15.45 一密度为 ρ_1 的物块浮在某种液体上,浸入液体中的体积占总体积的 3/4.证明:液体密度 $\rho_2=\frac{4}{3}\rho_1$.

解 ☞ 由阿基米德定律得 $\rho_1 Vg=\rho_2(3V/4)g$,所以

$$\rho_2=\frac{4}{3}\rho_1$$

15.46 冰的密度为 917 kg/m³,有一座冰山浮在密度为 1025 kg/m³ 的海水中,求冰山沉入水面的体积占总体积的比例.

解 ☞ 由题 15.45 得,沉入水面的体积所占比例为

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{917}{1025}=0.89$$

15.47 质量为 25 g 的木块底下系一块质量为 5 g,体积为 2 cm³ 的金属片,此时木块悬浮在水中,求木块的体积 V.

解 ☞ 此体系的平均密度为 $\frac{30}{V+2}\text{g/cm}^3$,根据题 15.45 和 15.46 得 $1=$ 下沉体积比 $=\frac{30/(V+2)}{1}$.解得 $V=28\text{ cm}^3$.

15.48 一块木板在空气中称重为 10.0 g,现在板下挂一重物,并将重物浸入水中,此时木板与水中重物称重为 14.00 g;若将木板与重物同时浸入水中,则称重为 2.00 g.求木块体积和密度.

解 ☞ 两次称重时重物均浸在水中,则两次称重的差值即为作用于木板的浮力:$(12.00\times10^{-3})\times(9.8)$N.因此,木板体积可根据排开水的重力与浮力相等来计算.

$$1000(9.8)V=(12\times10^{-3})(9.8)V=12\times10^{-6}\text{ m}^3$$

所以木板密度为 $\frac{10\times10^{-3}}{12\times10^{-6}}=830\text{ kg/m}^3$.

15.49 一质量为 50 kg 的妇女站在河中一块密度为 850 kg/m³ 的木板上,求木块的最小体积.

解 ☞ 妇女的重量加上木板的重量应等于木板恰好浸没在水中时受到的浮力,即

$$50\text{ g}+850Vg=1000Vg$$

得 $V=0.33\text{ m}^3$.

15.50 体重为 667 N,密度为 980 kg/m³ 的人穿上救生衣后浮在水面(只露出头),而救生衣全部浸在水中.假设此人头的体积占全身总体积的 1/5,若救生衣的比重为 0.25.求救生衣的体积 V_{lj}.

解 ☞ 人的体积 $V=\frac{W}{\rho g}=\frac{667}{(980)(9.8)}=0.07\ (\text{m}^3)$

浮力的大小等于人的重量加上救生衣的重量

$$\rho_{H_2O}g\left[\frac{14}{15}V+V_b\right]-667+(0.25\rho_{H_2O})gV_b$$

$$V_b=\frac{(667/\rho_{H_2O})-(14/15)gV}{0.75g}=\frac{0.667-(14/15)(9.8)(0.07)}{(0.75)(9.8)}$$

$$=0.004(m^3)=4(L)$$

15.51 一块不规则金属块在空气中称重为 10.00 g，浸没在水中称重为 8.00 g.(a)求此金属块的体积和密度，(b)若将此金属块浸没在油中称为 8.5 g，求这种油的密度.

解 ☞ (a)浮力 $=(2\times10^{-3})g$N，浮力等于排开水的重量 $\rho_水 Vg$，得到 $V=2\times10^{-6}$ m³；密度 $\rho=\frac{m}{V}=\frac{10\times10^{-3}}{2\times10^{-6}}=5000(kg/m^3)$；(b)在油中受到的浮力为 $(1.50\times10^{-3})g$N，等于排开油的重量 $\rho_油(2\times10^{-6})g$，得 $\rho_油=750$ kg/m³.

15.52 盛水烧杯总质量为 20.00 g，一密度为 0.800 g/cm³，体积为 2.0 cm³ 的木块浮在水面上.此时放到天平上称此烧杯；示数为多少？(用 g 做单位.)

解 ☞ 天平示数为烧杯加上水和木块的质量

$$(0.80\ g/cm^3)(2\ cm^3)=1.6\ g$$

所以，总示数为 21.6 g.

15.53 盛水烧杯总质量为 20.00 g，用一细绳拉住一密度为 3.00 g/cm³，体积为 1.00 cm³ 的金属块，使其浸没在水中，但不碰到杯底.此时若将烧杯放到天平上称，示重多少？

解 ☞ 绳上张力等于金属块重量减去浮力.而浮力等于 $(1\times10^{-6}\ m^3)(1000\ kg/m^3)g=10^{-3}$ gN，$g=9.8$ m/s²，金属重为 3×10^{-3} gN.因此绳施加了一个 2×10^{-3} gN 的向上的力.秤的支持力等于所有物体总重减去绳的拉力，示重为 $(23-2)g=0.206$ N.

我们也可以这样求解：水对金属块施加了一个向上的大小为 9.8×10^{-3} N 的浮力.根据牛顿第三定理，金属块对水施加同样大小的向下的力.因此天平的支持力为 0.196 N 加上金属块向下的力 0.0098 N，等于 0.206 N.

15.54 一块立方体物块边长为 0.75 cm.浮在密度为 800 kg/m³ 的油中，露出油面体积为总体积的 1/3.(a)求立方体所受的浮力，(b)这个立方体的密度是多少？

解 ☞ (a)立方体处于平衡状态，所以 $\rho_B V_B g=$ 浮力 $=\rho_0(2V_B/3)g$，已知 $V_B=4.22\times10^{-7}$ m³，$\rho_0=800$ kg/m³，解得浮力 $=2.21\times10^{-3}$ N；(b)因为浮力 $=\rho_B V_B g$ 求出 $\rho_B=2\rho_0/3=533$ kg/m³.

15.55 立方铜块边长为 1.50 cm，(a)若将它浸入密度为 820 kg/m³ 的油中，受到浮力多大？(b)拉住铜块的绳上的张力多大？$\rho_{Cu}=8920$ kg/m³

解 ☞ (a)浮力等于排开水的重量：$F_B=\rho_{oil}V_{Cu}g$，因为 $V_{Cu}=3.38\times10^{-6}$ m³，$\rho_{oil}=820$ kg/m³，得 $F_B=0.027$ N；(b)铜块受到三个力的作用：向上的拉力 T，向上的浮力 F，自身重力 $\rho_{Cu}V_{Cu}g=8920(3.38\times10^{-6})(9.8)=0.295(N)$.所以 $T=0.295-0.027=0.268(N)$.

15.56 一只质量为 500 kg 的气球静止浮在空中.若空气密度为 1.29 kg/m³.求此气球的体积.

解 ☞ 气球处于平衡状态，由阿基米德原理得

$$500g=1.29gV,\qquad V=388\ m^3$$

15.57 一圆柱形木桶高 3 m，质量为 80 kg，垂直浮在水面上.若此水桶的比重为 0.80.在它上表面放 10 kg 的物体后物体下沉多少？

解 ☞ 根据阿基米德定律，不放重物时浸入水面的高度 h 由下式求出：

$\rho_1 gAh=\rho_2 gA(3)$，　ρ_1、ρ_2 分别为水和木桶的密度

$$h=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot3=(0.80)(3)=0.24(m)$$

放上重物后，浸入水面的高度与总重成正比.所以

$$\frac{h-\Delta h}{h}=\frac{80+10}{80},\quad \Delta h=\frac{10}{80}h=\frac{10}{80}\cdot 2.40=0.30(\mathrm{m})$$

15.58 一容器下层装有水银,上层装水,一个边长为 60 mm 的立方铁块悬浮在此液体中.求这个立方铁块浸在水中和水银中的体积各为多少?铁的密度为 7.7×10^3 kg/m^3;水银密度为 13.6×10^3 kg/m^3.

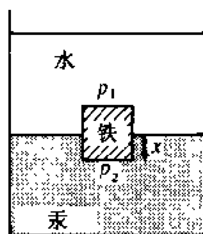


图 15-15

解 ☞ 设浸在水银中的高度为 x,则浸在水中高度为 $0.06-x$,垂直方向合力为 p_2A-p_1A.其中 p_2,p_1 分别是下底面上底面受到的压强,A 是铁块表面积.平衡时有 $w_{Fe}=p_2A-p_1A=(p_2-p_1)A$,而压强差 $p_2-p_1=\rho_{H_2O}g(0.06-x)+\rho_{Hg}gx$,则 $(p_2-p_1)A=\rho_{H_2O}g(0.06-x)A+\rho_{Hg}gxA$.[注意到右式两项分别代表排开水和排开水银的重量,而左式代表铁块受到的浮力.所以在有两种液体被排开时,阿基米德原理仍成立,也适用于任何形状的物体].现在根据平衡方程解出 x

$$w_{Fe}=\rho_{Fe}gV_{Fe}=\rho_{H_2O}g(0.06-x)A+\rho_{Hg}gxA$$

约去 g 得

$$(7.7\times10^3\ \mathrm{kg/m^3})(0.06\ \mathrm{m})^3=(1.0\times10^3\ \mathrm{kg/m^3})(0.06\ \mathrm{m}-x)(0.06\ \mathrm{m})^2+(13.6\times10^3\ \mathrm{kg/m^3})x(0.06\ \mathrm{m})^2$$

$$7.7(0.06)=(0.06-x)+13.6x$$

得 $x=0.032$ m $=32$ mm.所以,浸在水银中高度为 32 mm,浸在水中高度为 28 mm.

15.59 如图 15-16 所示,在长 $2l$ 的细杆一端系一根细绳后让其一部分浸入水中.若此细杆的比重为 0.75.求细杆露出水面部分占总体积的比例.

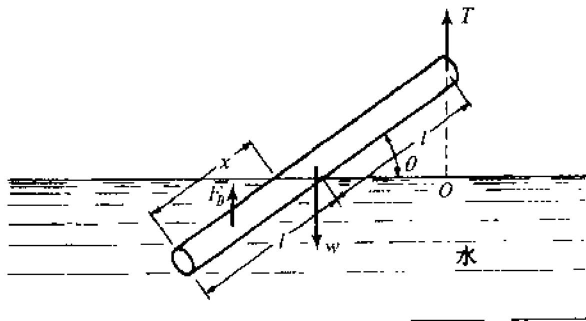


图 15-16

解 ☞ 浮力作用点为浸入水中部分的重心处.平衡时,浮力 F_B 和 w 对于 O 点的力矩平衡.

$$0=\sum\tau_0=wl\cos\theta-F_B\left(2l-\frac{x}{2}\right)\cos\theta$$

$$=\rho_{rod}gA(2l)(l\cos\theta)-\rho_{H_2O}gAx\left(2l-\frac{x}{2}\right)\cos\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2}\rho_{H_2O}gA\cos\theta\right)\left(x^2-4lx+4\frac{\rho_{杆}}{\rho_{H_2O}}l^2\right)$$

其中 A 代表细杆截面积,于是得到

$$x^2-4lx+3.00l^2=0,\qquad x=l\ 或\ 3l(舍去\ 3l)$$

细杆露出水面部分占 1/2,严格地说,上面的解只是近似的.因为水面并不是垂直于细杆横截面,但在 A 极小时,此误差可忽略.

15.60 一气球与其中的气体总重为 11.12 kN,若气球排开空气体积为 1132 m^3,这只气球将以多大的加速度开始上升?1 m^3 的空气重 12.3 N.

解 ☞ 运动方程为

$$\sum F = F_B - w = ma$$

$$a = \frac{F_B - w}{m} = \frac{(1132)(12.3) - (1.112 \times 10^4)}{(1.112 \times 10^4)/9.8} = 2.57\ \mathrm{m/s^2}$$

注意：此处我们忽略了黏滞力．当不考虑速度时，黏滞力可以不计．

15.61 在水底 2.9 m 深处有一密度为 $0.4 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ 的小木块，(a)若释放此木块，它将以多大的加速度向上加速？(b)求木块到达液面的时间(忽略黏滞力)．

解 ☞ (a)根据阿基米德原理，木块向上的合力 $F = \rho_{H_2O}gV - \rho gV$，其中 ρ、V 是木块的密度和体积，则

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\rho_{H_2O}gV - \rho gV}{\rho V} = \left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho} - 1\right)g = \left(\frac{1}{0.4} - 1\right)(9.8) = 14.7(\mathrm{m/s^2})$$

(b) $S = \frac{1}{2}at^2$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2(2.9)}{14.7}} = 0.63(\mathrm{s})$$

15.62 密度为 ρ' 的物体从密度为 ρ 的湖面 h 高处落下，$\rho' < \rho$，忽略所有阻力．求(a)在落入湖面前一刹那时物体的速度，(b)物体落入湖中后的加速度，(c)物体在开始上浮前能达到的最大深度．

解 ☞ (a)落入湖面前一刻的速度可根据自由落体机械能守恒求出；或者也可根据自由落体运动方程求出，结果为

$$v = \sqrt{2gh}$$

(b)因 $\rho > \rho'$，故在湖中时，物体受到的浮力大于重力，取向上为正方向，得 $F_B - w = ma$，其中

$$F_B = \rho gV, \quad w = \rho' gV, \quad m = \rho' V$$

V 为物体体积．两边都约去 V，得

$(\rho - \rho')g = \rho' a$，　$a = g\frac{\rho - \rho'}{\rho'} = g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)$，方向向上

(c)利用 $v^2 = v_0^2 + 2ay$，求所能到达的最大深度．v_0 代表 $y = 0$ 时的速度，物体到达最大深度时 $V = 0$，此时位移 y 是负值，所以 $v_0^2 = -2ay$

$$深度 = -y = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{2gh}{2g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)} = \frac{h\rho'}{\rho - \rho'}$$

15.63 一肥皂泡半径为 5 cm，若此肥皂泡的表面张力 $T = 30 \times 10^{-3}\ \mathrm{N/m}$，肥皂泡内部压强有多大？

解 ☞ 研究半个肥皂泡(如图 15-17)，肥皂泡内外两表面的表面张力都为 $2\pi rT$，则两表面合力 $F = 2(2\pi rT) = \Delta pA$，其中 A 是半球底面积．(见题 15-36)因为 $A = \pi r^2$，所以

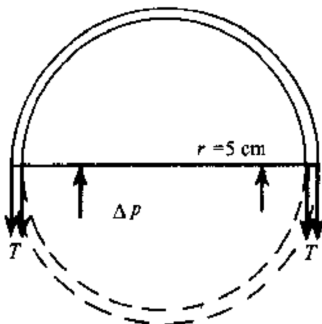


图 15-17

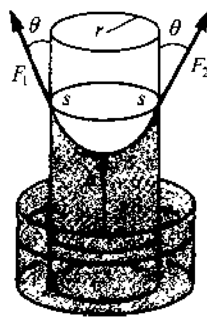


图 15-18

$$4\pi rT = \Delta p(\pi r^2),\quad \Delta p = \frac{4T}{r} = \frac{4(30\times10^{-3})}{0.05} = 2.4(\text{Pa})$$

15.64 密度为 ρ 的液体沿半径为 r 的毛细管上升 h 高度,若此液面的表面张力为 ν,凹形液面与毛细管夹角为 θ,如图 15-18.求 h 的表达式.

解 ☞ ν 是单位长度上的力,管壁上不同点处力的方向各不相同(如图所示).平衡时,表面张力向上分力为 $2\pi r\nu\cos\theta$ 应等于向下的重力 mg,即

$$2\pi r\nu\cos\theta = mg \tag{1}$$

水柱质量为 $m=\rho\pi r^2h$,代入(1)式得到

$$2\pi r\nu\cos\theta = \rho\pi r^2hg,\quad h = \frac{2\nu\cos\theta}{\rho gr} \tag{2}$$

若黏滞力远大于内聚力,则接触角 θ 极小,这种情况下 $\cos\theta$ 约等于 1,式(2)可写成

$$h = \frac{2\nu}{\rho gr} \tag{3}$$

当水沿玻璃管上升时,$\theta\leqslant20°$,(3)式成立.

15.65 水的表面张力为0.07 N/m.求在半径为0.1 mm的毛细管中,由于表面张力而能支撑水柱的重量.

解 ☞ 用 T 代表表面张力,设接触角为 0°,则

$$F = 2\pi rT = 2\pi(10^{-4})(0.07) = 44\ \mu\text{N}$$

15.66 在直径为0.07 cm的玻璃毛细管中甲醇能上升多高?甲醇的表面张力为0.023 N/m,密度为 0.8 g/cm^3,设接触角为 0°

解 ☞ 这个问题可以根据题 15.64 的公式(3)求解

$$h = \frac{2(0.023)}{(800)(9.8)(0.035\times10^{-2})} = 0.017(\text{m}) = 1.7(\text{cm})$$

15.67 一水银气压计的玻璃管内直径为 4 mm.因为水银与玻璃的接触角为 140°,毛细现象作用使水银体积下降.要使读数正确还应加入多少毫米的水银?设水银表面张力 $T=0.545$ N/m,密度为 13.6 g/cm^3.

解 ☞ 由题 15.64 公式(2)得毛细现象导致的高度差

$$h = (2T\cos\theta)/(rdg)$$

代入所给的 T 值及水银密度 $d=13600$ kg/m^2,得

$$h = \frac{2(0.545)\cos140°}{(13600)(9.8)(2\times10^{-3})} = \frac{(0.545)(-0.766)}{(13600)(9.8)(10^{-3})} = -0.0031(\text{m})$$

因此,为使气压计读数正确,必须加入 3.1 mm 的水银.

第十六章 流体动力学

16.1 连续性方程;伯努利方程;托里拆利定律

16.1 定义流线,流管,稳定流动,湍流,不可压缩流体,无旋流体.

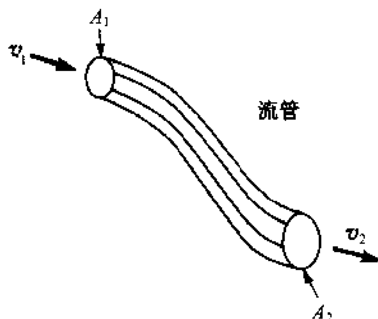


图 16-1

解 ☞ 流线是流体内假想的线,曲线上每一点的切线方向即为位于该处的流体质点的速度矢量方向.流管是由流线组成的管状曲面,流体只能在流管内流动,不能穿过流管壁(图 16-1).

在稳定流动中,任一给定点处,流体的速度与时间无关.(通常在不同点处速度不同)在稳定流动中,流线与流管是稳定的,流体质点在流管内沿着流线流动.稳定流动有时也称为层流.

在湍流中,各点处速度都是时间的函数,因此不能再用流线来表示流体质点的运动路径.湍流通常用瞬时变化的涡流表示.

若流体密度 ρ 为常数,则为不可压缩流体,若流体无涡旋或圆周运动,则为无旋流.

16.2 什么是连续性方程?

解 ☞ 若一闭合表面内既无源,又无负源,则根据质量守恒,进入该闭合表面的净流量等于闭合表面内物质的增加率.应用在稳定流动的流管中(图 16-1),我们得到连续性方程:$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$.其中,$\rho$ 为密度,假设它在截面积 A 处是均匀的;v 为经过截面积 A 处的平均速度(v 与 A 垂直).若流体又是不可压缩的,连续性方程简化为 $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

16.3 什么是伯努利方程?

解 ☞ 若流体是稳定的,非黏性的,不可压缩的,伯努利方程给出同一流线任两点处的压强 p,流速 v,高度 y 满足

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

注意伯努利方程中每一项都是取的单位体积内的量值.方程指出:压力沿流线所作的功等于动能和势能的改变(都指单位体积).

伯努利方程也可用下式表述:

$$\Delta p + \frac{1}{2}\rho \Delta v^2 + \rho g \Delta y = 0$$

其中:$\Delta p = p_2 - p_1, \Delta v^2 = v_2^2 - v_1^2, \Delta y = y_2 - y_1$

16.4 流体以速度 v_0 流过半径为 r 的圆柱形水管,若水管某一位置处由于收缩半径变为$\frac{r}{4}$,求流体经过此处的速度.

解 ☞ 半径从 r 减小到$\frac{r}{4}$,则截面积从 πr^2 变化$\frac{\pi r^2}{16}$.若该流体为不可压缩流体,根据连续性方程,在收缩处速度增加为原来的 16 倍.

16.5 水沿着光滑的闭合管流动.在某点处水速为 3.0 m/s,在高出 10 m 的另一点处水速为 4.0 m/s.若在下面那点处的压强为 20 kPa,求 10 m 高处那点的压强.若水停止流动,下面那点处的压强为 18 kPa,10 m 高那点的压强又为何值?

解 ☞ 利用伯努利方程:$p_1 + \rho g h_1 + (\rho v_1^2)/2 = p_2 + \rho g h_2 + (\rho v_2^2)/2$.代入 $h_2 - h_1 = 1$ m 和其它已知值,解出 $p_2 = 6.7$ kPa.水不流动时,$v_1 = v_2 = 0$,所以 $p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2) = 8.2$ kPa.

16.6 水以 3.0 cm^3/s 的流量流出水管,求水在水管下列直径处的速度:(a) 0.50 cm,(b) 0.80 cm.

解 ☞ 利用连续性方程,且 ρ = 常数,有

(a) $\pi(0.25)^2 v = 3.0$, $v = 15.3$ cm/s

(b) $\pi(0.40)^2 v = 3.0$, $v = 6.0$ cm/s

16.7 如图 16-2 所示的体系内装有 h 高度密度为 ρ 的液体.大气压强为 p_{atm}.不计摩擦,求出 1、2、4、5 处液体的压强,并比较 3 和 5 处的压强.

解 ☞ 由图 16-2,可得 $p_5 = p_{atm}$,不计摩擦,并假设液体是稳定流动的,我们用伯努利方程计算各点处的压强

$$p_M - p_N = \frac{1}{2}\rho(v_N^2 - v_M^2) + \rho g(y_N - y_M)$$

因为在 2、4、5 处体系的截面积相同,则流体的流速也相同:$v_2 = v_4 = v_5$,又有高度 $y_2 = y_4 = y_5$.从伯努利方程可得到 $p_2 = p_4 = p_5$.将 1 处与体系表面处的液体相比,并设在这两个位置处液体流速可忽略,则有 $p_1 = p_{atm} + \rho gh$.将 1 和 5 代入伯努利方程得 $v_5 = \sqrt{2gh}$.因为截面积 A_3 小于 A_5,故有 $v_3 > v_5$.若有 $A_3 = \frac{1}{2}A_5$,则可求出 $v_3 = 2v_5$,将 3,5 代入伯努利方程,得 $p_3 = p_5 - 3\rho gh$.

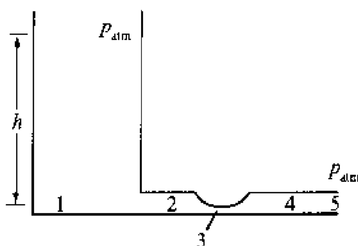


图 16-2

因此,$p_1 = p_{atm} + \rho gh$,$p_2 = p_4 = p_5 = p_{atm}$,(假设 $A_3 = \frac{1}{2}A_5$)$p_3 = p_{atm} - 3\rho gh$.

16.8 横截面积为 a_1 的水管某处截面积收缩为 a_2 在此处接上文特利(Ventury)流速计,测出压强差 $p_1 - p_2$,其中 p_1 为截面积为 a_1 处的压强,p_2 为收缩处的压强.推算出未收缩处流体的速度.

解 ☞ 假设未收缩处与收缩处的高度 h_1 和 h_2 相等,利用伯努利方程 $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ 及连续性方程 $v_1 a_1 = v_2 a_2$,得到

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

即

$$v_1^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}\frac{a_2^2}{a_1^2 - a_2^2},\ v_1 = a_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(a_1^2 - a_2^2)}}$$

16.9 求题 16.8 中,单位时间内流过任一截面的流体体积.

解 ☞ 管中任意位置处的体积流量是相同的,在位置 1 处,速度为 v_1,截面积为 a_1,故有

$$\text{体积流量} = a_1 v_1 = a_1 a_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(a_1^2 - a_2^2)}}$$

16.10 如图 16-3 所示,一桶水保持深度为 8.0 m,求水从桶底一小管喷出的速度 v_b.

解 ☞ 将 t 和 b 处的 Δv^2、Δp、Δy 代入伯努利方程,因为桶很大,水管很小,可以假设桶内水的速度可忽略.只有在水喷出水管时才有速度.$\Delta v^2 = v_b^2 - 0$,$\Delta p = 0$(都为大气压强),代入伯努利方程 $\Delta p + \frac{1}{2}\rho\Delta v^2 + \rho g\Delta y = 0$,即 $\frac{1}{2}\rho\Delta v^2 + \rho g\Delta y = 0$,$v_b^2 = -2g\Delta y$,所以 $v_b = \sqrt{2g(-\Delta y)}$.水流出的速度为自由落体速度,这就是托里拆利定律.代入数值得 $v_b = \sqrt{2\times 9.8\ \text{m/s}^2\times 8.0\ \text{m}} = 13$ m/s.

16.11 图 16-3 中上部的水管正好在液面处,现将它堵住只留一小孔使水可以滴出.不计空气阻力,求水滴从上面水管滴出经过桶底时的速度 v_t.

解 ☞ 利用自由落体运动方程或托里拆利定律都可求出 $v_t = 13$ m/s.

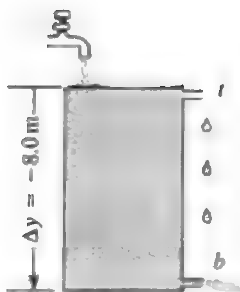


图 16-3

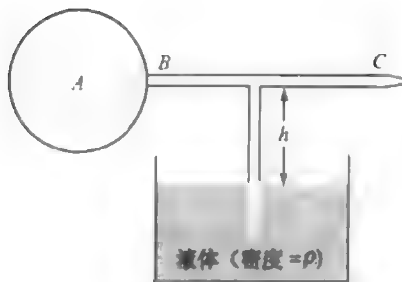


图 16-4

16.12 将一水桶放在高 h 的桌子上.若在桶底边上扎一小孔,发现水流喷到地上的位置离桶上小孔处的水平距离为 R,求桶内水的深度.

解 ☞ 由托里拆利定律得 $v=\sqrt{2gd}$,其中 v 为水流出水桶时的水平速度,d 是桶内水的深度.水是水平喷出水桶的,所以到达地面所需的时间 t 由 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 得到,即 $t=\sqrt{2h/g}$.又有 $R=vt=\sqrt{2gd}\ \sqrt{2h/g}=2\sqrt{dh}$.于是 $R^2=4dh$,得 $d=R^2/(4h)$.

16.13 在一大储水桶下部开一个面积为 1 mm^2 的小孔,使水从小孔内喷出.若小孔上方水的高度为 20 m,每秒有多少水从小孔喷出?

解 ☞ 利用托里拆利定律求出水喷出小孔的速度,则体积流量为

$$vA=\sqrt{2gh}A=\sqrt{2(9.8\times10^3\ \text{mm/s}^2)(20\times10^3\ \text{mm})}(1\ \text{mm}^2)=19800\ \text{mm}^3/\text{s}$$
$$=19.8\ \text{mL/s}$$

16.14 图 16-4 是香水喷头的简易模型.挤压气泡 A 时,空气快速流过细管 BC,使管竖直部分的压强降低,因此水上升到 BC 管中并喷出.现假设 A 内压强为 p_a+p,其中 p_a 是大气压强;BC 管内空气流动的速度为 v,求出 BC 管内的压强值.要使液体上升到 BC 管内,v 需多大?空气密度取 1.30 kg/m^3.

解 ☞ 利用伯努利方程:$p_a+p=p_{BC}+(\rho_a v^2)/2$,解出 $p_{BC}=p_a+p-0.65v^2$,其中 ρ_a = 空气密度;而 $p_{BC}=p_a-\rho gh$,两式联立,求出 $v=\{[(p+\rho gh)]/0.65\}^{1/2}$.

16.15 如图 16-5 所示,一均匀截面积的虹吸管从容器吸水,写出水在 B 点处流出虹吸管时速度的表达式.

解 ☞ 只要虹吸管中充满水,则点 A、B 与大气接触,利用托里拆利定律得 $v_B=\sqrt{2gh_2}$.

16.16 在题 16.15 中,若 $h_2=3.0$ m,要使虹吸管开始工作,求 h_1 的极值.

解 ☞ 利用伯努利方程写出虹吸管最高处各量(下标为 1)与 A 处各量的关系

$$p_A=p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1 \tag{1}$$

因为虹吸管截面积均匀,流体是不可压缩的,所以管中液体稳定流动的速度等于从 B 点流出时的速度.由题 16.15 得

$$v_1=v_B=\sqrt{2gh_2} \tag{2}$$

将 $p_A=p_{atm}$及方程(2)代入方程(1),得到虹吸管最高点处的压强

$$p_1=p_{atm}-\frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{2gh_2}\right)^2-\rho gh_1=p_{atm}-\rho g(h_1+h_2) \tag{3}$$

压强 p_1 必须为非负,否则无法将水吸到管子顶部(液体不承受张力).令方程(3)中 $p_1=0$,得到 h_1 的极大值

$$h_{1max}=\frac{p_{atm}}{\rho g}-h_2=\frac{(1.0\times10^5\ \text{N/m}^2)}{(1.0\times10^3\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)}-3.0\ \text{m}=10.2\ \text{m}-3.0\ \text{m}$$
$$=7.2\ \text{m}$$

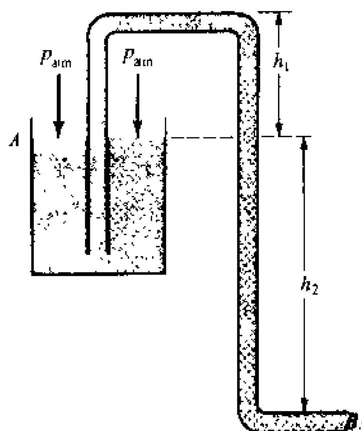


图 16-5

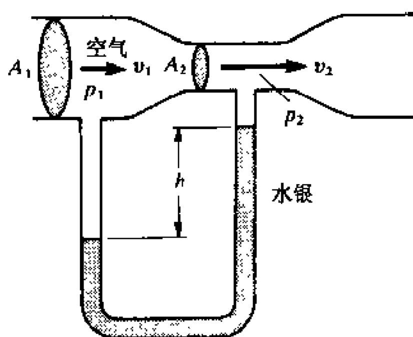


图 16-6

16.17 如图16-6所示,空气从左至右流过文特利(Venturi)流速计的水平主管.若流速计U形管内装的是水银,求两管内水银的高度差 h.已知主管较宽部分的半径 $r_1=1.0$ cm,较窄部分的半径 $r_2=0.50$ cm,空气进入主管的速度 $v_1=15.0$ m/s,空气密度 $\rho_{air}=1.3\ \text{kg/m}^3$,水银密度 $\rho_{Hg}=13.6\times10^3\ \text{kg/m}^3$.

解 ☞ 因为空气是水平流动的,则 $\Delta y=0$,伯努利方程变为

$$\Delta p = -\frac{1}{2}\rho_{air}\Delta v^2 \tag{1}$$

而根据连续性方程又得到

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = v_1\frac{r_1^2}{r_2^2},\quad \text{则}\ \Delta v^2 = v_2^2 - v_1^2 = v_1^2\left(\frac{r_1^4}{r_2^4}-1\right)$$

代入方程(1),得到

$$\Delta p = -\frac{1}{2}\rho_{air}v_1^2\left(\frac{r_1^4}{r_2^4}-1\right) \tag{2}$$

U形管两端处的压强差导致管内水银柱的高度差 h,且 $|\Delta p|=\rho_{Hg}gh$.将方程(2)两边取绝对值,并结合 $|\Delta p|$ 的值,得出

$$h = \frac{\rho_{air}v_1^2}{2\rho_{Hg}g}\left(\frac{r_1^4}{r_2^4}-1\right) \tag{3}$$

代入数据

$$h = \frac{1.3\ \text{kg/m}^3\times(15.0\ \text{m/s})^2}{2\times13.6\times10^3\ \text{kg/m}^3\times9.80\ \text{m/s}^2}\left[\left(\frac{1.0\ \text{cm}}{0.50\ \text{cm}}\right)^4-1\right]$$
$$=0.016\ \text{m} = 1.6\ \text{cm}$$

16.18 一盛水容器放在桌子上,水从容器壁上一小孔内射出,小孔在水面下 y 距离处,容器内水的高度为 h.水射到桌面处的位置与小孔之间的水平距离 R 为多大?

解 ☞ 由托里拆利定律得水从小孔射出时速度 $v=\sqrt{2gy}$.水流为的每个流体质点都沿着平抛运动的轨迹运动."下落时间"t 满足方程 $\frac{1}{2}gt^2=h-y$,所以 $t=\sqrt{2(h-y)/g}$.因此在下落过程中的水平位移

$$R = vt = \sqrt{2gy}\sqrt{\frac{2(h-y)}{g}} = 2\sqrt{y(h-y)} \tag{1}$$

16.19 在题16.18中,(a)若在容器壁上再打一小孔,要求从这个小孔喷出的水有同样大小的射程 R,求这个小孔距容器底的高度,(b)要使射程最远,应在离液面多远处打小孔?

解 ☞ (a)从题16.18的方程(1)可看出:如果一个小孔离容器底的距离等于另一小孔离液面的距离,则从这两个小孔喷出的水的射程相同.

(b)因为 $R(y)$ 关于 $y-\frac{h}{2}$ 对称，则中心高度处的射程或为极大，或为极小．而 $R(0)=R(h)=0$，所以 $R\left(\frac{h}{2}\right)$ 为极大值．

16.20 横截面积为 A_1 与横截面为 A_2 的水平管子相连接，A_2 管的另一端敞开在空气中．若大气压强为 p_0，忽略液体黏滞性，要使水以速度 v_2 流出管子需要在第一个管子上加多大的压强？在 Δt 时间内，有多少水流出管子？答案用 p_0、v_2、A_1、A_2、Δt 表示．

解 ☞ 由伯努利方程：$p_1+(\rho v_1^2)/2=p_2+(\rho v_2^2)/2$，得 $p_1=p_2+500(v_2^2-v_1^2)$．利用连续性方程 $v_1A_1=v_2A_2$，得 $p_1=p_0+500[1-(A_2/A_1)^2]v_2^2$．单位时间内有长度为 $v_2\Delta t$，面积为 A_2 的柱体内的水流出，因此 Δt 时间内水的流量 $\Delta Q=v_2A_2\Delta t$．

16.21 竖直喷水软管长 2.5 m，若喷口处面积为 0.75 cm^2，求水喷出软管时的速度．1 分钟内有多少水喷出？

解 ☞ 利用软管底部处的动能等于顶部处的势能，得到 $v=(2gh)^{1/2}=7.0$ m/s $=700$ cm/s．流量为 Av，因此 1 分钟内喷出水 $(0.75\ cm^2)(700\ cm/s)(60\ s)=3.15\times10^4\ cm^3=31.5$ L．

16.22 假设火箭爆炸室内气体密度为 ρ_1，压强为 p_1，通过火箭末端一面积为 a 的开口排向太空．求(a)气体排出时相对火箭的速度，结果用 p_1，ρ_1 表示，(b)对火箭产生的反冲力．

解 ☞ (a)我们可以假设气体排出火箭瞬间保持它在爆炸室内的密度 ρ_1．将爆炸室内气体($v\approx0$)和喷气点处($p=0$)各物理量代入伯努利方程，不计太空中的重力势能，得到

$$0+\frac{1}{2}\rho_1v^2=p_1+0,\quad v=\sqrt{\frac{2p}{\rho_1}}$$

(b)冲力＝动量的改变率．所有的气体分子以速度 v 喷出，而气体喷出时总的 $\frac{m}{t}=\rho_1av$．所以 $\frac{p}{t}=(\rho_1av)v=\rho_1av^2=2p_1a$．

16.23 如图 16-7 所示，一贮水容器底部有一个颈型的尖嘴开口，水从中排出．此开口最窄部分满足托里拆利定律，它的截面积为最宽部分的 0.62 倍．设容器内水的高度为 h，求通过开口的水的流量．

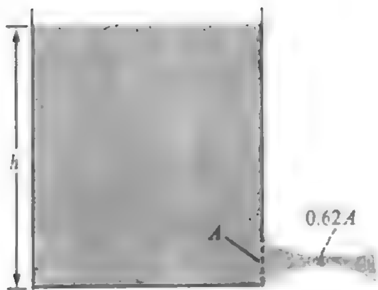


图 16-7

解 ☞ 水的流量 $\Phi=\rho Av_A=\rho A'v$，其中 v 为通过颈型开口时水的速度，ρ 为水的密度，A' 为开口处的截面积．假设水流均匀通过截面的各个部分，由托里拆利定律得 $\Phi=0.62\rho A\sqrt{2gh}$．

16.24 水以 3.0 m/s 的速度从水龙头流下，向下运动的加速度为 g，水龙头口的横截面积为 1.0 cm^2，在水龙头下 0.50 m，水流的截面积为多少？

解 ☞ 用 v_0 代表水流的初始速度，A_0 代表初始的横截面积．水流自由下落 h 后，速度为 $v_1=\sqrt{v_0^2+2gh}$．若水流是稳定流动的，则满足：$\rho_0v_0A_0=\rho_1v_1A_1$．水又是不可压缩的，$\rho_0=\rho_1$，所以 $A_1=(v_0/v_1)A_0$．代入数据，得 $v_1=\sqrt{(3.0)^2+2(9.8)(0.50)}=4.34$(m/s)；$A_1=(3.0/4.34)(1.0\ cm^2)=0.69\ cm^2$．

16.25 如图 16-8 所示，一半径为 0.9 m 的圆柱形水桶放在 6 m 高的平台上．开始时，桶内装有深为 $h_0=3$ m 的水($\rho=1\times10^3\ kg/m^3$)，现将桶底边上开口处的塞子拔掉，塞子面积为 6.3 cm^2，水流到地面上时的速度是多少？

解 ☞ 对桶顶和地面处的水用伯努利方程，得到

$$p_{atm}+\frac{1}{2}\rho(0)^2+\rho g(h_0+H)=p_{atm}+\frac{1}{2}\rho v_3^2+\rho g(0)$$

因此,$v_3=\sqrt{2g(h_0+H)}=\sqrt{2(9.8)(9)}=13.28(\mathrm{m/s})$(可以把整个过程看作自由落体运动).水流到地上不再满足稳定流动条件时,此结果仍成立,因为每一滴水仍满足能量守恒定律.

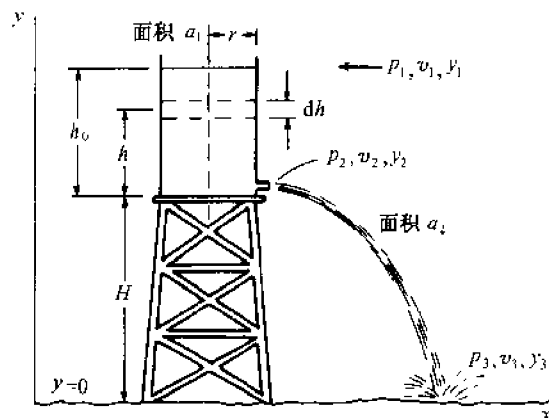


图 16-8

16.26[c] 题 16.25 中,桶中水全部流出需多少时间?

解 ☞ 根据连续性方程有 $-a_1(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)=a_2v_2$.假设水桶顶部的水一直流得很慢($|\mathrm{d}h/\mathrm{d}t|\ll v_2$),而托里拆利定律给出 $v_2=\sqrt{2gh}$,因此

$$\mathrm{d}t=\frac{a_1}{a_2}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$$

$$t=-\frac{a_1}{a_2\sqrt{2g}}\int_{h_0}^{0}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}=\frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}=\frac{\pi(0.9^2)}{6.3\times10^{-4}}\sqrt{\frac{2(3)}{9.8}}$$

$$=3160.5(\mathrm{s})=52.67(\mathrm{min})$$

16.27 如图 16-9,容器底部边上有一截面积为 a 的开口,为防止液体从中流出,在开口处挡了一块板.已知容器内液体密度为 ρ,(a)求挡板所受的合力大小,(b)将挡板拿离开口一小段距离,液体喷出时无弹性地打在挡板上后垂直落下.证明,此时作用在挡板上的力为(a)中的两倍.

解 ☞ (a)挡板受到容器内流体的静压强为 $p_i=p_{\mathrm{atm}}+\rho gh$,挡板受到外部大气压强为 $p_0=p_{\mathrm{atm}}$.因为挡板截面积为 a,所以它受到的合力向外,大小为 $(p_i-p_0)a=\rho gha$.

(b)挡板被移动后,液体开始稳定流动,由托里拆利定律得到液体喷出开口的速度为 $v=\sqrt{2gh}$,不计摩擦,这就是液体流出整个开口时的速度.所以,流量 $\Phi=\rho av=\rho a\sqrt{2gh}$,而流体向右的动量为 $(\rho av)v=2\rho gha$.当水流打到挡板上后,水流向右的动量都被挡板以 $2\rho gha$ 的速度吸收.因此,水流对挡板施加向右的力为 $2\rho gha$,刚好是题(1)中力的 2 倍.注意:大气压力同时作用在挡板左右两侧,相互抵消.

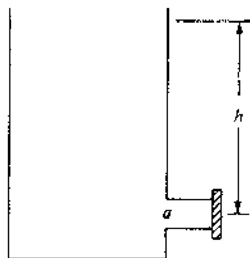


图 16-9

16.28 一平板以 3 m/s 的速度垂直一喷射的水流移动,水流喷射流量为 0.1 $\mathrm{m^3/s}$,喷射速度为 18 m/s.(a)求水流对平板的作用力.(b)如果平板静止,作用力又为多大?

解 ☞ 我们先做题(b),如果平板是静止的,且无弹性,则水垂直打到平板上时作用在平板上的力等于水柱向右方向上动量的变化率,即 $F=(\rho av)v$,括号内的量为打在平板上的水柱的 $\frac{m}{t}$ 的值,a 是水柱截面积.已知 $v=18$ m/s,$av=0.1\mathrm{m^3/s}$;$\rho=1000\ \mathrm{kg/m^3}$.所以 $F=(1000\ \mathrm{kg/m^3})(0.1\mathrm{m^3/s})(18\ \mathrm{m/s})=1800$ N.

题(a)中平板以 3 m/s 的速度相对水柱运动，则$\frac{\Delta p}{t}$变了．首先，水柱打在平板上时还获得与平板运动方向相反，大小为 3 m/s 的速度，所以速度的改变不再是 $v=18$ m/s，而是 $18+3=21$ m/s．其次，每秒打在平板上的水的质量由 av 变为 $a(v+3)$．而 $a=(0.1\ \mathrm{m^3/s})/v$，因此

$$F=\rho\left(\frac{0.1}{v}\right)(v+3)(v+3)=\frac{(1000\ \mathrm{kg/m^3})(0.1\ \mathrm{m^3/s})(21\ \mathrm{m/s})^2}{18\ \mathrm{m/s}}=2450\ \mathrm{N}$$

16.29　用水泵将贮水槽中的水抽到一水平龙头内并流出．水泵使静止的水开始运动，因此，即使忽略水的摩擦力，要产生流量 Φ，水泵必须给水传递功率 P．现有一个新的水泵，要求它抽水时流量 $\Phi'=2\Phi$，这个新水泵的功率 P'应为何值？水的摩擦力仍忽略．

解　☞ 利用功能关系得

$$P=\frac{\text{水得到的动能}\ KE}{\text{时间}\ t}=\frac{KE}{\text{水的体积}}\times\frac{\text{水的体积}}{t}\qquad\propto v^2\times v=v^3$$

因为流量 Φ 正比于 v，所以 $P\propto\Phi^3$，若 $\Phi'=2\Phi$，则新的功率 $P'=8P$．

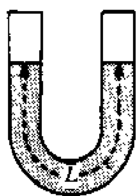


图 16-10

16.30　如图 16-10 所示的 U 形管内装有长度 L 的无黏滞性液体．证明液柱作类似一长为$\frac{L}{2}$的单摆的简谐运动．

证　☞ 设液体的密度为 ρ，质量为 M，U 形管的截面积为 A．若一管内的水柱降至平衡位置下 x 处，则另一管内水柱必将上升到平衡位置上 x 处(假设液体不可压缩)．两管水柱的高度差为 $2x$，回复力 $F=-\rho gA(2x)=-kx$，因此得到简谐运动的频率

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho gA}{M}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho gA}{\rho AL}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L/2}}$$

16.2　黏性；斯托克斯定律；湍流；雷诺数

16.31　将许多密度为 ρ_s，半径为 r_s 的铁制小球从水面上方由静止释放，已知水的密度为 ρ．(a)证明：作用在球体上的净重力(重力与浮力的合力)大小为$(4\pi/3)r_s^3(\rho_s-\rho)g$，(b)设球体下降过程中，它周围的水是稳定流动的，用 r_s、ρ_s、ρ 及水的黏度 η 表示出球体最后的速度 v．

解　☞ (a)重力－浮力$=\rho_s g\left(\frac{4}{3}\pi r_s^3\right)-\rho g\left(\frac{4}{3}\pi r_s^3\right)=\frac{4\pi}{3}r_s^3(\rho_s-\rho)g$

(b)当球体达到最后的速度 v 时，所受合力等于零，即向下的净重力等于向上的黏力．根据斯托克斯公式得黏力$=6\pi\eta r_s v$，因此

$$\frac{4}{3}\pi r_s^3(\rho_s-\rho)g=6\pi\eta r_s v$$

最后到达速度

$$v=\frac{2r_s^2}{9\eta}(\rho_s-\rho)g\qquad(1)$$

16.32　设计一个求黏度 η 的理想实验．

解　☞ 如图 16-11 所示，两块无限大平板 A、B 相距 d，中间充满某种液体．在平板 B 上施加恒力 F，使平板 B 相对 A 以速度 v_0 运动．在距板 A y 处取一薄层流体，若它的速度 $v(y)=v_0y/d$，则它是层流．因此，流体所受的剪切应力 σ_s 正比于 v_0/d，比例系数即为黏度 η，即

$$\sigma_s=\eta v_0/d\qquad(1)$$

由(1)式可以得出：黏度的国际单位为帕斯卡·秒或泊肃叶：1 Pl＝1 Pa·s＝1 N·s/m^2．

16.33　用旋转柱体黏性测量仪测量蓖麻油在 20℃ 时的黏度．已知内柱体半径 $r_1=4.00$ cm，外柱体半径 $r_2=4.28$ cm．现将内柱体浸到蓖麻油内深度 $h=10.2$ cm 处，若外柱体以 20.0 r/min 的角速度旋转时，读出扭力矩 $T=3.24\times10^{-2}$ N·m．求蓖麻油的黏度．

解　☞ 可以将测量仪内、外柱体所夹部分看成图 16-11 中理想的平行板体系，因此由题 16.32

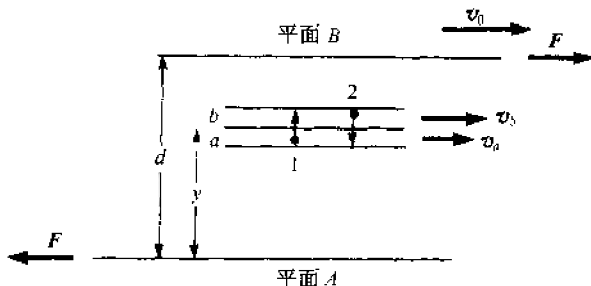


图 16-11

(1)得到 $\eta=\sigma_s(d/v_0)$.内柱体与油接触的表面积 $a=2\pi r_1 h$,因此 $\sigma_s=F/2\pi r_1 h$,其中 F 为内柱受到的蓖麻油提供的推力,此力由外柱体施加,并产生力矩 $T=r_1F$,力矩大小可从转矩测量仪上读出因此,剪切应力 σ_s 又可表示为$\sigma_s=T/(2\pi r_1^2 h)$.因为内柱体静止,所以两柱体的相对速度 $v_0=\omega r_2$,其中 ω 为外柱体的角速度.而柱体间距 $d=r_2-r_1$,利用上述 σ_s, v_0, d 的值可得到

$$\eta=\frac{T(r_2-r_1)}{2\pi\omega r_1^2 r_2 h}$$

代入数据得

$$\eta=\frac{(3.24\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m})(0.28\times10^{-2}\mathrm{m})}{2\pi\left(\frac{20.0\ \mathrm{r/min}\times2\pi\ \mathrm{rad/r}}{60\ \mathrm{s/min}}\right)(400\times10^{-2}\ \mathrm{m})^2(4.28\times10^{-2}\ \mathrm{m})(10.2\times10^{-2}\ \mathrm{m})}$$
$$=0.99\ \mathrm{Pl}$$

16.34 一半径为 1 mm 的铝球掉入 20 ℃ 的水中,求它最后达到的速度.设为层流,铝的比重为 2.7;水的 $\eta=8\times10^{-4}$ Pl.

解 ☞ 将数据代入题 16.31(1)中,求出 $v=4.6$ m/s(实际上这里不能假设是层流,见题 16.51).

16.35 一颗淤泥粒半径为 20 μm,密度为 2×10^3 kg/m^3.水的黏度大约为 1.0 mPl.设水的体积不改变,则这颗淤泥粒最后以多大的速度沉入河底?(除非河水流动速度小于此运动速度,否则淤泥粒不会沉底.)

解 ☞ 利用题 16.31(1)得到

$$v=\frac{2(20\times10^{-6})^2[(2.0-1.0)\times10^3](9.80)}{9(1.0\times10^{-3})}=8.7\times10^{-4}(\mathrm{m/s})=0.87(\mathrm{mm/s})$$

16.36 参见题 16.35.假设从密西西比河底盛 1 L 泥水装入截面积为 50 cm^2 的瓶中.水流内部运动停止后,经过多少时间水中淤泥全部沉入瓶底?

解 ☞ 可计算出瓶内水的高度为 200 mm,因为要求所有的淤泥颗粒全部沉底(那些处于水面处的淤泥占用了所有时间),则不计达到最大速度所需时间.

$$\text{淤泥全部沉底所需时间}=\frac{200\ \mathrm{mm}}{0.87\ \mathrm{mm/s}}=4\ \mathrm{min}$$

16.37 一小玻璃球(密度为 2600 kg/m^3)落入一油桶($\rho_{油}=950$ kg/m^3, $\eta=0.21$ Pl),100 s 内玻璃球下降了 43 cm,求此玻璃球的大小.

解 ☞ 将数据及 $v=4.3\times10^{-3}$ m/s 代入题 16.31(1)中,求出 $r=0.50$ mm.

16.38 某一离心仪内的液体可以在距转轴 10 cm 处以 20 r/s 的转速转动,现将溶解有半径为 b,密度为 1020 kg/m^3 的小颗粒的稀薄水溶液倒入离心仪中,(水的密度为 1000 kg/m^3).不计重力影响,小颗粒最后以多大速率析出溶液?水的 $\eta=8.0\times10^{-4}$ Pl.

解 ☞ 小颗粒保持圆周运动需要的向心力 $m\omega^2 r=[(4\pi b^3\rho)/3](20\times2\pi)^2(0.10)=6.75\times10^6 b^3$ N.液态(混有水)颗粒要保持圆周运动也需要一向心力.因为只有周围的液体能够提供向心力,因此密度比水大的颗粒会朝着离心仪边缘运动,这就如同在重力场中粒子落入水中.离心仪中水提供给颗粒的作用力相当于"浮力".等于同体积水的向心力(与重力场中阿基米德定律同理),因

此，浮力 $=(1000/1020)6.75\times10^6b^3=6.61\times10^6b^3$. 剩下的力由黏力($6\pi\eta bv$)来提供. 因此，由 $6\pi\eta bv=0.14\times10^6b^3$，$\eta=8.0\times10^{-4}$ Pl，解出 $v=9.3\times10^6b^2$ m/s.

16.39 长为 L 的管子的层流内液体的黏力 $F_v=4\pi\eta Lv_m$，其中 η 为液体的黏度，v_m 为液体的最大速度(沿着水管中心轴线)，求水管水平段 v_m 的表达式，结果用水管两头处向后的压强 p_1，向前的压强 p_2，水管半径 r 及 η，L 表示.

解 ☞ 层流内液体的黏力与两头的压强差导致的合压力平衡，即 $p_1\pi r^2-p_2\pi r^2=4\pi\eta Lv_m$，解出 $v_m=[(p_1-p_2)r^2]/(4\eta L)$.

16.40 求血流过一段长 1 mm，半径为 2 μm 的毛细血管后，血压降低多少？(用 mmHg 表示) 已知血流经毛细血管中心处的速度为 0.66 mm/s(血的黏度为 4×10^{-3} Pl).

解 ☞ 由题 16.39 的结果得

$$p_1-p_2=\frac{(4)(4\times10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s})(10^{-3}\ \mathrm{m})(6.6\times10^{-4}\ \mathrm{m/s})}{(2\times10^{-6}\ \mathrm{m})^2}$$

$$=(2600\ \mathrm{Pa})\left(\frac{1\ \mathrm{mmHg}}{133\ \mathrm{Pa}}\right)=19.5\ \mathrm{mmHg}$$

16.41 利用题 16.39 的结果，求液体经过水管的体积流量. 层流内液体经过截面的平均速度为 $v_m/2$.

解 ☞ 体积流量 H 等于水管截面积与平均流速的乘积，即 $H=(\pi r^2v_m)/2$. 利用题 16.39 中 v_m 的表达式，得到 $H=[\pi r^4(p_1-p_2)]/(8\eta L)$. 这也就是泊肃叶定律.

16.42 题 16.40 中，需要多大的功率才能将血压过毛细血管？假设 $p_1=10.0$ kPa.

解 ☞ 功率 $P=F\times v=(p_1\pi r^2)(v_m/2)=p_1H$ (根据题 16.41)因此

$$P=\frac{(1.0\times10^4\ \mathrm{N/m^2})(3.14)(2\times10^{-6}\ \mathrm{m})^4(0.26\times10^4\ \mathrm{N/m^2})}{8\times(4\times10^{-3}\ \mathrm{Pl})(10^{-3}\ \mathrm{m})}$$

$$=4.1\times10^{-11}\ \mathrm{W}$$

16.43 假设将水管半径加倍而其余物理量不变，则体积流量 H 怎么改变？将液体推过水管所需的功率如何改变？流体速度如何改变？

解 ☞ 利用泊肃叶定律(题 16.41)，假设 p_1、p_2、η 和 L 是常数，则 r 加倍时，H 变为原来的 16 倍；由题 16.42 得 $P=p_1H$，则 P 也变为原来的的 16 倍；由题 16.39 得到速度与 r^2 有关，所以流体速度变为原来的 4 倍.

16.44 证明：雷诺数 $R=\dfrac{\rho v_0 d}{\eta}$ 是无量纲数.

证 ☞ 量纲$[R]=\dfrac{(\mathrm{kg/m^3})(\mathrm{m/s})(\mathrm{m})}{(\mathrm{N/m^2})(\mathrm{s})}=\dfrac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{N\cdot s^2}}=\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}}=$ 无量纲数

16.45 一潜水艇长 100 m，船体可以看成直径为 15 m 的柱体. 它潜入水底后以 40 节，即 20 m/s 的速度航行. 船体周围的水流是层流还是湍流？

解 ☞ 上述问题中的水一般是海水而不是纯水，但我们仍然可以用纯水的黏度 η 和 ρ 来计算出近似的雷诺数. 特征线度 d 在 15 m 到 100 m 之间，取 $d=30$ m，则

$$R=\frac{\rho v_0 d}{\eta}=\frac{(1\times10^3\ \mathrm{kg/m^3})(20\ \mathrm{m/s})(30\ \mathrm{m})}{1\times10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}}\approx1\times10^9$$

从表 16-1 查出，此值远大于由层流变为湍流的雷诺数，所以水流是湍流，黏力正比于 v^3.

表 16-1　一些临界的雷诺数

R(近似)	现象
10	球体严格满足斯托克斯定律的上限.
1200	流入量不规则的圆柱管内的流体开始产生湍流.
3000	长圆柱管内的流体开始产生湍流.
2×10^4	出口为最佳形状的管子内流体开始产生湍流.
3×10^5	湍流内黏力与 v^2 有关的上限.

16.46 计算在一根直径为 2 cm 的水管内的水流动速度达到何值时变为湍流.假设温度为 20 ℃,$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ Pa·s.

解 ☞ 利用雷诺数公式得到水流速度 $v = (\eta R)/(\rho d)$,从表 16-1 中查出 $R_c = 3000$,所以

$$v_c = \frac{\eta R_c}{\rho d} = \frac{(1.0 \times 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s})(3 \times 10^3)}{(1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(2 \times 10^{-2}\ \text{m})} = 0.150\ \text{m/s}$$

16.47 在题 16.46 中,当水以上述速度流过水管时,若在水管出口端接上一个水桶,求水的流量.

解 ☞ 当黏性液体流过一圆柱形水管时,在水管中心轴处速度最大,到水管内表面处逐渐降为零.现在,我们忽略水流速度的变化,取题 16.46 中算出的速度表示水管内水流的速度.于是,单位时间内管子送出水的体积为

$$\text{体积流量} = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) v_c = \left[\frac{\pi(2.0 \times 10^{-2})^2}{4}\right](0.150)$$
$$= 4.71 \times 10^{-5}(\text{m}^3/\text{s}) = 2.83(\text{L/min})$$

16.48 根据题 16.46 和 16.47,(a)若要使桶内水加倍,则水泵的功率应增加多少?(b)若为层流,结果又如何?

解 ☞ (a)湍流中黏力正比于流速的平方,所以水泵功率正比于流速的立方.当 $v \geq v_c$ 时,若要使体积流量加倍,则水泵功率还需增加为 8 倍.(b)若为层流,黏力正比于速度 v,因此若要使体积流量加倍,则水泵功率增加为 4 倍.

16.49 计算题 16.33 中旋转柱体黏性测量仪的雷诺数.设 20 ℃时蓖麻油的密度为 0.96×10^3 kg/m^3.并将计算结果与表 16-1 中的关键雷诺数比较.

解 ☞ 要计算雷诺数,必须先确定特征线度 d 和特征速度 v_0.我们取 $v_0 = \omega r_2$,即两圆柱间的相对速度;$d = r_2 - r_1$,即两圆柱间的距离.将数据 $\rho = 0.96 \times 10^3$ kg/m^3,$\omega = 20.0$ r/min $= 2.09$ rad/s,$r_1 = 4.00 \times 10^{-2}$ m,$r_2 = 4.28 \times 10^{-2}$ m 代入得到 $v_0 = 8.96 \times 10^{-2}$ m/s;$d = 2.8 \times 10^{-3}$ m.利用已测出的黏度 $\eta = 0.99$ Pa·s,求出雷诺数

$$R = \frac{\rho v_0 d}{\eta} = \frac{(0.96 \times 10^3)(8.96 \times 10^{-2})(2.8 \times 10^{-3})}{0.99} = 0.24$$

此值比表 16-1 列出的关键雷诺数都小.

16.50 参见题 16.33 和 16.49,(a)题 16.33 中假设流体为层流成立吗?(b)如何用黏滞性测量仪验证流动为层流?

解 ☞ (a)题 16.49 中计算出的雷诺数小于关键雷诺数,因此流动满足层流假设.(注意:必须是层流时,才能用黏滞性测量仪测出黏度.)(b)让转盘以各种角速度旋转.若为层流,则内柱体的力矩正比于外柱体的速度.因为流动为层流且扭转游丝是在它的线性结果范围内,则指针角位移正比于转盘的角速度.

16.51 参见题 16.31,(a)利用最终速度 v 求雷诺数,当半径 r_s 取何值时能够假设流体为层流(参见表 16-1),(b)利用 $\rho_s = 7.9 \times 10^3$ kg/m^3,$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ Pl,求出 v,R,r_{max}的值.

解 ☞ (a)用球的直径 $2r_s$ 作为特征长度,求出雷诺数

$$R = \frac{2\rho v r_s}{\eta} = \frac{4r_s^3}{9\eta^2}(\rho_s - \rho)\rho g$$

当 $R < R_c$ 时,流体为层流,即

$$r_s < \left[\frac{9\eta^2 R_c}{4(\rho_s - \rho)\rho g}\right]^{1/3}$$

根据表 16-1,球体的 $R_c = 10$,因此我们得到满足层流条件时球体半径应小于

$$r_{max} = \left[\frac{45\eta^2}{2(\rho_s - \rho)\rho g}\right]^{1/3}$$

(b) $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$, $\rho = 1.00 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $\rho_s = 7.9 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $\eta = 1.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$，最终速度由下式给出：$v = (1.5 \times 10^7\ \mathrm{m^{-1} \cdot s^{-1}}) r_s^2$，雷诺数 $R = (3 \times 10^{13}\ \mathrm{m^{-3}}) r_s^3$，满足层流条件的最大半径 $r_{max} = 69\ \mu\mathrm{m}$.

第十七章 温度与热膨胀

表 17-1 和 17-2 给出了 17 章和 18 章所需的数据. 注意温标单位, 摄氏度(℃)与开尔文(K)等价, 如铝的比热可为 0.22 kcal/kg·K. 另外注意表中的数据可以利用 1 cal = 4.184 J 换算到国际单位制.

表 17-1 固体热常数

物质	熔点 /℃	线膨胀系数 /℃⁻¹	比热 kcal/kg·℃	熔解热 kcal/kg	BTU/lb
铝	660	0.0000255	0.22	76.8	140
铋	271	0.000013	0.030	12.6	22.7
黄铜		0.0000193	0.090		
紫铜	1084	0.0000167	0.093	43	77
玻璃		0.0000083	0.20		
金	1064	0.0000142	0.031		
冰	0	0.000051	0.50	79.8	144
铁	1535	0.000012	0.11	30	54
铅	327	0.000029	0.031	5.4	9.7
汞	−38.9		0.033	2.8	5.4
镍	1452	0.000013	0.106	4.6	8.3
铂	1772	0.000009	0.032	27	48.6
银	962	0.000019	0.057	22	39
钢		0.000012	0.11		
钨	3410	0.0000045	0.032		
锌	420	0.000032	0.092	28.1	50.6

表 17-2 液体热常数

物质	沸点 /℃	体积膨胀系数 /℃⁻¹	比热 kcal/kg·℃	汽化热 kcal/kg	BTU/lb
乙醇	78.1	0.0011	0.55	205	369
氨水	−34			294	529
苯胺	184		0.514	110	198
苯	80.3	0.00124	0.34	94.4	170
三氯甲烷	61	0.00126	0.232	58	106
乙醚	34.5	0.00163	0.56	88.4	159
汽油	70～90	0.0012		71～81	128～146
甘油	290	0.00053	0.58		
水银	358	0.000182	0.0332	68	122
松脂	159	0.00094	0.42	70	126
水	100	0.00030	1.00	540	970

17.1 温标;线膨胀

17.1 将下列温度用摄氏(Celsius)、开尔文(Kelvin)温标表示:68 ℉, 5 ℉, 176 ℉.

解 ☞ $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$; $T_K = t_C + 273.15 \approx t_C + 273$

所以

$$t_F = 68°F \Rightarrow t_C = 86\ ℃, T_K = 293K$$

$$t_F = 5\ °F \Rightarrow t_C = -15\ ℃, T_K = 258K$$

$$t_F = 176\ °F \Rightarrow t_C = 80\ ℃, T_K = 353K$$

17.2　将下列温度用华氏(Fahrenheit)、兰氏(Rankine)温标表示:30 ℃,5 ℃,−20 ℃.

解 ☞ $t_F = \frac{9}{5}t_C + 32; T_R = t_F + 459.67 \approx t_F + 460$

所以

$$t_C = 30\ ℃ \Rightarrow t_F = 86\ °F,\quad T_R = 546°R$$

$$t_C = 5\ ℃ \Rightarrow t_F = 41\ °F,\quad T_R = 501°R$$

$$t_C = -20\ ℃ \Rightarrow t_F = -4\ °F,\quad T_R = 456°R$$

17.3　温度为何值时摄氏温标和华氏温标有相同的数值?

解 ☞ $t_F = \frac{9}{5}t_C + 32$,设 $t_F = t_C = x$,则

$$x = \frac{9}{5}x + 32,\ 即\ \frac{4}{5}x = -32,\ 得\ x = -40$$

此时,$t_F = -40°F$,$t_C = -40\ ℃$,温度值相同.

17.4　在 1 标准大气压下酒精的沸点是 78.5 ℃,凝固点是 −117 ℃,将这两个温度用(a)开尔文温标,(b)华氏温标表示.

解 ☞ (a)开尔文温度=摄氏温度+273.15=78.5+273.15=351.7(K),读作"351.7 开";同理对于 117 ℃,开尔文温度=−117+273.15=156(K).

(b)利用华氏温度 $= \frac{9}{5}$(摄氏温度)+32

则沸点 $= \frac{9}{5}(78.5) + 32 = 141 + 32 = 173(°F)$

$$凝固点 = \frac{9}{5}(-117) + 32 = -179(°F)$$

17.5　20 个标准大气压下,氢在 −235 ℃下液化,将这个温度用华氏温标表示.

解 ☞ $t_F = 1.8t_C + 32 = 1.8(-235) + 32 = -391°$

17.6　房间内的温度为 77 °F,将这个温度用摄氏温标表示.

解 ☞ $t_F = 1.8t_C + 32,\ 77 = 1.8t_C + 32,\ t_C = 45/1.8 = 25°$

17.7　液氢温度为 20 K,将这个温度用华氏温标表示.

解 ☞ 20(K)=20−273=−253(℃)

$$t_F - 1.8t_C + 32 = 1.8(-253) + 32 = -423(°F)$$

17.8　求温度从 12 ℃上升到 32 ℃时长 50 m 的紫铜丝的伸长量.

解 ☞ $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = (1.67\times10^{-5}℃^{-1})(50\ m)(20\ ℃) = 16.7\ mm$

(α 的值能在表 17-1 中找到)

17.9　一根 3 m 长的杆在温度上升 60 ℃时伸长了 0.091 cm,求这种材料的 α 值.

解 ☞ $\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{0.091\times10^{-2}\ m}{(3\ m)(60\ K)} = 5.1\times10^{-6}\ K^{-1}$

17.10　在 15 ℃时,轮胎直径为 30.000 in,钢圈内径为 29.930 in.为了使钢圈能滑过轮胎,必须将钢圈加热到何温度值?

解 ☞ $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$,在此题中 $L_0 = 29.930$ in,$\Delta L = 0.070$ in,于是 $\Delta T = 0.070\ in/[(1.2\times10^{-5}℃^{-1})(29.930\ in)] = 195\ ℃$,则末温为 $t_C - 15\ ℃ + 195\ ℃ = 210\ ℃$.

17.11　一黄铜杆在 40 ℃时,长 0.70 m,求此杆在 50 ℃时的长度.

解 ☞ $L = L_0(1 + \alpha\Delta T) - (0.70\ m)[1 + (19.3\times10^{-6}/℃)(10\ ℃)]$

得 $L = 0.70013$ m.

17.12 一根镍钢合金杆在 21 ℃时是 0.62406 m,将温度升高到 31 ℃时此杆伸长量为 121.6 μm,求它在 0℃时的长度和它的线膨胀系数.

解 ☞ 为了求出 0 ℃时的长度,我们需先求出 α 并算出 $\Delta T=-21$ ℃时的 ΔL.注意到 $\Delta L/L\approx\Delta T$,且初始长度都为 L,则两次温度改变时对应的长度改变为 $\Delta L_1/\Delta L_2=\Delta T_1/\Delta T_2$,其中 $\Delta T_1=-21$ ℃(末温为 0 ℃),$\Delta T_2=10°$(末温为 31 ℃),得到

$$\Delta L_1=\left(\frac{-21}{10}\right)(121.6\times10^{-6}\ \text{m})=-255\times10^{-6}\ \text{m}$$

则 0℃时 $L=0.62406\ \text{m}-0.00026\ \text{m}=0.62380\ \text{m}$
为得到 α,注意到

$$\alpha=\frac{1}{L}\frac{\Delta L}{\Delta T}=\frac{121.6\times10^{-6}}{(0.624)(10℃)}=19.5\times10^{-6}\ ℃^{-1}$$

17.13 一根铁条的标准长度为 1 m,若它允许的长度变化量为原长的百万分之一,求允许的最大温度变化范围.

解 ☞ $\Delta L/L=\pm10^{-6}=\alpha\Delta T=12\times10^{-6}\Delta T$,得 $\Delta T=\pm0.083$ ℃.

17.14 一圆柱体在 30 ℃时直径为 1.00000 cm,要将它插入钢板上的洞内,此洞在 30℃时的直径为 0.99970 cm,问必须要将钢板加热到何温度值?

解 ☞ 不管钢板上是否有洞,它都以同样的方式膨胀.因此,钢板上的洞也跟着膨胀.我们要求洞的直径改变量 $\Delta L=(1.00000-0.99970)\ \text{cm}=0.00030\ \text{cm}$,利用 $\Delta L=\alpha L_0\Delta T$,得

$$\Delta T=\frac{\Delta L}{\alpha L_0}=\frac{0.00030\ \text{cm}}{(1.2\times10^{-5}\ ℃^{-1})(0.99970\ \text{cm})}=25.0\ ℃$$

则钢板温度为 30 + 25 = 55 ℃.

17.15 温度为 30 ℃时,一直径为 6 cm 的铁球想要通过铜板上的一个洞.发现此球直径嫌大 0.010 mm,问温度为何值时,此铁球恰能穿过这个洞?

解 ☞ 用 I 代表铁球,B 代表铜板.$L_I=6$ cm,$L_I-L_B=0.001$ cm(温度 $t=30$ ℃).因为铜板均匀膨胀,则洞也以同样的比例膨胀,因此加热球和板时,球和洞的直径都将增大,而 $\alpha_B>\alpha_I$,故洞直径增大更快.由于 $\Delta L_B-\Delta L_I=0.001$ cm,$\Delta L_B=\alpha_B L_B\Delta t$,$\Delta L_I=\alpha_I L_I\Delta t$.在此公式中可近似认为 $L_B\approx L_I=6$ cm,于是

$$\Delta L_B-\Delta L_I=(\alpha_B-\alpha_I)L_I\Delta t=0.001\ \text{cm}$$

即$[(1.9\times10^{-5}℃^{-1})-(1.2\times10^{-5}℃^{-1})](6\ \text{cm})\Delta t=0.001\ \text{cm}$
解得 $\Delta t=23.8$ ℃,末温 $t=30$ ℃ $+23.8$ ℃ $=53.8$ ℃

17.16 要把一钢圈套到木轮子上.在初始温度 20 ℃时,木轮直径为 1.1000 m,钢圈内径为 1.0980 m,问必须将钢圈加热到何温度值?

解 ☞ 从表 17-1 中查出钢的 $\alpha=1.2\times10^{-5}℃^{-1}$.
则 $\Delta L=1.1000-1.0980=0.0020(\text{m})=\alpha L\Delta t$
即 $0.0020=(1.2\times10^{-5})(1.098)\Delta t$

$$\Delta t=152\ ℃\quad \Delta t+20=172\ ℃$$

17.17 长为 30 m 的铁轨的两端固定在地面上,因阳光照射使温度上升了 50 ℃并导致铁轨弯曲.假设此铁轨由两个等长的直段连接而成,计算连接点将上升多高.

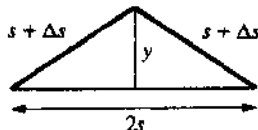


图 17-1

解 ☞ 如图 17-1 所示,设原长为 2 s,末长为 $2(s+\Delta s)$,用 y 表示中心连接点上升的高度.虽然两端固定,线膨胀系数仍为 α,则 $\Delta s=\alpha s\Delta T$.利用勾股定理:

$$y=\sqrt{(s+\Delta s)^2-s^2}=\sqrt{2s\Delta s+(\Delta s)^2}=s\sqrt{2\alpha\Delta T+(\alpha\Delta T)^2}$$

将 $s=15.0$ m,$\alpha=12\times10^{-6}\ \text{K}^{-1}$,$\Delta T=50$ K 代入,得到

$$y=(15.0\ \text{m})\sqrt{(12\times10^{-4})+(6\times10^{-4})^2}=0.52\ \text{m}$$

17.18　两根由不同材料制成的平行杆[图 17-2(a)]，线膨胀系数分别为 α'、α''，将它们固定在一起，间距为 d．改变温度使它们弯曲成两段中心角为 θ 的圆弧[图 17-2(b)]．求平均半径 R．

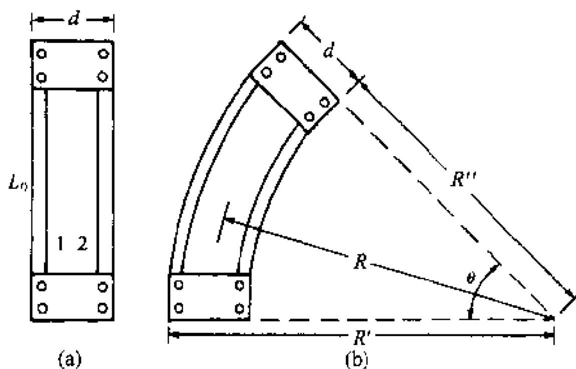


图 17-2

解　☞ 假设在绝对零度时两杆平行，初始长度为 L_0，则在任意温度 T 时，两杆长度分别为

$$L' = \theta R' = L_0(1 + \alpha' T),\ L'' = \theta R'' = L_0(1 + \alpha'' T)$$

其中 R'、R'' 分别为两段圆弧的半径，θ 为中心角，有 $R' - R'' = d$．

两式相减得

$$\theta(R' - R'') = (\alpha' - \alpha'')L_0 T,\ \theta = \frac{(\alpha' - \alpha'')L_0 T}{d}$$

两式相加得

$$\theta(R' + R'') = 2L_0 + (\alpha' + \alpha'')L_0 T$$

则平均半径为

$$R = \frac{R' + R''}{2} = \frac{2L_0 + (\alpha' + \alpha'')L_0 T}{2\theta}$$

$$= \frac{2L_0 + (\alpha' + \alpha'')L_0 T}{2(\alpha' - \alpha'')L_0 T/d} = \frac{2 + (\alpha' + \alpha'')T}{2(\alpha' - \alpha'')T}d$$

因为 $(\alpha' + \alpha'')T \ll 2$，所以 $R \approx \frac{2d}{2(\alpha' - \alpha'')T} = \frac{d}{(\alpha' - \alpha'')T}$．

17.19　(a)一铝制测量尺在 5 ℃时是准确的，用此铝尺在 35 ℃时测量到一段距离为88.42 cm，计算由于铝尺膨胀所产生的长度偏差，(b)在 35 ℃时测出长度为88.42 cm的钢条在此温度下实际长度为何值？

解　☞ (a)由于温度升高 $\Delta t = 30$ ℃使铝尺上 88.42 cm 的刻度离零刻度线距离比实际距离要远，偏离距离 $\Delta L = \alpha_{Al} L_{Al} \Delta t = (2.55 \times 10^{-5}℃^{-1})(88.42\ \text{cm})(30\ ℃) = 0.068\ \text{cm}$．

(b)根据(a)得到 35 ℃时为 88.42 cm 的长度实际应为 88.49 cm，所以 35 ℃时，这根钢条实际长度为 88.49 cm．

17.20　一钢卷尺在 70 ℉时测量是准确的．在 15 ℉时测量某建筑物的宽度，读数为 150 ft．求温度改变导致的长度偏差．钢的线膨胀系数为$(6.7 \times 10^{-6})/℉$．

解　☞ $\Delta L = \alpha L \Delta t = (6.7 \times 10^{-6})(150)(15° - 70°) = (6.7 \times 10^{-6})(150)(-55°) = -0.055(\text{ft})$

钢卷尺缩短 0.055 ft，故读数比实际值大 0.055 ft．

17.21　温度为 10 ℃时用钢卷尺测量一根铜杆，读数为 90.00 cm，若 10 ℃是钢卷尺的校准温度，求温度升至 30 ℃时的读数．

解　☞ 在 30 ℃时，铜杆长度为 $L_0(1 + \alpha_C \Delta T)$，同时卷尺上相邻厘米刻度间距为 $(1\ \text{cm})(1 + \alpha_S \Delta T)$．因此，卷尺上读出的长度为

$$\frac{L_0(1+\alpha_C\Delta T)}{(1\ \text{cm})(1+\alpha_S\Delta T)}=\frac{(90\ \text{cm})[1+(1.7\times10^{-5}\ ℃^{-1})(20℃)]}{(1\ \text{cm})[1+(1.2\times10^{-5}\ ℃^{-1})(20\ ℃)]}$$

$$=90\frac{1+3.4\times10^{-4}}{1+2.4\times10^{-4}}$$

利用$\frac{1}{1+x}\approx1-x(x\ll1)$,得到

$$90\frac{1+3.4\times10^{-4}}{1+2.4\times10^{-4}}\approx90(1+3.4\times10^{-4})(1-2.4\times10^{-4})$$

$$\approx90(1+3.4\times10^{-4}-2.4\times10^{-4})=90+0.009$$

则钢卷尺上的读数为 90.01 cm.

17.22 一钢卷尺在 20 ℃时是校准的,求温度为 −15 ℃的冬天此尺的百分误差.

解 ☞ 温度从 20℃变到 −15 ℃,$\Delta T=-35$ ℃,因此

$$\frac{\Delta L}{L_0}=\alpha\Delta T=(1.2\times10^{-5}℃^{-1})(-35\ ℃)=-4.2\times10^{-4}=-0.042\%$$

17.23 温度为 30 ℃时,将一根截面积为 2.0 mm^2 的钢丝固定在相距 1.50 m 的两端,此时钢丝平直但无张力.若现将温度降至 −10 ℃,保持两端点固定,求钢丝上的张力.已知钢的杨氏模量 $Y=200000$ MPa.

解 ☞ 若不将钢丝两端固定,则它在温度下降时缩短 ΔL,

$$\Delta L=\alpha L_0\Delta T=(1.2\times10^{-5}\ ℃^{-1})(1.5\ \text{m})(40\ ℃)=7.2\times10^{-4}\ \text{m}$$

但现在钢丝两端是固定的,因此两端的力恰将钢丝拉伸 ΔL.根据 $Y=(F/A)/(\Delta L/L)$,得到

$$张力=F=\frac{YA\Delta L}{L}$$

$$=\frac{(2\times10^{11}\ \text{N/m}^2)(2\times10^{-6}\ \text{m}^2)(7.2\times10^{-4}\ \text{m})}{1.5\ \text{m}}=192\ \text{N}$$

严格地讲,在计算张力 F 时应用$(1.5-7.2\times10^{-4})$ m,而不是 L,此处我们将 ΔL 忽略.

17.24 −10 ℃时建造一幢建筑物,把一根截面积为 45 cm^2 的钢梁两端砌在支柱上.若两固定端不能移动,则温度上升到 25 ℃时钢梁上的压力为多大?钢的 $Y=200000$ MPa.

解 ☞ 与题 17.24 相同:

$$\frac{\Delta L}{L_0}=\alpha\Delta T=(1.2\times10^{-5}\ ℃^{-1})(35\ ℃)=4.2\times10^{-4}$$

则

$$F=YA\frac{\Delta L}{L_0}=(2\times10^{11}\ \text{N/m}^2)(45\times10^{-4}\ \text{m}^2)(4.2\times10^{-4})=380\ \text{kN}$$

17.25 温度在 4 ℃时将一根长 8 m,截面积为 150 cm^2 的水平钢梁两端固定在混凝土柱上,当温度升高到 30 ℃时,这根钢梁作用在柱上的水平力有多大?已知钢的杨氏模量为 $Y=200000$ MPa.

解 ☞ 根据杨氏模量定义得 $F/A=Y\Delta L/L$,所以 $F=YA\alpha\Delta T$,将已知量代入得$(2\times10^{11}\ \text{Pa})(1.5\times10^{-2}\ \text{m}^2)(12\times10^{-6}℃^{-1})(26)=940$ kN.

17.26 温度为 20 ℃时在一烧瓶内注满水银后封口,求温度在 100 ℃时烧瓶内的压强.(水银的体积弹性模量 $B=2500$ MPa,体膨胀系数 ν 从表 17-2 中查出,不计玻璃膨胀.)

解 ☞ 先求$\frac{\Delta V}{V}=\nu\Delta T=(182\times10^{-6})(80)=1.46\times10^{-2}$,瓶内压强可从体积弹性模量的表达式中求出 $p=B|\Delta V/V|=(2500\ \text{MPa})(1.46\times10^{-2})=36$ MPa.

17.27 祖父的挂钟的钟摆由黄铜制成,此钟摆在 20 ℃时校准,周期为 1 s,在 30 ℃的温度下工作时,一周后此钟读数变快还是变慢了?与标准时间相差多少?

解 ☞ 在 20 ℃时,$T_0=2\pi(L_0/g)^{1/2}=1$ s

在 30 ℃时,铜摆长度 $L=L_0[1+(19.3\times10^{-6})(10\ ℃)]$,周期 $T=2\pi(L/g)^{1/2}=T_0(1+1.93\times$

$10^{-4})^{1/2} = 1.0001\ T_0$. 因此挂钟慢了$(T - T_0)(1\ 周) = (10^{-4}\ s)(60\times 60\times 24\times 7) = 60\ s$.(注意:周期变大,计时变少,故钟变慢).

17.28 图 17-3 的钟摆能补偿温度改变而引起的变化,保证准确报时.因为它的摆杆与摆锤由不同材料制成,温度改变时悬点到摆动中心的距离固定不变.若此钟每秒滴答一次,求摆各部分的长度.

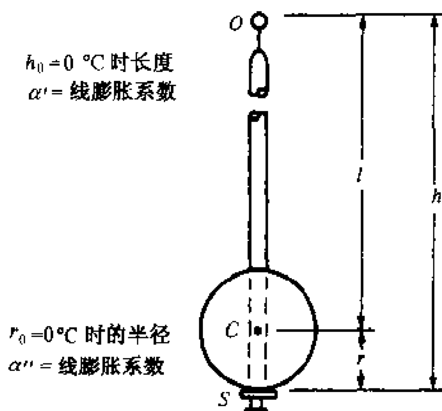


图 17-3

解 ☞ 轻杆 OS 通过调节螺丝 S 固定摆锤.把摆锤中心 C 认为即是钟摆的摆动中心(题 0.00),则摆的有效长度 $l = h - r$.现有

$$h = h_0(1 + \alpha'\Delta T), \quad r = r_0(1 + \alpha''\Delta T)$$

其中 $\alpha'' \gg \alpha'$.于是 $l = h_0 - r_0 + (h_0\alpha' - r_0\alpha'')\Delta T$,若 $h_0\alpha' - r_0\alpha'' = 0$,则 l 与温度无关.而 $l_0 = h_0 - r_0$,l_0 即为此钟摆必须保持的长度,解最后两个方程可得出 h_0 和 r_0:

$$h_0 = \frac{\alpha'' l_0}{\alpha'' - \alpha'} \qquad r_0 = \frac{\alpha' l_0}{\alpha'' - \alpha'}$$

若此钟每秒滴答一次,则钟摆周期(2 s)为

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}, \quad 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}},\text{得 } l_0 = \frac{g}{\pi^2}$$

最后求出各部分长度得

$$h_0 = \frac{\alpha'' l_0}{\alpha'' - \alpha'} = \frac{\alpha''(g/\pi^2)}{\alpha'' - \alpha'}, \quad r_0 = \frac{\alpha'(g/\pi^2)}{\alpha'' - \alpha'}$$

17.29 机械表内齿轮的转动频率由下式得出:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{I}} = \frac{1}{2\pi G}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

其中 I 是转动惯量,G 是转动半径.25 ℃时机械表计时准确.若齿轮由铝制成,问在温度为 −25 ℃的一天内,此机械表快了多少秒?若齿轮由铂制成,结果如何?

解 ☞ 假设转动常数 K 不随温度变化,则齿轮半径变化引起的频率改变量 $d\nu$ 由下式得出:

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dG}dG = \frac{1}{\nu}\left(\frac{-1}{2\pi G^2}\sqrt{\frac{K}{M}}\right)dG = \frac{-dG}{G}$$

因为齿轮结构均匀,故当温度变化时,它只改变大小而不改变形状.因此它的转动半径 G 随温度改变而产生线性变化:

$$\frac{dG}{G} = \alpha dT$$

其中 α 是线膨胀系数.假设 αdT 与整体相比很小,且 α 随温度变化很小,则上式认为是精确的.于是 $d\nu/\nu = -\alpha dT$,则此机械表每天快的秒数为$(86400\ s/day)(d\nu/\nu) = (8.64\times 10^4\ s/day)(-\alpha dT)$.此题中 $dT = -50$ ℃,若齿轮由铝制成,$\alpha = 25.5\times 10^{-6}$/℃,因此表快了$(8.64\times 10^4)(-25.5\times 10^{-6})(-50) = 110.2\ s/day$;若齿轮由铂制成,$\alpha = 9.0\times 10^{-6}$/℃,则表快了$(8.64\times 10^4)(-9.0\times$

$10^{-6})(-50)=38.9(\mathrm{s/day})$.

17.2 面膨胀和体膨胀

17.30 温度为 0 ℃时一铜片的面积为 500 cm^2,求它在 80 ℃时的面积.

解 ☞ 面膨胀系数约为 2α,所以

$$\Delta A = 2\alpha A\Delta t = 2(1.67\times10^{-5})(500)(80^\circ-0^\circ)=1.34\ \mathrm{cm}^2$$

面积为 $500+1.34=501.34\ \mathrm{cm}^2$

17.31 半径为 b_0,质量为 M 的均匀铜球以直径为转轴作角速度为 ω_0 的转动,现将温度从 20 ℃升高到 80 ℃而保持球形,求(a)新的角速度,(b)新的转动动能.

解 ☞ (a)根据角动量守恒,$I_0\omega_0=I\omega$,其中 $I_0=(2Mb_0^2)/5$,$I=(2Mb^2)/5$,而 $b^2=b_0^2(1+2\alpha\Delta T)$.因此 $\omega=(I_0\omega_0)/I=\omega_0/(1+2\alpha\Delta T)=\omega_0[1+2(19.3\times10^{-6})(60)]=0.99769\ \omega_0$.(b)动能 $=(I\omega^2)/2=[0.99769(I_0\omega_0^2)]/2$.

17.32 一各向异性的固体在三个垂直方向上的线膨胀系数分别为 α_x、α_y、α_z,求此固体的体膨胀系数.

解 ☞ 考虑一立方体,此立方体各边分别平行于 x 轴、y 轴、z 轴.$T=0$ 时,边长为 L_0,当温度改变 $\Delta T=(T-0)$时,边长的改变为

$$L_x = L_0(1+\alpha_xT),L_y=L_0(1+\alpha_yT),L_z=L_0(1+\alpha_zT)$$

则体积变为

$$V = V_0(1+\alpha_xT)(1+\alpha_yT)(1+\alpha_zT)\approx V_0[1+(\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z)T]$$

其中 $V_0=L_0^3$.因此体膨胀系数 $\beta\approx\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z$.(注意:体膨胀系数通常用符号 β、γ 表示).

17.33 当温度从 10 ℃升高到 35 ℃时 100 cm^3 水银体积增加多少?

解 ☞ $\Delta V=\beta V_0\Delta T$.水银的体膨胀系数能从表 17-1 中查出:$\beta=1.8\times10^{-4}℃^{-1}$.所以 $\Delta V=(1.8\times10^{-4}℃^{-1})(100\ \mathrm{cm}^3)(25\ ℃)=0.45\ \mathrm{cm}^3$.

17.34 从表 17-1 中查出玻璃的线膨胀系数.若一玻璃瓶在 15 ℃时的容积为 50.000 cm^3,求它在 25 ℃时的容积.

解 ☞ 玻璃将在各个方向均匀膨胀,所以容积也成比例地增加.体膨胀系数与线膨胀系数关系为 $\beta=3\alpha$,所以 $V=V_0(1+3\alpha\Delta T)=(50.000\ \mathrm{cm}^3)[1+3(8.3\times10^{-6}℃^{-1})(10\ ℃)]=50.012\ \mathrm{cm}^3$.

17.35 当温度从 15 ℃升高到 47 ℃时,求体积为 5 cm×10 cm×6 cm 的铁块的体积变化量.

解 ☞ $V_0=300\ \mathrm{cm}^3$,$\beta=3\alpha$,所以

$$\Delta V = 3\alpha V_0\Delta T = 3(1.2\times10^{-5}℃^{-1})(300\ \mathrm{cm}^3)(32\ ℃)=0.35\ \mathrm{cm}^3$$

17.36 一容积为 300 ml 的敞口铝制容器在 20 ℃时装满甘油,将容器加热到 110 ℃时会有多少体积的甘油溢出?用表 17-1、17-2 中给出的膨胀系数计算.

解 ☞ 溢出甘油的体积为甘油膨胀的体积 ΔV_g 与铝制容器膨胀的体积 ΔV_a 的差值.

$$\Delta V_g = \beta_gV\Delta t,\Delta V_a = 3\alpha V\Delta t$$

$$\Delta V_g-\Delta V_a = \beta_gV\Delta t-3\alpha V\Delta t=(\beta_g-3\alpha)V\Delta t$$

从表 17-1 中查出 $\alpha=2.55\times10^{-5}℃^{-1}$,从表 17-2 中查出 $\beta=5.3\times10^{-4}℃^{-1}$.

$$\Delta V_g-\Delta V_a = [(5.3\times10^{-4})-3(2.55\times10^{-5})](300)(110^\circ-20^\circ)$$

$$=(4.535\times10^{-4})(27000)=12.2(\mathrm{mL})$$

所以有 12.2 mL 甘油溢出.

17.37 20 ℃时 1 L 松节油恰将一玻璃试管装满,当温度上升到 86 ℃时将有多少体积的松节油溢出?

解 ☞ 温度上升时,玻璃试管容积 V_G 与松节油体积 V_T 都将增大,溢出体积应为两者差值:

$\Delta V_T-\Delta V_G=(\beta_T-\beta_G)V\Delta T$，$\beta_G=3\alpha_G$，用表 17-1、17-2 给出的数据，得

$$\Delta V_T-\Delta V_G=[(9.4\times10^{-4}\,℃^{-1})-(0.25\times10^{-4}\,℃^{-1})](1\text{ L})(66\,℃)=60\text{ mL}$$

17.38 温度为 20 ℃时，金的密度为 19.30 g/cm³，计算金在 90 ℃时的密度.

解 ☞ $d=\dfrac{M}{V}$，因为质量为常数，所以$\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{V_2}{V_1}$，下标 1、2 分别表示 90 ℃和 20 ℃时的物理量.

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{V_2}{V_2(1+3\alpha\Delta T)}=\frac{1}{1+3\alpha\Delta T}\approx1-3\alpha\Delta T\quad(3\alpha\Delta T\ll1)$$

则 $d_1=d_2(1-3\alpha\Delta T)=(19.3\text{ g/cm}^3)[1-3(14.2\times10^{-6}\,℃^{-1})(70\,℃)]=19.24\text{ g/cm}^3$

17.39 0 ℃时水银的密度为 13600 kg/m³，计算水银在 50 ℃时的密度.

解 ☞ 用 ρ_0 表示水银在 0 ℃时的密度，ρ_1 代表在 50 ℃时的密度，V_0 代表 0 ℃时 m kg 水银的体积，V_1 代表 50 ℃时 m kg 水银的体积. 因为质量守恒，即 $m=\rho_0V_0=\rho_1V_1$，所以

$$\rho_1=\rho_0\frac{V_0}{V_1}=\rho_0\frac{V_0}{V_0+\Delta V}=\rho_0\frac{1}{1+(\Delta V/V_0)}$$

而$\dfrac{\Delta V}{V_0}=\beta\Delta T=(1.82\times10^{-4}\,℃^{-1})(50\,℃)=0.0091$，代入上式得

$$\rho_1=(13600\text{ kg/m}^3)\frac{1}{1+0.0091}=13477\text{ kg/m}^3$$

17.40 用 Δl_1 代表温度上升 Δt 而不计玻璃泡膨胀时水银测温计中水银柱的高度，用 Δl_2 代表考虑到玻璃泡膨胀时的高度. 计算$(\Delta l_1-\Delta l_2)/\Delta l_1$ 的值. 此题中只有玻璃泡浸没在需测温的物体中.

解 ☞ 不计玻璃泡的膨胀，则水银柱高度 Δl_1 为

$$\Delta l_1=\frac{\gamma_{Hg}V_{Hg}\Delta t}{A}\tag{1}$$

其中 γ_{Hg}为水银的体膨胀系数，V_{Hg}为玻璃泡内水银的体积，A 为温度计横截面积. 然而，事实上玻璃泡的容积也将膨胀 $3\alpha_gV$，其中 α_g 为玻璃的线膨胀系数，V 是玻璃泡的体积. 因此，水银柱高度不是 Δl_1 而是稍小一点的 Δl_2：

$$\Delta l_2=\frac{(\gamma_{Hg}V_{Hg}-3\alpha_gV)\Delta t}{A}=(\gamma_{Hg}-3\alpha_g)\frac{V\Delta t}{A}\tag{2}$$

其中我们用到 $V_{Hg}=V$，由(1)、(2)式可求出

$$\frac{\Delta l_1-\Delta l_2}{\Delta l_1}=\frac{\gamma_{Hg}-(\gamma_{Hg}-3\alpha_g)}{\gamma_{Hg}}=\frac{3\alpha_g}{\gamma_{Hg}}$$

从表 17-1、17-2 中查出 $\alpha_g=(8.3\times10^{-6})\text{K}^{-1}$，$\gamma_{Hg}=(182\times10^{-6})\text{K}^{-1}$，得到 $(\Delta l_1-\Delta l_2)/\Delta l_1=0.14$.

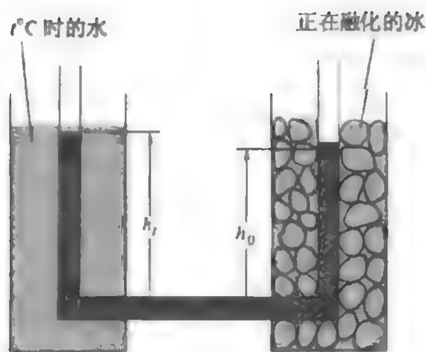


图 17-4

17.41 利用液体在试管中膨胀求出的体胀系数 γ 是液体与试管材料的相对膨胀系数. 图 17-4 所示的装置能测出与容器材料无关的液体的膨胀系数 γ. (a)证明 $\gamma=(h_t-h_0)/h_0t$，(b)若 $h_t-h_0=1.0$ cm，$h_0=100$ cm，$t=20$ ℃，求液体的膨胀系数 γ.

解 ☞ (a)U 形管水平部分的液体处于平衡状态，故有 $\rho_tgh_t=\rho_0gh_0$，其中 ρ_t 为处在热管中的液体的密度，ρ_0 为处在冷管中的液体的密度. 根据体膨胀系数 γ 的定义，给定质量 M 的物体在 t 和 0 ℃时的体积满足关系 $V_t=V_0(1+\gamma t)$，又因为 $\rho_tV_t=\rho_0V_0$，所以密度关系为 $\rho_0=\rho_t(1+\gamma t)$.

现有 $\rho_t h_t = \rho_0 h_0$，所以 $h_t = h_0(1+\gamma t)$，利用此等式求出 γ，得 $\gamma = (h_t - h_0)/(h_0 t)$.

(b)若 $h_t - h_0 = 1.0$ cm，$h_0 = 100$ cm，$t = 20$ ℃，

则 $\gamma = 1.0/[(100)(20)] = 500\times10^{-6}/$ ℃

17.42 0 ℃时，水银温度计内的水银体积为 210 mm^3，此时玻璃泡直径为 0.2 mm，温度计上每度刻度线的间距为多少？

解 ☞ 假设温度从 0 ℃上升到 t，则 $\Delta t = t$. 而 $\Delta V_{Hg} = \beta_{Hg} V_{Hg}\Delta t$，$\Delta V_G = 3\alpha_G V_G \Delta t$，其中 V_{Hg}是 0 ℃时水银的体积，V_G 是 0 ℃时玻璃泡的容积，则 $V_{Hg} = V_G = 210$ mm^3. 因为 $\Delta V_{Hg} > \Delta V_G$，所以水银将上升到玻璃管中，且 $hA_t = \Delta V_{Hg} - \Delta V_G$，其中 h 是水银上升的高度，A_t 是 t 时玻璃管的横截面积，$A_t = \pi r^2(1+2\alpha_G \Delta t)$，其中 $r = 0.1$ mm（0 ℃时的半径），则 $h = \dfrac{(\beta_{Hg} - 3\alpha_G)V_{Hg}t}{\pi r^2(1+2\alpha_G t)} = \dfrac{[(182-25)\times10^{-6}℃^{-1}](210\ \text{mm}^3)t}{0.0314[1+(16.6\times10^{-6}℃^{-1})t]}$. 分母括号内第二项可以忽略，因为在 t 的取值范围内此项≪1，所以 $h = (1.05\ \text{mm}\cdot℃^{-1})t$，间隔为$\dfrac{h}{t} = 1.05$ mm/℃.

17.43 玻璃烧瓶在 0 ℃时容积为 1 升.(a)求它在 50 ℃时的容积，(b)若在 0 ℃时装满水银，温度上升到 50 ℃时有多少水银会溢出烧瓶？

解 ☞ (a)温度改变后烧瓶体积为

$$V_b = V_0(1+3\alpha_G\Delta T) = (1)[1+3(8.3\times10^{-6})(50)] = 1.001(\text{L})$$

(b)水银膨胀后体积为

$$V_m = V_0(1+\beta\Delta T) = (1)[1+(1.82\times10^{-4})(50)] = 1.009(\text{L})$$

所以溢出的体积为 1.009 − 1.001 = 0.008(L)，或 8 mL.

17.44[c] 一均匀毛细管内液体高度用尺量得 L，把毛细管和液体的温度同时升高 ΔT. 证明：再用尺量，液体高度上升了 $\Delta L = L(\gamma - 2\alpha)\Delta T$，其中 γ 为液体的体膨胀系数，α 是毛细管材料的线膨胀系数.

解 ☞ 用微分符号代表各增长量. 毛细管半径为 r，横截面积为 A，温度改变引起的半径增量 $\text{d}r = r\alpha \text{d}T$，其中 α 是毛细管材料的线膨胀系数，$\text{d}T$ 代表温度增加量. 设 $\text{d}r/r \ll 1$，且 $A = \pi r^2$，得到 $\text{d}A/A = 2\text{d}r/r$，则 $\text{d}A \equiv A\beta \text{d}T = A(2\alpha)\text{d}T$，其中 β 代表面膨胀系数. 若温度从 T 升至 $T' \equiv T + \text{d}T$，则毛细管表面积从 A 变为 $A' \equiv A + \text{d}A = A(1+2\alpha \text{d}T)$. 液体的高度改变（从 L 到 $L' \equiv L + \text{d}L$）由液体体积膨胀决定. 因为 $V' = V(1+\gamma \text{d}T)$，其中 γ 为液体的体膨胀系数，有 $L'A' = V' = V(1+\gamma\text{d}T) = LA(1+\gamma\text{d}T)$. 而 $A'/A = 1+2\alpha\text{d}T$，所以

$$L' = L\frac{(1+\gamma \text{d}T)}{(1+2\alpha\text{d}T)} = L\{[1+(\gamma-2\alpha)\text{d}T + O[(\alpha \text{d}T)^2]\}$$

所以当温度增加 ΔT 时，液体高度改变 $\Delta L \equiv L' - L \approx L(\gamma - 2\alpha)\Delta T$，相对改变量为$\dfrac{\Delta L}{L} \approx (\gamma - 2\alpha)\Delta T$

这儿我们假定 $\alpha\Delta T \ll 1$.（注意：用尺子测量高度是为避免直接从刻度读取时由于刻度随毛细管膨胀引起误差）

17.45 证明：从 $\Delta V = \gamma V \Delta T$ 可得到温度改变时密度变化：$\Delta\rho = -\gamma\rho\Delta T$，并说明负号的意义.

证 ☞ $\Delta\rho = \rho - \rho_0 = m/V - m/V_0 = [m(V_0 - V)]/VV_0 = (-m\Delta V)/(VV_0)$，而 $\Delta V/V_0 = \gamma\Delta T$，所以 $\Delta\rho = -(m/V)\gamma\Delta T = -\rho\gamma\Delta T$.

负号说明温度升高时，密度减小.

17.46 证明：压强不变时，理想气体的体膨胀系数为 $1/T$.

证 ☞ 根据 $pV = nRT$，我们得到两个等式 $pV_0 = nRT_0$，$p(V_0 + \Delta V) = nR(T_0 + \Delta T)$. 两式相减得 $p\Delta V = nR\Delta T$，而$(nR)/p = V_0/T_0$，因此可写为 $\Delta V/V_0 = (1/T_0)\Delta T$. 因为 $\Delta V/V_0 = \gamma\Delta T$，容易看出 $\gamma = \dfrac{1}{T_0}$. T_0 为任意温度，故写成任何温度 T，则 $\gamma = 1/T$.

第十八章　热量及其测量

18.1　热量与能量；热功当量

18.1　一铅弹放在1.0 m长的竖直硬纸管内，现将硬纸管反转15次，测出铅弹温度上升了1.0 ℃. 求出这个简易实验获得的热功当量，主要误差在哪里？

解　☞ 假设硬纸管反转极快，则每次反转时铅弹从 $h=1.0$ m 处下落. 经过15次反转，一共有 $Nmgh$ 的势能转化为动能最后转化为热能，其中 m 为铅弹的质量. 假设所有能量都被铅弹吸收，温度升高 $\Delta t=1.0$ ℃的热量来自减少的机械能，即 $mc\Delta t=Nmgh$，其中 c 为铅的比热. 从表17-1查到 $c=0.031$ kcal/kg·℃. 因此

$$1=\frac{Ngh}{c\Delta t}=\frac{(15)(9.80\text{m/s}^2)(1.0\text{m})}{(0.031\text{kcal/kg}\cdot℃)(1℃)}=4.7\ \text{kJ/kcal}$$

根据这个实验，4.7 J的机械能相当于1 cal的热量. 此实验的主要误差来源：能量并没有被铅弹全部吸收. 由于铅弹与硬纸管两底面是非弹性碰撞，因此有一部分能量损失. 另外，铅弹产生的热量有一部分会传递给周围低温环境. 这些影响导致测出的热功当量偏大. 另外，测出的小物体的微小温度变化量也不精确.

18.2　在焦耳实验中，质量为20 kg的物体以恒定速度从1.5 m高处落下并搅动绝热盛水容器中的水. 若容器等价于2 g水，容器内盛有水12 g，最后温度上升了5.0 ℃，求热功当量 $\mathcal{J}$.

解　☞ ΔPE 用J作单位，Q 用cal作单位，得到

$$\mathcal{J}=\frac{\Delta PE}{Q}=\frac{mgy}{m_{水}c\Delta t}=\frac{20(9.8)(1.5)}{(12+2)(1)(5.0)}=4.2\ \text{J/cal}$$

18.3　非洲维多利亚瀑布高122 m，若势能全部转化为热量，计算水下落时温度上升多少？

解　☞ 设水的质量为 m，则

$$mgy=mc\Delta t,\quad gy=c\Delta t$$

利用 $c=1$ kcal/kg·K $=4184$ J/kg·K，将等式两边都化为用焦耳做单位，得：

$$9.8(122)=4184\ \Delta t,\quad \Delta t=0.29\text{K}$$

18.4　质量为2.2 g的铅弹以150 m/s的速度飞行，打上一沙包后停止运动.(a)若摩擦力作功都转化为子弹的内能，子弹停止运动后温度升高多少？(b)若子弹打入一质量为50 g能自由移动的木块，则结果如何？

解　☞ (a)对于子弹有：$K=\frac{1}{2}mv^2=mc\Delta T$. 左边为转化为热量的部分：$K=0.0022\ \text{J}(150)^2/2=24.8\text{J}=(24.8/4.184)\text{cal}=5.91$ cal. 于是，5.91 cal $=(2.2\text{ g})(0.031\text{ cal/g}\cdot℃)\Delta T$，$\Delta T=87℃$

(b)子弹与木块结合为一整体将导致一部分初始动能的损失. 利用碰撞前后动量守恒：$(2.2\text{ g})(150\text{ m/s})=(50\text{ g}+2.2\text{ g})v$，得 $v=6.32$ m/s. $K_f=\frac{1}{2}(0.0522\text{ kg})(6.32\text{ m/s})^2=1.04\text{ J}=0.25$ cal. $\Delta Q=5.91-0.25=5.66\text{ cal}=2.2(0.031)\Delta T'$，得 $\Delta T'=83$ ℃.（注意：符号 Q，ΔQ 表示热量转移，有时也用 H，ΔH 表示.）

18.5　质量 m 的铅弹射穿一段树杆，入射速度为500 m/s，出射速度为300 m/s. 假设此过程中损失的动能有40%转化为子弹的内能，子弹温度上升多少？铅的比热从表17-1可查出.

解　☞ 动能和热能用J做单位，质量用kg做单位，有

$$0.40(\Delta KE)=Q,0.40\left(\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_2^2\right)=mc\Delta T,0.40\left(\frac{1}{2}v_1^2-\frac{1}{2}v_2^2\right)=c\Delta T$$

$$0.40\left(\frac{1}{2}\times500^2-\frac{1}{2}\times300^2\right)=(0.031)(4186)\Delta T,\quad \Delta T=247℃$$

子弹温度上升 247℃.

18.6 长 1.5 m 的垂直硬纸圆柱筒内放入一质量为 m 的铅弹后两底封口,将圆柱筒迅速倒转使铅弹从 1.5 m 高处下落,若连续倒转 100 次,不计热量损失,铅弹温度上升多少?

解 ☞ 此过程中,势能转化为热能. $U_g=(100\ m)(9.8)(1.5)=1470\ m$J,其中 m 的单位是千克. U_g 应等于(130 J/kg·℃)(m kg)ΔT,解出 $\Delta T=11.3$℃.注意:质量 m 与计算结果无关.(等式两边的 m 必须采用相同的单位.)

18.7 在焦耳实验中,挂在绳上的重物绕过滑轮,重物在下落时使桨叶转动从而搅动容器中的水.若重物缓慢下落,无动能改变,减少的势能用于克服摩擦力做功和转化为水的热能.假设 200 g 的重物下降了 2 m,不计损失在桨叶和容器上的热能,容器内 100 g 的水温度上升多少?

解 ☞ 重物损失的机械能 $=mgh=0.20(9.8)(2.0)$ J $=3.92$ J $=0.94$ cal 转化成的热能为 $\Delta Q=cm\Delta T$,其中 c 的单位是 cal/g·℃,m 的单位是 g,于是

$$0.94=1.0(100)\Delta T,\quad \Delta T=0.0094℃$$

18.8 初始温度为 −100℃的铁制火箭碎片水平飞入大气层后立刻完全熔化,假设没有热量损失,碎片飞入大气层的最小速度为多少?

解 ☞ 从表 17-1 中查出铁的比热为 0.11 kcal/kg·K,铁的熔解热为 30 kcal/kg.在此过程中,碎片的动能全部转化为热能.铁的熔点为 1535℃,质量采用千克做单位,得

$$\frac{1}{2}mv^2=[m(30)+m(0.11)(1535^\circ+100^\circ)](4184)$$

$$\frac{1}{2}v^2=(30+179.9)(4184),\quad v^2=1.76\times10^6$$

$$v=1.32\ \text{km/s}$$

18.9 质量为 60 kg 的男孩在打篮球时以 5.0 m/s 的速度奔跑,忽然摔倒,倒地前只有鞋与地板间有滑动.计算鞋与地板间产生的热能为多少卡?若这些热能都被 2.0 cm³ 的某部分肉体吸收,求这部分肉体的温度改变.设人体的比热 $c=1.0$ cal/g·℃,密度 $\rho=950$ kg/m³.

解 ☞ 男孩的动能都转化为热能,即 $Q=(mv^2)/2=[60(25)]/2=750$ J $=179$ cal.而 $Q=c\rho V\Delta T$,179 cal $=(1.0$ cal/g·℃$)(0.950$ g/cm³$)(2.0$ cm³$)\Delta T$,得 $\Delta T=94$℃.

18.10 英制热量单位 Btu 定义为 1 磅水温度升高 1 ℉所需要的热量.(a)证明,用 cal/g·℃和 Btu/lb·℉做比热单位时,两者在数值上是相等的.(b)写出 Btu 与 cal 之间的换算公式.

解 ☞ (a)卡(cal)定义为 1g 水温度升高 1℃所需的热量.于是,铝的比热 $c_{Al}=0.22$ cal/g·℃意味着将 1 磅铝温度升高 1 ℉所需的热量是将 1 磅水温度升高 1 ℉所需热量的 0.22 倍,而后者所需能量即为 1.0 Btu.因此

$$c_{Al}=\frac{0.22(1.0\ \text{Btu})}{(1\ \text{lb})(1\ ℉)}=0.22\ \text{Btu/lb}\cdot℉$$

(b)

$$\frac{1\ \text{cal}}{(1\ \text{g})(1℃)}=\frac{1\ \text{Btu}}{(1\ \text{lb})(1℉)}=\frac{1\ \text{Btu}}{(453.6\ \text{g})\left(\frac{5}{9}℃\right)}$$

所以

$$1\ \text{Btu}=(453.6)\left(\frac{5}{9}\right)\text{cal}=252\ \text{cal}$$

18.11 将下列各物质从 212℉降温至 68℉时有多少 Btu 的热量转移?(a)1 lb 水;(b)2 lb 铅($c=0.36$ cal/g·℃);(c)3 lb 石棉($c=0.20$ cal/g·℃).

解 ☞ 由题 18.10(a)得(a)$\Delta Q=(1)(1.0)(144)=144$(Btu); (b)$\Delta Q=(2)(0.36)(144)=104$(Btu); (c)$\Delta Q=(3)(0.20)(144)=86$(Btu).

18.12　大多数固体在低温下的比热与绝对温度 T 的关系为 $c = AT^3$，其中 A 是一常数．将这样一种固体从 $T = 0$ K 升温至 $T = 20$ K 需要多少热量？

解　☞ 因为 $\Delta Q = cm\Delta T = AT^3 m\Delta T$，当 ΔT 小到约为 0 时，有 $dQ = AmT^3 dT$，将 T 从 0 到 20 积分，得 $Q = 40\ 000\ Am$．

18.13　假设水的汽化热(每克)全部用于提供 1 mol 水相互分离所需要的能量，求每个水分子汽化所需要的能量，并求出此能量相对于沸点对应的能量 kT 的比值．

解　☞ 1 g 水中有 $N_A(0.001/M)$ 个水分子，(M 是以 kg/kmol 为单位的分子的质量)，$= (6.02\times10^{26})(0.001/18) = 3.34\times10^{22}$(个)．从表 17-2 中查出水的汽化热为 540 cal/g，则每个水分子所需能量 $= 540/(3.34\times10^{22}) = 1.612\times10^{-20}$(cal) $= 6.74\times10^{-20}$(J)．而 $kT = (1.38\times10^{-23})(373) = 5.15\times10^{-21}$(J)，比例为 13.1．

18.14　将 9.0℃的冷水倒入加热器中，此加热器以 300 g/min 的速度将水加热到 80℃．要以此速度加热，加热器需要多少电能？假设无热量损失于周围环境中．

解　☞ 每秒加热为 $\frac{300}{60} = 5.0$ g，则 $\Delta Q = cm\Delta T = (1.0\ \text{cal/g·℃})(5.0\ \text{g/s})(71\ ℃)(4.184\ \text{J/cal}) = 1.48$ kW．

18.15　功率为 1.8 kW 的电热器加热一箱水，把这箱 200 kg 的水从 10℃升温至 70℃需要多少时间？忽略损耗于环境中的热量．

解　☞ 电热器提供的电能为$(1.8\ \text{kJ/s})t$，水吸收的热能为 $cm\Delta T = (4.184\ \text{kJ/kg·K})(200\ \text{kg})(60\text{K}) = 5.0\times10^4$ kj，两者相等，得 $t = 2.78\times10^4$ s $= 7.75$ h．

18.16　把 0.3 kg 初温为 20 ℃的铝加热到熔点并使其全部熔解需要多少热量？

解　☞ $Q = mc\Delta T + mL$，铝的比热为 0.22 kcal/kg·℃，熔解热为 76.8 kcal/kg，熔点为 660℃．

$$Q = 0.3(0.22)(660° - 20°) + 0.3(76.8) = 42.24 + 23.04 = 65.3(\text{kcal})$$

18.17　一颗子弹的熔点为 300 ℃，比热为 0.20 cal/g·℃，熔解热为 15 cal/g，要将初温为 0 ℃的这种子弹熔解需多少热量？

解　☞ 先将子弹加热到 300 ℃，再使其熔解．所需要热量 $= (6\text{g})(0.20\ \text{cal/g·℃})(300-0)℃ + (6\text{g})(15\ \text{cal/g}) = 450\ \text{cal} = 1880$ J

18.18　参照题 18.17，子弹至少以何初速度飞行忽然停下时刚好熔化？

解　☞ 1880 J 刚好由动能 $K = \frac{1}{2}(mv^2)$ 提供，即 $1880\ \text{J} = \frac{1}{2}(0.006\text{kg})v_{min}^2$，解得 $v_{min} = 790$ m/s．

18.19　1 g－10 ℃的冰在标准大气压下变成 120 ℃的蒸汽需要多少卡的热量？[设在 1 标准大气压下蒸汽比热为 0.481 cal/(g·℃)．]

解　☞ 所需要的热量分五步计算．第一步：将冰从－10 ℃升温至溶点(0 ℃)，从表 17-1 查出冰的比热为 0.50 cal/(g·℃)，因此这一过程所需热量 $\Delta H_1 = mc_1\Delta t_1 = (1.00\ \text{g})[0.50\ \text{cal/(g·℃)}](10℃) = 5.0$ cal；第二步：将 0 ℃的冰在 1 标准大气压下溶化为水，从表 17-1 查出冰的相变潜热为 79.8 cal/g，因此 $\Delta H_2 = mL_2 = (1.00\ \text{g})(79.8\ \text{cal/g}) = 79.8$ cal；第三步：将水从 0 ℃加热到 100 ℃，此过程所需热量 $\Delta H_3 = mc_3\Delta t_3 = (1.00\ \text{g})(1.000\ \text{cal/g·℃})(100\ ℃) = 100$ cal；第四步：100 ℃的水在 1 标准大气压下汽化，从表 17-2 中查出 1 标准大气压下沸水的相变潜热为 540 cal/g，因此 $\Delta H_4 = mL_4 = (1.00\text{g})(540\ \text{cal/g}) = 540$ cal；第五步：将 100 ℃的蒸汽(在 1 标准大气压下)加热到 120 ℃，设 100 ℃到 120 ℃之间蒸汽的比热是一常数，大小为 0.481 cal/(g·℃)，$\Delta H_5 = mc_5\Delta t_5 = (1\text{g})[0.481\ \text{cal/(g·℃)}](20\ ℃) = 9.62$ cal．因此总的热量为 $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 + \Delta H_5 = (5.0 + 79.8 + 100 + 540 + 9.62)\ \text{cal} = 734.4$ cal．

18.20　在 1 标准大气压下做实验，将 20 g－50 ℃的冰变成 150 ℃的蒸汽，假设水蒸气和冰的比热都为 0.5 kcal/kg·℃，求所需的能量．

解　☞ 用表 17-1，17-2 中给出的熔解热和汽化热，得

$$Q = 0.02(0.5)[0° - (-50°)] + 0.020(80) + 0.020(100° - 0°)$$
$$+ 0.020(540) + 0.02(0.5)(150° - 100°)$$
$$= 0.5 + 1.6 + 2 + 10.8 + 0.5 = 15.4(\text{kcal})$$

18.21 将 2 lb70 ℉的水变成 10 ℉的冰,冰箱必须吸收多少热量?

解 ☞ $Q = mc_{水}\Delta t + mc_{冰}\Delta t_{冰} + mL$

其中 L 是溶解热.由表 17-1 和题 18.10 (a)得 $c_{冰} = 0.50$ Btu/(lb)(℉), $L = 144$ Btu/lb; m 是水的质量.

$$Q = 2(1)(70° - 32°) + 2(0.50)(32° - 10°) + 2(144) = 76 + 22 + 288 = 386(\text{Btu})$$

18.22 一个质量为 60 kg 的成年人一天应摄入 2 000 kcal 的热量,假设这些能量没有损耗到外部环境全部被人体吸取,人体的温度升高多少?设人的平均比热 $c = 0.83$ cal/g·℃.

解 ☞ 温度升高量 ΔT 来自 $Q = mc\Delta T$,即 2000 kcal = (60 kg)(0.83 kal/kg·℃)ΔT,解得 ΔT = 40.1 ℃.

18.23 若没有热量损失,在标准状态下把盛在 0.45 kg 铜杯中的 4.54 kg 的水从 297.59 K 加热到 373.15 K 需多少升天然气?天然气的燃烧热为 37.3 MJ/m^3.

解 ☞ 设天然气的体积为 V,从表 17-1 查出铜的比热为 389 J/kg·K,所以:$(37.3 \times 10^6 \text{ J/m}^3)V = [(4.54 \text{ kg})(4184 \text{ J/kg·K}) + (0.45 \text{ kg})(389 \text{ J/kg·K})](75.56 \text{ K})$.解得 $V = 0.039 \text{ m}^3 = 39$ L.

18.24 燃烧 5 g 煤产生的热量使 1000 mL 水温度从 10 ℃上升到 47 ℃,计算每克煤燃烧时产生的热量.忽略煤的热容.

解 ☞ 用 Q' 表示每克煤的热量,则有

$$(5 \text{ g})Q' = mc\Delta t = (1000\text{g})(1.00 \text{ cal/g·℃})(37℃), Q' = 7400 \text{ cal/g}$$

18.25 煤油的燃烧热为 19000 Btu/lb,假设热量利用率为 70%,将 1000 lb 的水从 50℉升高到 190℉需多少磅煤油?

解 ☞ 设需要煤油质量为 w,则 $0.70\, w(19000 \text{ Btu/lb}) = (1000 \text{ lb})(1.00\text{Btu/lb℉})(190℉ - 50℉)$,解得 $w = 10.5$ lb.

18.2 热量测量;比热;溶解热与汽化热

18.26 铜制热量计质量为 0.30 kg,盛有 0.45 kg 的水,温度为温室 20 ℃,现将一质量为 1 kg,温度为 100 ℃的金属块放入水中,体系最后的温度为 40 ℃.求此金属的比热.

解 ☞ 金属块放出的热量 = 水吸收的热量 + 铜热量计吸收的热量,即 $(mc\Delta T)_{金属} = (mc\Delta T)_{水} + (mc\Delta T)_{铜}$.

注意括号内各项都取正值,因此 ΔT 值都取正.利用表 17-1 所给数据得到

$$(1\text{kg})c(100℃ - 40℃) = (0.45 \text{ kg})(1.00 \text{ kcal/kg·℃})(40℃ - 20℃)$$
$$+ (0.30 \text{ kg})(0.093 \text{ kcal/kg·℃})(40℃ - 20℃)$$

解得 $c = 0.159$ kcal/kg·℃

18.27 0.70 kg 的金属盘盛有 1 kg20 ℃的水,一根 0.5 kg,120℃的铁条放入水中,体系最后的温度为 24.9 ℃,问这个金属盘由何种材料制成?

解 ☞ 利用表 17-1 所给数据(用 kcal, kg, ℃做单位),计算金属的比热 C,若假定无热量损耗在周围环境中,则

铁条放出的热量 = 金属盘和水吸收的热量

$$0.5(0.11)(120° - 24.9°) = 0.70C(24.9° - 20°) + 1(1)(24.9° - 20°)$$
$$5.23 = 3.43c + 4.9, 0.33 = 3.43c, c = 0.096 \text{ kcal/(kg·℃)}$$

因此金属盘材料为铜.

18.28 50 g 0℃的水与 250 g 90℃的水混合后末温为多少?

解 ☞ 吸热 = 放热 （假定容器不参与热交换）

$$(50\ g)(1.00\ cal/g\cdot℃)(t-0℃)=(250\ g)(1.00\ cal/g\cdot℃)(90\ ℃-t)$$

其中 t 表示平衡温度，

$$50\ t=22500-250\ t \quad 即 \quad 300\ t=22500$$

解得 $t=75$ ℃.

18.29 某学生将一个 10 g 的铁钉在煤气灯的火焰上加热后投入 100 g 10 ℃的水中，水温上升了 20 ℃，求火焰温度.

解 ☞ 设铁钉加热后温度为 t，铁钉投入冷水中，铁钉放出的热量等于水吸收的热量. 从表 17-1 中查出铁的比热容，得到

$$(10g)(0.11cal/g\cdot℃)(t-20℃)=(100g)(1.00cal/g\cdot℃)(20℃-10℃)$$

因此 $t-20℃=(1000/1.1)=909℃$，所以火焰温度为 929℃.

18.30 将 250 g120 ℃的镍投入盛在热量计中的 200 g10 ℃的水中，热量计的热容为 20 cal/℃，求此混合物最后的温度.

解 ☞ 镍放出的热量 = 水和热量计吸收的热量

从表 17-1 中查出所需数据，有

$$0.250(0.106)(120°-t)=[(0.200)(1.00)+0.020](t-10℃)$$

$$3.18-0.027t=0.220t-2.20, 0.247t=5.38, t=22℃$$

18.31 要将 500 g 80 ℃的水降温至 20 ℃需要多少 0 ℃的冷水？

解 ☞ 放热 = 吸热，即 $c(500)(80-20)=cm(20)$，得 $m=1500$ g.

18.32 要将 50 g 油从 20 ℃升温至 70 ℃需要多少克 200 ℃的这种油？

解 ☞ 放热 = 吸热，即 $cm(130)=c(50)(50)$，得 $m=19.2$g.

18.33 一块 500 g 400 ℃的铁片掉入 800 g 20 ℃的油中，若油的比热 $c=0.40$ cal/g·℃，求体系最后的温度. 设无热量损耗在周围环境中，从表 17-1 中查出所需数据.

解 ☞ 放热 = 吸热，即 $0.11(500)(400-t)=0.40(800)(t-20)$，解得 $t=75.7℃$.

18.34 将 200 g 20℃的酒精倒入质量为 400 g、温度为 −60 ℃的铝制容器中，不计与周围环境的热交换，求体系的末温. 从表 17-1，17-2 中查所需数据.

解 ☞ 放热 = 吸热，即 $0.55(200)(20-t)=0.22(400)[t-(-60)]$，$2200-110t=88t+5280$，$198t=-3080$，$t=-15.5℃$.

18.35 48 g 初温为 0 ℃的冰放在质量为 2.0 g、温度为 0 ℃的铝制热量计中. 现将 75 g 80 ℃的水倒入热量计中，求体系最后的温度.

解 ☞ 我们用 ΔH 表示体系获得的热量. 当体系吸收热量时，ΔH 为正值；当体系放出热量时，ΔH 为负值. 热量计与冰吸收的热量等于水放出的热量. 假设热水足以使所有的冰溶化，热量计与冰吸收的热量为

$$\Delta H_1=m_1L+(m_1c_1+m_2c_2)(t_2-t_1)$$

其中 m_1 是冰的质量，m_2 为热量计的质量，t_1 是热量计与冰的初始温度，t_2 是体系的末温，L 是冰的溶解热，c_1 是水的比热容，c_2 为铝的比热容. 热水放出的热量为

$$-\Delta H_2=m_3c_1(t_3-t_2)$$

其中 m_3 是热水的质量，t_3 是热水的初始温度. 由 $\Delta H_1=-\Delta H_2$，可以得到

$$m_1L+(m_1c_1+m_2c_2)t_2-(m_1c_1+m_2c_2)t_1=m_3c_1t_3-m_3c_1t_2$$

解 t_2 得

$$t_2=\frac{m_3c_1t_3+(m_1c_1+m_2c_2)t-m_1L}{m_3c_1+m_1c_1+m_2c_2}$$

从表 17-1 查出所需数据，$c_1=1.00$ cal/g·℃，$c_2=0.22$ cal/g·℃，$L=79.8$ cal/g，得

$$t_2 = \frac{6000 + (48.0 + 0.44)(0) - (3830)}{(75.0 + 48.0 + 0.44)} = 17.6(℃)$$

(注意:如果算出的 t_2 为负值,则说明一开始假设的热水将冰全部溶化不成立.)

18.36 在求冰溶解的相变潜热实验中,盛在质量为 200 g 的铁罐中的 200 g 30.0℃的水加冰后降温至 10.0 ℃.实验结束后称出铁罐内总质量增加 50.0 g,计算冰的溶解热.

解 ☞ 设水的初始质量为 m_0,铁罐质量为 m_1,加入冰的质量为 Δm,水和铁罐的初始温度为 t_h,冰的初始温度为 $t_c = 0$ ℃,体系末温为 t_f,水的热容为 c_0,铁的热容为 c_1.由于吸热 = 放热,混和时满足

$$L\Delta m + \Delta m c_0 t_f = (m_0 c_0 + m_1 c_1)(t_h - t_f)$$

其中 L 是冰的溶解热,解出 L 得

$$L = \frac{(m_0 c_0 + m_1 c_1)(t_h - t_f) - \Delta m c_0 t_f}{\Delta m}$$

从表 17-1 中查出所需数据 $c_1 = 0.11$ cal/g·℃,$c_0 = 1.00$ cal/g·℃,

$$L = \frac{(200.0 + 22.0)(20.0) - (50.0)(1.00)(10.0)}{(50.0)} = 78.8(\text{cal/g}) = 78.8(\text{kcal/kg})$$

18.37 参考题 18.36,当水温降到 10.0 ℃时停止加冰,有什么作用? 设室温为 20.0 ℃.

解 ☞ 在上面的实验中有热量从热水向房间释放,如果实验结束时水的温度比房间温度低,那么将有热量从房间向水释放,从而抵消开始时的那一部分能量.若实验满足末温比房间温度低,而初始时温度比房间温度高(在实验中要以稳定的速度加冰块使水温均匀降低),则可以忽略水与房间交换热量引起的误差.

18.38 7 lb 212 ℉的水泼在一块 32 ℉的巨冰上,有多少冰会融化?

解 ☞ 假设没有热量损失在周围环境中,末温为 32 ℉,利用 $Q = mc\Delta t$,冰的溶解热为 144 Btu/lb(查表 17-1).

吸热 = 放热

$$7(1)(212° - 32°) = m_{冰}(144) \quad m_{冰} = \frac{1260}{144} = 8.75(\text{lb})$$

18.39 质量为 0.1 kg 的铜制容器内盛有 0.6 kg 100 ℃的水,要使容器和水的温度降至 30 ℃,需要加入多少 kg 0 ℃的冰? 水和铜的比热分别为 4.2 kJ/kg·K、0.39 kJ/kg·K,冰的溶解热为 335 kJ/kg.

解 ☞ 吸热 = 放热;m_i 代表冰的质量,m_w 代表原来水的质量,则有

$$m_i L_i + m_i c_w(30℃ - 0℃) = m_w c_w(100℃ - 30℃) + m_c c_c(100℃ - 30℃)$$

即 $m_i(335) + m_i(4.2)(30) = (0.6)(4.2)(70) + (0.1)(0.39)(70)$

$461 m_i = 179$, $m_i = 0.39$ kg

18.40 要使一杯 200 g 的咖啡从 90 ℃降温至 60 ℃需加多少克 0 ℃的冰? 不计与外界的热交换.

解 ☞ 假设咖啡的比热等于水的比热,从表 17-1 中查出 $L_{冰}$,由于吸热 = 放热:$m(80) + 1.0(m)(60) = 1.0(200)(30)$,解出 $m = 43$ g.

18.41 25 g 0 ℃的冰块能使多少克可乐从 30℃降至 10℃?

解 ☞ 同题 18.40 一致,吸热 = 放热:$25(80) + (1.0)(25)(10) = 1.0(m)(20)$,求出 $m = 112.5$ g.

18.42 利用以下数据求出冰的溶解热 L

量热计质量(铝)	30g
温水质量	400 g
温水温度	38 ℃
加入的 0℃冰块质量	158 g
末温	5 ℃

假设与外界无热量交换.

解 ☞ 利用吸热＝放热, $Q=mc\Delta t$, 从表 17-1 中查出铝的比热 $c=0.22$ kcal/kg·℃:

$0.030(0.22)(38^\circ-5^\circ)+0.400(1)(38^\circ-5^\circ)=0.158L+0.158(1)(5^\circ-0^\circ)$

$0.218+13.2=0.158L+0.79, 12.63=0.158L, L=79.9$ kcal/kg

18.43　热量计质量为 125 g,装有 130 g 20 ℃的水,将 6.1 g100 ℃的蒸气通入热量计中并全部液化,求水最后的温度.假设与外界无热量交换,热量计的比热为 0.10 kcal/kg·℃.

解 ☞ 从表 17-2 中查出水的汽化热为 540 kcal/kg,设末温为 T,利用 $Q=mc\Delta t$,吸热＝放热:

$0.0061(540)+0.0061(1)(100^\circ-T)=0.130(1)(T-20^\circ)+0.125(0.10)(T-20^\circ)$

$3.294+0.61-0.0061T=0.130T-2.60+0.0125T\quad 0.250$

$6.754=0.1486T,\quad T=45.5℃$

18.44　铁匠将 2.0 kg 1200 ℃的马掌浸入 0.8 kg 50 ℃的水中,有多少蒸汽产生? 从表 17-1, 17-2 中查出所需数据.

解 ☞ 假设体系最后为 100 ℃的水(100℃的马掌浸在其内)和 100 ℃的水蒸气的混合物.(容易理解:马掌与周围环境发生热交换时,先使水加热,最后的状态中当然会包括一些温度低于 100 ℃的物质,于是将有热量从水槽向外界传递,因为条件不充分,不考虑这些复杂情况.)

2.0 kg 的铁马掌从 1200℃降温至 100℃时放出能量为: $m_{Fe}c_{Fe}\Delta t_{Fe}=(2.0\text{ kg})[0.11\text{ kcal/(kg·℃)}](1100\text{ ℃})=242$ kcal. 0.8 kg 的水从 50 ℃升温至 100 ℃吸收热量为 $m_{wa}c_{wa}\Delta t_{wa}=(0.8\text{ kg})[1.000\text{ kcal/(kg·℃)}](50\text{ ℃})=40$ kcal. 因此还有 242－40＝202 kcal 的热量用于产生蒸汽,产生蒸汽的质量等于 202 kcal 除以水的汽化热(大小为 540 kcal/kg),结果为 0.37 kg.

18.45　核电厂用海水将 260 ℉的剩余蒸汽冷凝成 140 ℉的水,若海水的初始温度为 60 ℉,从冷凝器流出后温度变为 100 ℉,冷凝 1 磅蒸汽需多少磅海水? 已知海水的比热为 1 Btu/(lb)(℉),蒸汽的比热为 0.5 Btu/(lb)(℉).

解 ☞ 从表 17-2 中查出水的汽化热,采用 Btu 作单位,设需要海水 m g,利用吸热＝放热.

$1(0.5)(260^\circ-212^\circ)+1(970)+1(1)(212^\circ-140^\circ)=m(1)(100^\circ-60^\circ)$

$24+970+72=40m,\quad m=26.7$ lb

18.46　要将 800 g 铝从 20 ℃升温至 70 ℃需要多少克 120 ℃的蒸汽? 从表 17-1, 17-2 中查所需数据.蒸汽比热 $c=0.46$ cal/g·℃.

解 ☞ 放热＝吸热: $(0.46m)(20)+540m+(1.0m)(30)=0.22(800)(50)$

求出 $m=15.2$ g.

18.47　5.0 kg 的小孩要降温 2 ℃必须出掉多少汗? 人体出汗带走的热量为 580 cal/g,人体比热 $c=0.83$ cal/g·℃.

解 ☞ 小孩降温需减少的热量 $\Delta Q=0.83(5000)(2)=8300$cal,也应等于 $m(580)$,解出 $m=14.3$ g

18.48　将 200 g －20 ℃的冰块投入盛在热量计中的 350 g 40 ℃的水中,热量计相当于 50 g 水,则末温为多少?

解 ☞ 假设最后的温度大于 0 ℃,此时冰全部溶化,利用放热＝吸热,得: $(350+50)(1)(40^\circ-T)=200(0.5)[0^\circ-(-20^\circ)]+200(80)+200T$,即 $16000-400T=2000+16000+200T$, $600T=-2000$,得出 $T<0$,说明冰没有全部溶化,则末温为 0℃.

18.49　参见题 18.48,有多少冰溶化了?

解 ☞ 末温为 0 ℃,设溶化冰的质量为 m,则有

吸热＝放热,　$(350+50)(1)(40)=200(0.5)[0-(-20)]+m(80)$

$16000=2000+80m,\ m=175$ g

18.50　在实验中将 50.0 g －40℃的冰与 11.0 g 120℃的蒸汽在 1 标准气压下混合,不计与外

界的热量交换,求体系的末温.从表 17-1, 17-2 查出所需数据,设蒸汽比热 $c=0.481\ \mathrm{cal/g\cdot ℃}$.

解 ☞ 在此过程中有 $\Delta H_{冰}=-\Delta H_{汽}$,假设末温介于0℃与100℃之间,则混合物处于液体状态冰吸收的热量为

$$\Delta H_{冰}=m_{冰}c_{冰}\Delta t_{冰}+m_{冰}L_{冰}+m_{水}c_{水}\Delta t_{溶冰} \quad (1)$$

即

$$\begin{aligned}\Delta H_{冰}&=(50.0)(0.50)(40)+(50.0)(79.8)+(50.0)(1.00)t_{末}\\&=4990\ \mathrm{cal}+(50.0\ \mathrm{cal/℃})t_f\end{aligned} \quad (2)$$

其中 $t_{末}$ 为末温.而蒸汽放出的热量为

$$(\Delta H_{汽})=m_{汽}c_{汽}|\Delta t|_{汽}+m_{汽}L_{汽}+m_{汽}c_{水}|\Delta t|_{凝汽} \quad (3)$$

即:

$$\begin{aligned}(\Delta H_{汽})&=(11.0)(0.481)(20)+(11.0)(540)+(11.0)(1.00)(100-t_f)\\&=7145.8\ \mathrm{cal}-(11.0\ \mathrm{cal/℃})t_f\end{aligned} \quad (4)$$

联立方程(2)、(4)得 $t_f=2152.42/61=35.3(℃)$

(注意:若结果低于0℃或高于100℃,说明一开始的假设不成立.)

18.51 一量热计等价于 5 lb 水,内盛有 10 lb 32 ℉的冰.求通入 5 lb 212 ℉的蒸汽后,体系的末温为多少?所需数据查表 17-1, 17-2.

解 ☞ 先判断是否所有的冰都溶化,所有的蒸汽都凝结.使冰全部溶化所需热量为(10 lb)(144 Btu/lb) = 1440 Btu.蒸汽全部凝结放出的热量为(5 lb)(970 Btu/lb) = 4850 Btu,因此冰已全部溶化.为判断是否所有蒸汽都凝结,注意到有(4850 Btu − 1440 Btu) = 3410 Btu 的热量使热量计、原有的水、冰溶化后的水升温.让它们温度升至 212 ℉所需热量为(60 lb)[1 Btu/(lb)(℉)](180℉) = 10800 Btu.因此蒸汽凝结放出的热量还没使体系达到沸点.蒸汽在 212 ℉凝结后继续放热直至达到平衡温度 t.利用吸热 = 放热,得到

(1440 Btu) + (60 lb)[1 Btu/(lb)(℉)](t − 32℉) = (4850 Btu) + (5 lb)[1 Btu/(lb)(℉)](212℉ − t), −480 + 60 t = 5910 − 5 t;65 t = 6390;得到 t = 98 ℉.

18.52 等价于 30 g 水的热量计内盛有 200 g 水和 20 g 冰的冰水混合物,现通入 100 g 100℃的蒸汽,求体系的末温.所需数据从表 17-1, 17-2 中查出.

解 ☞ 用题 18.51 相同的方法检验冰和蒸汽的溶解和液化情况.

冰全部溶解所需热量 = (20 g)(80 cal/g) = 1600 cal

蒸汽全部液化所需热量 = (100 g)(540 cal/g) = 54000 cal

因此所有的冰都溶化.热量计、原有的水,冰溶解后的水的温度都升高,若升温至 100 ℃,需要热量为(250 g)(1 cal/g·℃)(100℃) = 25000 cal.因为(25000 + 1600) cal = 26600 cal < 54000 cal,故蒸汽没有全部液化.液化的蒸汽质量 m 由 m(540 cal/g) = 26600 cal 得到,m = 49 g.所以有 49 g 蒸汽液化,体系末温为 100℃.

18.53 等价于 50 g 水的热量计内盛有 400 g 水和 100 g 冰的冰水混合物,现通入 10 g 100 ℃的蒸汽,求体系的末温.

解 ☞ 同题 18.51、18.52 的做法

冰全部溶化的热量 = (100 g)(80 cal/g) = 8000 cal

蒸汽全部液化的热量 = (10 g)(540 cal/g) = 5400 cal

因此,所有的蒸汽液化为 100 ℃的水.使液化后的水降温至 0 ℃需放热:(10 g)(1 cal/g·℃)(100 ℃) = 1000 cal.因为(5400 + 1000)cal = 6400 cal < 8000 cal,故冰没有全部溶化.溶化的冰的质量 m 由下式求出:m(80 cal/g) = 6400 cal,解得 m = 80 g.所以有 80 g 冰溶化,体系的末温为 0℃.

第十九章 热 传 递

19.1 传 导

19.1 写出一维热传导方程.

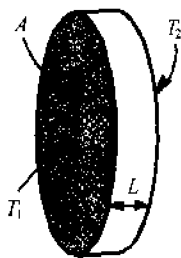


图 19-1

解 ☞ 考虑如图 19-1 所示的金属板,其厚度为 L,表面积为 A.两表面温度分别为 T_1、T_2,且 $T_1>T_2$.我们把$(T_2-T_1)/L$ 称为温度梯度,它表示温度随位置的变化率.

Δt 时间内,由表面 1 流过表面 2 的热量 ΔQ 正比于 Δt,表面积 A 和温度梯度的大小,因此

$$\Delta Q = k(\Delta t)A\frac{T_1-T_2}{L},\ H=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=-kA\frac{T_2-T_1}{L} \quad (1)$$

其中 k 为比例常数,只与物质的性质有关.我们称 k 为热导率系数,或热导率.对于给定物质,k 为单位时间、单位垂直面积、单位温度梯度内传递的热量.

k 的单位为:cal/s·cm·℃,W/m·K,其中 1 W = 1 J/s.在英制单位中,k 采用的单位为:Btu/h·ft·℉,Btu·in/ft^2·h·℉.

用微积分表示,(1)式可写为

$$\frac{dQ}{dt}=-kA\frac{dT}{dx}$$

其中负号表示热量沿 x 轴正方向从高温向低温流动.

19.2 为使热量以每平方厘米 8 cal/s 的迁移率沿铝棒截面传导,铝棒上应有多大的温度梯度? 已知铝的 $k=0.50$ cal/s·cm·℃.

解 ☞ $H=kA\left|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|$,即 8 cal/s = (0.50 cal/s·cm·℃)(1 cm^2)$\left|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|$

温度梯度的大小 = $\left|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|$ = 16 ℃/cm

温度梯度实际的符号取决于热量沿 x 正方向流动还是沿 x 负方向流动,这两种情况,分别对应取负号和正号.

19.3 一块厚度为 4 cm 的金属板,其表面边长为 25 cm,两表面温差为 40 ℃,求每小时流过此金属板的热量.热导率 $k=0.0025$ cal/s·cm·℃.

解 ☞ $Q=\frac{k(\text{面积})(\text{温差})(\text{时间})}{\text{厚度}}=\frac{0.0025(25\times25)(40)(3600)}{4}=56.25(\text{kcal})$

19.4 冰箱门高 150 cm,宽 80 cm,厚 6 cm,热导率系数为 0.0005 cal/cm·s·℃,内、外表面的温度分别为 0 ℃和 30 ℃,求每分钟通过冰箱门散失的热量,用 cal 表示.

解 ☞ $Q=\frac{k(\text{面积})(\text{温差})(\text{时间})}{\text{厚度}}=\frac{0.0005(150\times80)(30^\circ-0^\circ)(60)}{6}=1800(\text{cal})$

19.5 一块 5 ft×3 ft×0.25 in 的玻璃窗内表面温度为 60℉,外表面温度为 32℉.玻璃的热导率为 4.35 Btu·in/ft^2·h·℉.每小时通过玻璃窗传导而散失多少英热单位的热量?

解 ☞ 利用英国工程单位制表示的热传导方程

$$Q=\frac{k(\text{面积})(\text{温差})(\text{时间})}{\text{厚度}}$$

$$=\frac{\frac{4.35\ \text{Btu}\cdot\text{in}}{\text{ft}^2\cdot\text{h}\cdot{}^\circ\text{F}}[(5\times3)\text{ft}^2](60\ {}^\circ\text{F}-32\ {}^\circ\text{F})(1\ \text{h})}{0.25\ \text{in}}=7300\ \text{Btu}(\text{英热单位})$$

19.6 当温度梯度为 1 ℉/in 时,纤维板内通过每平方英尺面积的热量迁移率为 0.33 Btu/h(英热单位/小时).大小为 3 ft×6 ft×$\frac{3}{4}$in 的纤维板,若一表面温度为 38 ℉,另一表面

温度为 63°F时,一天内一共传递多少 Btu(英热单位)的热量?

解 ☞ Q 正比于表面积、温度梯度、时间,反比于厚度,因此

$$一天内传递的热量=(0.33\ \text{Btu})\left(\frac{18\ \text{ft}^2}{1\ \text{ft}^2}\right)\left(\frac{25\ ^\circ\text{F}}{1\ ^\circ\text{F}}\right)\left(\frac{24\ \text{h}}{1\ \text{h}}\right)\left(\frac{1\ \text{in}}{\frac{3}{4}\ \text{in}}\right)$$

$$=4750\ \text{Btu}(英热单位)$$

19.7 多厚的木板与 8 cm 厚的砖块有相同的绝热能力? 砖 $k_b=0.8$ W/m·K, 木板 $k_w=0.1$ W/m·K.

解 ☞ 当 ΔT 和 A 相同时,要求两种材料物体的 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 也相同,即 $\frac{k_w}{L_w}=\frac{k_b}{L_b}$,所以木板厚度 $L_w=(0.1/0.8)(8\ \text{cm})=1$ cm.

19.8 通过一块 1 cm×1 cm, 厚 0.2 cm 的钢板热传导,单位时间内能使多少 100 ℃的水蒸发? 设钢板两表面温差为 100 ℃,钢的 $k=0.11$ cal/s·cm·℃.

解 ☞ 我们先求 1 小时内钢板 1 cm² 面积上传递的热量

$$Q=\frac{(0.11\ \text{cal/s}\cdot\text{m}\cdot^\circ\text{C})(1\ \text{cm}^2)(100\ ^\circ\text{C})(3600\ \text{s})}{0.2\ \text{cm}}=198\ \text{kcal}$$

从表 17-2 查出水的汽化热为 $L_v=540$ kcal/kg. 于是,利用 $Q=mL_v$,得到 $m=0.367$ kg.

19.9 为了测出某物质的热导率,用此物质做了一个立方盒子(边长为 80 cm,厚为 3 cm).放在盒子中心处的电加热器以 120 W 的功率传热,测出盒子内外稳定的温度差为 40 ℃.求该物质的热导率.

解 ☞ 盒子每个内表面的长度为 80−6=74(cm), $\frac{\Delta Q}{\Delta t}=120$, $A=6(0.74)^2$, $\frac{\Delta T}{\Delta x}=\frac{40}{0.33}$,求出 $k=(\Delta Q/\Delta t)/A(\Delta T/\Delta x)=0.0274$ W/m·K.因为忽略了盒子壁的热传导,这只是近似结果.

19.10 用泡沫塑料制成的盒状恒温箱厚 5.0 cm,总的表面积为 1.5 m². 当恒温箱内温度保持 0 ℃,而箱外温度为 30 ℃时,每小时内此恒温箱内有多少冰块融化? 塑料的 $k=0.040$ W/m·K,冰的溶解热为 $h=80$ cal/g.

解 ☞ 流入箱子的热量 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}=kA(\Delta T/\Delta x)=(0.040)(1.5)(30/0.05)=36\text{W}$;则 1 小时内总的热量为 130 kJ,应等于$(m)$(80 kcal/kg)(4.184 kJ/kcal),解出 $m=0.39$ kg,即有 0.39 kg 的冰溶化.

19.11 一台普通冰箱等效于一个厚 90 mm,内表面积为 5.6 m² 的软木盒子.关上冰箱门后,内部温度比外界温度低 22.2 ℃,若冰箱马达运行时间为冰箱门关闭时间的 15%,求马达运行时,冰箱内热量的迁移率.已知软木盒导热率 $k=0.05$ W/m·K.

解 ☞ 考虑冰箱门关闭时 Δt 的时间间隔,设 Δt 时间内热量稳定传导,于是流入盒内的热量迁移率为

$$\frac{Q}{\Delta t}=kA\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)=(0.05)(5.6)\left(\frac{22.2}{0.090}\right)=69.1(\text{W})$$

因为马达运行的时间为$(0.15)\Delta t$,要带走以上热量,热量的迁移率应为 69.1/0.15=460 (W).

19.12 一块玻璃窗户面积为 1 m²,厚为 0.50 cm,若两表面温差为 20 ℃,求热量流过此玻璃窗的迁移率.当房屋内外温差为 20℃时,为何以上结果不再适用? k 取 0.8 W/mK.

解 ☞ 流过玻璃窗的热量迁移率为(0.80 W/m·K)(1 m²)(20 K/0.005 m)=3200 W.因为房屋的玻璃窗内外表面均存在半停滞的空气层,使玻璃两表面温差小于 20K,因此,结果不适用.

19.13 向地面深处挖洞时发现每下降 30 m 温度升高 1 ℃,若地壳的热导率约为 0.80 W/℃·m,地表每平方米面积上每秒时间内有多少热量流出?

解 ☞ 因为 $\Delta Q/\Delta t=kA(\Delta T/\Delta x)$,于是 $\Delta Q/\Delta t=(0.80\ \text{W/m}\cdot\text{K})(1\ \text{m}^2)(1\ \text{K}/30\ \text{m})=27\ \text{mW/m}^2$.

19.14 某种双层玻璃窗由两层 80 cm×80 cm×0.30 cm 的玻璃组成,中间隔有 0.30 cm 厚的停滞空气层.内表面温度为 20 ℃,而外表面温度为 0 ℃.每秒时间内有多少热量流过

此玻璃窗？已知玻璃 $k=2\times10^{-3}$ cal/s·cm·℃，空气 $k=2\times10^{-4}$ cal/s·cm·℃.

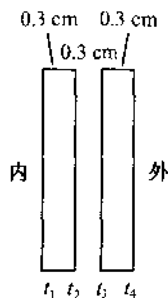


图 19-2

解 ☞ 图 19-2 为此玻璃窗的横截面，图中标出了四个表面的温度，且 $t_1=20$ ℃，$t_4=0$℃.

$$H_1=\frac{(2\times10^{-3})(6400)(20-t_2)}{0.30}=42.7(20-t_2)$$

$$H_2=\frac{(2\times10^{-4})(6400)(t_2-t_3)}{0.30}=4.27(t_2-t_3)$$

$$H_3=\frac{(2\times10^{-3})(6400)(t_3-0)}{0.30}=42.7t_3$$

在稳定情况下，三个热流迁移率应相等，即 $H_1=H_2=H_3$，故有

$$42.7(20-t_2)=4.27(t_2-t_3)=42.7t_3$$

$$10(20-t_2)=(t_2-t_3)=10t_3$$

解出

$t_2=11t_3, 20-t_2=t_3\Rightarrow 20=12t_3, t_3=1.67℃, t_2=18.4℃$

最后 $H=H_3=(42.7)(1.67)=71.3(\mathrm{cal/s})$

19.15 两铜板厚度均为 0.50 cm，中间隔有一厚 0.10 cm 的橡胶层. 一铜板外部温度保持在 0℃，另一铜板外部温度为 100℃，求橡胶层两表面的温度（铜的热导率 k_B 是橡胶热导率 k_R 的 490 倍）.

解 ☞ 设橡胶-铜板交界处的温度分别为 T_1、T_2. 在这两处的 $\Delta Q/\Delta t$ 和面积 A 都相等，所以 $k_B(T_1-0°)/0.50=k_r(T_2-T_1)/0.10=k_B(100-T_2)/0.50$. 联立解出 $T_1+T_2=100, 99T_1-T_2=0$；可求出 $T_1=1.0$℃，$T_2=99.0$℃.

19.16 参见题 19.15. 一厚为 0.50 cm 的铜层一面与一厚为 0.50 cm 的橡胶层粘接. 铜层的另一面与 20℃ 的水接触，橡胶层的另一面与 80℃ 的水接触. 求铜-橡胶连接处的温度.

解 ☞ 平衡时每层处 $\Delta Q/\Delta t=kA(\Delta T/\Delta x)$ 应相等，于是 $[k_B(t-20)]/0.50=[k_R(80-t)]/0.50$，求出 $t=20.12$℃.

19.17 定义热传导的热阻和 R 值（R 参数）.

解 ☞ 热传导方程：$H=\Delta Q/\Delta t=(kA\Delta T)/d$ 还可表达为 $H=\Delta T/R$，其中 $R\equiv d/(kA)$，称为厚金属板的热阻，国际单位制下单位为 K/W，英制单位为℉·s/Btu.

R 值是 1 平方英尺的绝热材料的热阻（英制单位），在美国通常用 R 值来区分绝热材料. R 值 $\equiv d/k$，k 采用单位 Btu. in/(h·ft²·℉)，d 用 in. 若 k 和 d 采用国际单位制[W/(m·K)和 m]，R 值 $\equiv(5.68)(d/k)$. 显然，英制单位下，热阻 =（R 值）/A；国际单位制下，热阻 =（R 值）/$(5.68A)$. 求 R 值时，单位通常省略.

19.18 一个泡沫塑料制成的立方盒子（边长为 70 cm）的 R 值为 4. 当外界温度为 25℃ 时，盒子内 0℃ 的冰块每小时溶解多少？冰的溶解热 $h=80$ kcal/kg.

解 ☞ 热流关系为：$\Delta Q/\Delta t=A\Delta T/R_f$，而 $A=6(0.7)^2$，$\Delta T=25$ K，$R_f=4/5.68=4(0.176)$. 所有物理量都采用了国际单位制，求出 $\Delta Q/\Delta t=104$ W，则每小时 $\Delta Q=375$ kJ $=89.6$ kcal. 再利用 $\Delta Q=mh$，求出 $m=1.12$ kg.

19.19 一个立方盒子（边长为 60 cm）装有 0 ℃ 的冰. 当外界温度为 20 ℃ 时，发现盒内的冰每小时溶解 250 g. 求此盒子材料的 R 值.

解 ☞ 流出盒子的热量 $\Delta Q/\Delta t=mh/\Delta t=(250\mathrm{g})(80\ \mathrm{cal/g})/3600\ \mathrm{s}=5.56$ cal/s $=23.2$ W. 利用 $A=6(0.6)^2$ m²，$\Delta T=20$℃，得到

$$R=5.68\frac{A\Delta T}{\Delta Q/\Delta t}=10.5$$

19.20 证明:多层材料的热阻等于各层热阻之和.

证 ☞ 研究有相同面积的两层. $\Delta T_1 = H_1R_1$, $\Delta T_2 = H_2R_2$. 因为 $H_1 = H_2 = H$, ΔT(两层) = $\Delta T_1 + \Delta T_2$, 得到 $\Delta T \equiv HR = H(R_1 + R_2)$, 即 $R = R_1 + R_2$. 同理可推广到多层情况.

19.21 两绝热层的 R 值分别为 R_1 和 R_2,证明两层复合后的 R 值为 $R_1 + R_2$.

证 ☞ 因为两层的表面积 A 相同, R 值同热阻一样直接相加.(见题 19.20).

19.22 (a)求厚为 0.5cm 的玻璃窗每平方米面积的热阻,(b)特制绝热窗户由两层 0.5 cm 厚的玻璃中间夹有 0.15 cm 厚的干空气而制成.计算这种窗户每平方米面积的热阻($k_{玻璃} = 0.60$ W/m·℃, $k_{空气} = 0.025$ W/m·℃).

解 ☞ (a)根据定义,求出单层玻璃的热阻 R_g 为

$$R_g = \frac{d}{kA} = \frac{0.5\times10^{-2}\text{m}}{(0.60\text{W/m·℃})(1\text{m}^2)} = 0.0083\ ℃/\text{W}$$

(b)两层玻璃间所夹空气的热阻 R_a 为

$$R_a = \frac{d}{kA} = \frac{0.15\times10^{-2}\text{m}}{(0.025\text{W/m·℃})(1\text{m}^2)} = 0.060\ ℃/\text{W}$$

因为复合玻璃由两层玻璃、一层空气组成,因此总的热阻 R 为

$$R = R_g + R_a + R_g = 0.077\ ℃/\text{W}$$

双层玻璃的热阻为单层玻璃的 9 倍多,增加的热阻大多来于玻璃层间所夹的空气层.

19.23 屏障的有效热阻,例如单层玻璃,不仅包括玻璃的热阻,还包括每面上停滞的空气层的热阻.假设玻璃内、外表面层每平方米面积上的停滞空气层厚度分别为 3 mm, 1.5mm.求复合后的有效热阻[$k_{空气} = 0.025$W/(m·℃)].

解 ☞

$$R = R_{内} + R_{外} = \left(\frac{d}{kA}\right)_{内} + \left(\frac{d}{kA}\right)_{外} = \frac{0.003}{(0.025)(1)} + \frac{0.0015}{(0.025)(1)} = 0.18\ ℃/\text{W}$$

19.24 屏障的有效热阻 R_{eff} 等于屏障热阻 R 和表面层热阻 R_s 之和,即 $R_{eff} = R + R_s$.求单层玻璃及题 19.22 描述的双层玻璃的有效热阻.(R_s 取题 19.23 所给出的值.)

解 ☞ 单层玻璃 $R_{eff} = (0.0083 + 0.18) = 0.188$(℃/W).双层玻璃 $R_{eff} = (0.077 + 0.18) = 0.257$(℃/W).注意到:在大气流动使玻璃两表面处无停滞空气层存在时,双层玻璃的绝热效果更加明显.

19.25 考虑图 19-3 所示的两绝热层,热阻分别为 R_1, R_2,证明: $T' = \dfrac{R_2T_1 + R_1T_2}{R_1 + R_2}$.

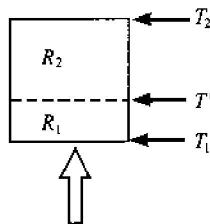


图 19-3

证 ☞ 对两层有, $H_1 = (T_1 - T')/R_1$, $H_2 = (T' - T_2)/R_2$, 由于 $H_1 = H_2 = H$, 得到 $(T_1 - T')/R_1 = (T' - T_2)/R_2$. 对角相乘得到 $R_2(T_1 - T') = R_1(T' - T_2)$, 移项得 $R_2T_1 + R_1T_2 = (R_1 + R_2)T'$, $T' = (R_2T_1 + R_1T_2)/(R_1 - R_2)$.

19.26 温度为 72°F 的房间内一杯茶在 1 min 内从 150°F 冷到 145°F,这杯茶从 110°F 冷到 105°F 需多长时间(在同一房间内)?(提示:用牛顿冷却定律.)

解 ☞ 牛顿冷却定律可描述为

$$\frac{温度改变}{时间} \propto (初始温度 - 环境温度)$$

将比例常数写为 A,则有

$$\frac{150° - 145°}{1\ \text{min}} = A(150° - 72°), \qquad \frac{110° - 105°}{\tau} = A(110° - 72°)$$

两式相除,解出 $\tau \doteq 2$ min(近似).

19.27 将一只 11 lb 的火鸡放入 235℃的烤炉中从 35℃加热到 40℃花了 9 min，在同一烤炉中将同一只火鸡从 55℃加热至 60℃需多长时间？

解 ☞ 利用牛顿冷却定律(加热时仍成立)，如题 19.26

$$\frac{40^\circ-35^\circ}{9\ \text{min}}=B(235^\circ-35^\circ),\quad \frac{60^\circ-55^\circ}{\tau}=B(235^\circ-55^\circ)$$

求出 $\tau=(9\ \text{min})\times(200/180)=10\ \text{min}$

19.28 求流过图 19-4 所示的中空圆柱体的稳定热流.

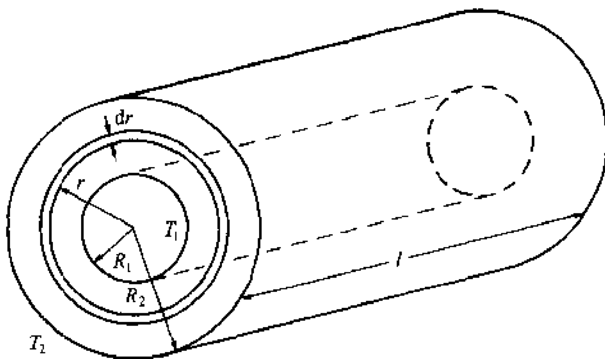


图 19-4

解 ☞ 因为圆柱内、外表面温度恒为 T_1、T_2，忽略两端表面影响，得到对称的热流. 任取一圆柱层，半径为 r，厚度为 dr，可得到：$H=-k(2\pi rl)(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r)$，其中$(2\pi rl)$为该层的有效面积，$\mathrm{d}T$ 为极小厚度 $\mathrm{d}r$ 范围内温度的增加量. 在稳定状态下，每一层的 H 都相等，分离 r 和 T，写成积分形式：$H(\mathrm{d}r/r)=-2\pi kl\mathrm{d}T$. 将左式从 R_1 到 R_2 积分，右边从 T_1 到 T_2 积分，得到

$$H\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}=-2\pi kl\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T$$

即 $H\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)=-2\pi kl(T_2-T_1)$，最后

$$H=2\pi kl\left[\frac{T_1-T_2}{\ln(R_2/R_1)}\right]$$

19.29 求经过图 19-5 所示的空心球体的热流迁移率.

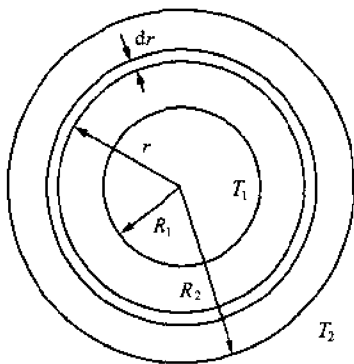


图 19-5

解 ☞ 通过半径为 r，厚度为 $\mathrm{d}r$ 的球壳的稳定热流(与半径 r 无关)为

$$\frac{Q}{t}=-k(4\pi r^2)\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)$$

或写为

$$\frac{Q}{t}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=-4\pi k\mathrm{d}T$$

将此式从球内表面积分到外表面

$$\frac{Q}{t}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=-4\pi k\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T$$

$$\frac{Q}{t}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=4\pi k(T_1-T_2)$$

$$\frac{Q}{t}=\frac{4\pi k(T_1-T_2)}{(1/R_1)-(1/R_2)}$$

19.2 对 流

19.30 描述对流产生的热传递并给出满足的方程.

解 ☞ 当一固体暴露在温度低于它的流体(液体或气体)中时,从固体传导来的能量被流体的对流带走,热量就随着物质的运动传递.

若流体上层温度为 T_∞,固体表面的温度为 T_s,则单位时间内的热传递由下式给出:

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = hA(T_s - T_\infty) \tag{1}$$

或写为 $H = hA\Delta T$.其中 A 为固体与流体的接触表面积.此方程定义了对流热传导系数 h,单位为 $\mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ F}$ 或 $\mathrm{W/m^2 \cdot K}$,或 $\mathrm{kcal/m^2 \cdot s \cdot {}^\circ C}$.与热导率 k 不同,对流系数 h 不是固体或流体的固有性质,而是取决于系统的许多参数.已知,h 与固体的形状,表面,流体速度,流体密度,热导率有关,温度差及流体的压强同样会影响 h 的值.

表 19-1 给出某一几何体只与 ΔT 有关的 h 值.

表 19-1 对流系数

几何体	$h(\mathrm{kcal/m^2 \cdot s \cdot {}^\circ C})$
垂直板	$(4.24\times10^{-4})\sqrt[4]{\Delta T}$
水平板	
面朝上	$(5.95\times10^{-4})\sqrt[4]{\Delta T}$
面朝下	$(3.14\times10^{-4})\sqrt[4]{\Delta T}$
直径为 D 的管子(单位:cm)	$(1.0\times10^{-3})\sqrt[4]{\Delta T/D}$

19.31 区分自然对流和强迫对流.

解 ☞ 如果流体的运动是由于温度改变伴随的密度变化造成的,则称为自然对流;若流体运动是出于泵或扇子促使的,则产生的对流称为强迫对流.在家庭供暖系统中,这两种对流形式同时存在:热水由于强迫对流沿供暖设备循环;暖空气由于自然对流上升.

19.32 一室内加热器中的空气在对流热交换器内被强迫上升,产生的对流热传递系数 $h = 200\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ F}$.热交换器的表面温度恒为 150°F,空气温度为 65°F.若加热时要求放出热量为 30000 Btu/h,求热交换器的表面积.

解 ☞ $H = hA\Delta T$,利用所给条件:

$$(30000\ \mathrm{Btu/h}) = (200\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ F})(150^\circ\mathrm{F} - 65^\circ\mathrm{F})A$$

$$A = 1.765\ \mathrm{ft^2}$$

19.33 流过冷表面的热流产生强迫对流时的热传递系数为 $40\ \mathrm{Btu/h \cdot ft \cdot {}^\circ F}$.冷表面上方的流体温度为 250 °F,表面温度为 50°F.求单位表面积上从流体流向表面的热量.

解 ☞ 用题 19.30 中式(1)解这个问题,因为此处热流从流体流向表面,故改变一个符号.

$$\frac{H}{A} = h(T_\infty - T_s) = \frac{40\ \mathrm{Btu}}{\mathrm{h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ F}}[(250-50)^\circ\mathrm{F}] = 8000\ \frac{\mathrm{Btu}}{\mathrm{h \cdot ft^2}}$$

19.34 表面积为 6 m² 的竖直墙的温度恒为 116℃,两表面周围的空气为 35℃.由于自然对流,1 小时内墙上有多少热量散失?

解 ☞ 我们先计算竖直墙的 h 值,从表 19-1 得到

$$h = (4.24\times10^{-4})\sqrt[4]{116-35} = 1.27\times10^{-3}(\mathrm{kcal/m^2 \cdot s \cdot {}^\circ C})$$

每个面上传递的热量用下式求出

$$\Delta Q = hA\tau\Delta t = (1.27\times10^{-3}\ \mathrm{kcal/m^2 \cdot s \cdot {}^\circ C})(6\ \mathrm{m^2})(3600\ \mathrm{s})(81\ {}^\circ\mathrm{C})$$

$$= 2.22\times10^3\ \mathrm{kcal}$$

由于有两个面,因此传递的总热量为 4.44×10^3 kcal.

19.35 若墙是水平的,重新做题 19.34.

解 ☞ 只有与温度无关的系数 h 发生了改变(见表 19-1),因此,按比例,有

$$\Delta Q = \left(\frac{5.95}{4.24} + \frac{3.14}{4.24}\right)(2.22\times 10^3\ \text{kcal}) = 4.76\times 10^3\ \text{kcal}$$

19.36 一根垂直蒸气管外直径为 8 cm,高为 5 m.管子外表面温度为 94 ℃,室内温度为 23℃,在 1 小时内,由于对流有多少热量散失到空气中?

解 ☞ $\Delta Q/\Delta t = hA\Delta T$.从表 19-1,求出外径为 D 的管子的 $h=(1.0\times10^{-3})\sqrt[4]{\Delta T/D}\ \text{kcal/m}^2\cdot\text{s}\cdot$℃.利用 $\Delta T = 71$℃,$D = 8$ cm,$h = 1.726\times10^{-3}\ \text{kcal/m}^2\cdot\text{s}\cdot$℃,求出 $\Delta Q = (1.726\times10^{-3})(\pi\times 0.08\times5)(71)(3600) = 554(\text{kcal})$.

19.37 室内空气温度为 26℃,室外空气温度为 −4℃,一厚为 3mm 表面积为 10m² 的竖直玻璃窗将室内、外空气阻隔.玻璃内、外表面有一微小温度差,为便于计算,假设玻璃中心处为平均温度(11℃).(a)求稳定的热流迁移率,(b)求玻璃窗内、外表面的温度.(玻璃 $k = 2.5\times10^{-4}\text{kcal/m}\cdot\text{s}\cdot\text{K}$,$h$ 值查表 19-1.)

解 ☞ (a)在稳定状态下,热量不能在任何地方聚集,所以,单位面积,单位时间内,室内对流,玻璃的传导,室外对流产生的热量传递应相等:

$$\left(\frac{H}{A}\right)_{in} = \left(\frac{H}{A}\right)_{mid} = \left(\frac{H}{A}\right)_{out}$$

利用表 19-1,求出从室内到玻璃中心(简单近似)处的对流热传递:

$$\left(\frac{H}{A}\right)_{in} = h\Delta T = (4.24\times10^{-4})(26^\circ - 11^\circ)^{5/4} = 1.25\times10^{-2}(\text{kcal/m}^2\cdot\text{s})$$

因为此值均相等,所以稳定热流 $H = (1.25\times10^{-2})(10) = 0.125(\text{kcal/s})$.

(b)玻璃的热传导,

$$0.125\times10^{-2} = \left(\frac{H}{A}\right)_{mid} = \frac{K}{L}(T_{in} - T_{out}) = \frac{2.5\times10^{-4}}{3\times10^{-3}}(T_{in} - T_{out})$$

因此,$T_{in} - T_{out} = 0.15$℃,根据假设 $\frac{1}{2}(T_{in} + T_{out}) = 11$℃.所以,$T_{in} = 11.075$℃,$T_{out} = 10.925$℃

19.3 辐 射

19.38 描述辐射引起的热传递,并写出满足的数学公式(斯特藩定律).

解 ☞ 表面积为 A,绝对温度为 T_e 的物体以功率 P_e 释放热能(如同电磁辐射):

$$P_e = \varepsilon\sigma A T_e^4 \tag{1}$$

其中 $\sigma = 5.67\times10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4$ 是个普适常数,称为斯特藩-玻尔兹曼常数;ε 是个无量纲参数,称为散发率,取值在 0 到 1 之间,取决于表面的性质.同一物体,放在绝对温度为 T_a 的封闭面内,则物体从封闭面上吸热的功率为

$$P_a = \varepsilon\sigma A T_a^4 \tag{2}$$

于是,若物体温度高于封闭面的温度($T_e > T_a$),则从物体流向封闭面的净热能流功率为

$$P = P_e - P_a = \varepsilon\sigma A(T_e^4 - T_a^4)$$

散发率取最大值 1 的物体称为黑体,因为它吸收所有射到它上面的辐射.散发率取 0 的物体是个极好的反射体,它不吸收任何射到它上面的辐射.散发率 ε 也称为吸收率,原因很明显.

19.39 什么是维恩位移定律?

解 ☞ 此定律表明黑体的绝对温度与它辐射的波长峰值成反比,即:$\lambda_m T = 2898\mu\text{m}\cdot\text{K}$.波长峰值指在此波长处间隔 $\lambda \pm \frac{1}{2}\Delta\lambda$ 范围内的辐射比其它间隔也为 $\Delta\lambda$ 范围内的辐射都要强.

19.40 半径为 5 cm 的球形黑体温度保持为 327 ℃,求辐射功率.

解 ☞ 球体的表面积为 $4\pi r^2$,在此例中,面积为 $4\pi(25\times10^{-4}) = 0.01\pi\text{m}^2$,利用斯特藩定律求出辐射功率:

$$P = \sigma T^4 A = (5.67\times10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)(600\ \text{K})^4(0.01\pi\text{m}^2) = 231\ \text{W}$$

19.41　参考题 19.40，求最大能量辐射时的波长.

解　☞ 利用维恩定律，$\lambda_m(600\text{K})=2898\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$，得到 $\lambda_m=4.82\ \mu\text{m}$.

19.42　半径为 3 cm 的球可看作一个黑体. 它与周围环境处于平衡状态，并以 30 kW 的功率从环境中吸收热量. 求此球体的温度.

解　☞ 黑体吸收功率为 $P_a=\sigma A T_a^4$，即 $(30\times10^3\text{W})=(5.67\times10^{-8}\text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)4\pi(0.03\text{m})$，求出 $T_a^4=4.68\times10^{13}$，即环境温度 $=T_a=2600$ K. 因为物体与周围环境处于平衡状态，因此球体温度也为 2600K.

19.43　一白炽灯灯丝面积为 50 mm²，工作时温度为 2127 ℃. 假设提供给灯泡的能量都从灯丝辐射. 若灯丝可看作黑体，则灯泡工作时必须提供多少功率？

解　☞ 所有提供给灯泡的能量都从灯丝处辐射. 然而，辐射总功率将大于提供给灯泡的功率. 因为在稳定状态下，从外界吸收的附加能量也被辐射. 因为题中没有给出环境的温度，我们可以合理地假设房间温度 T_a 为 300 K. 因为 $T_e=2400$ K，则吸收功率约为辐射功率的 $\left(\frac{1}{8}\right)^4$，故可忽略. 所以，灯泡提供的功率 $P_e=\sigma A T_e^4=(5.67\times10^{-8}\text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)(50\times10^{-6}\text{m}^2)(2400\text{ K})^4=94$ W

19.44　电炉上的小孔使金属成为一个黑体. 若小孔表面积为 100 mm²，金属温度保持在 1100 ℃，求能量流过小孔的功率.

解　☞ 功率 $=\sigma A T^4=(5.67\times10^{-8})(10^{-4})(1373.15)^4=20.2(\text{W})$

19.45　在地球上测出太阳表面积为 6.1×10^{18} m²，并以 3.9×10^{26} W 的功率辐射能量. 假设太阳的散发率为 1，计算太阳表面的温度.

解　☞ $P_e=\varepsilon\sigma A T_e^4$，$\varepsilon=1$，$A=6.1\times10^{18}$ m²，$P_e=3.9\times10^{26}$ W. 因此，$(3.9\times10^{26})=(5.67\times10^{-8})(6.1\times10^{18})T_e^4$，解出 $T_e=5800$ K.

19.46　家用热辐射器表面的散发率为 0.55，表面积为 1.5 m². (a)当热辐射器温度为 50℃时，求它的散热功率，(b)当房间墙壁温度为 22℃时，求热辐射器的吸收功率，(c)求热辐射器的净辐射功率.

解　☞ (a) $P_e=\varepsilon\sigma A T_e^4=(0.55)(5.67\times10^{-8})(1.5)(323)^4=509(\text{W})$

(b) $P_a=\varepsilon\sigma A T_a^4=(0.55)(5.67\times10^{-8})(1.5)(295)^4=354(\text{W})$

(c)净功率为 $P_e-P_a=155$ W. 此结果说明，在这些温度下，辐射不是热传递的主要作用. 虽然叫做热辐射器，但它主要通过对流向房间传热(题 19.31).

19.47　利用斯特藩定律计算温度为 1727℃，吸收率为 0.4 的灯丝每平方米面积上的总辐射功率.

解　☞ 斯特藩定律给出 $R=\varepsilon\sigma T^4=0.4(5.67\times10^{-8})(2000)^4=0.36(\text{MW/m}^2)$.

19.48　太阳表面温度约为 6000 K，太阳的最大辐射波长为 0.5 μm. 某一电灯丝最大辐射波长为 2 μm. 若太阳表面与灯丝有相同的发散特性，灯丝温度为多少？

解　☞ 利用维恩位移定律，$\lambda_m T=$常数

$$2T=(0.5)(6000),\qquad T=1500\text{ K}$$

19.49　直径为 5 cm 的铝球用一细线悬挂后放入一真空瓶中，它只能通过辐射散热. 球的初始温度为 100 ℃，瓶壁温度保持为 22 ℃. (a)求球开始时的净散热功率，(b)用(a)中求出的功率计算球的温度从 100℃降到 90℃时，需要多少时间？(c)求球温度为 90℃时的净散热功率，(d)用(c)中求出的功率计算球温从 90℃降到 80℃时，需要多少时间？(提示：查表 17-1，铝的密度为 2.7 g/cm³，发散率 $\varepsilon=0.1$.)

解　☞ (a)球体的净散热功率为 $P_e-P_a=\varepsilon\sigma A(T_e^4-T_a^4)$，利用 $\varepsilon=0.10$，$\sigma=5.67\times10^{-8}$ W/m²·K⁴，$T_e=373$ K，$T_a=295$ K，$A=4\pi r^2=\pi d^2=\pi(0.005\text{m})^2=0.0079\text{m}^2$，得到 $P_e-P_a=0.528$W.
(b) $(P_e-P_a)\Delta t=mc\Delta T$，$\Delta t$ 为要求的时间，$\Delta T=10$ K，$c=0.92$ J/g·K 为铝的比热，球的质量 $m=$

$\rho_{铝}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = (2.7\ \text{g/cm}^3)(65.4\ \text{cm}^3) = 177\ \text{g}$. 于是

$$\Delta t = \frac{(177\ \text{g})(0.92\ \text{J/g}\cdot\text{K})(10\ \text{K})}{0.528\ \text{J/s}} = 3084\ \text{s} = 51.4\ \text{min}$$

(c)与(a)同理，只是 $T_e = 363$ K，得出 $P_e - P_a = 0.439$ W；

(d)与(b)同理，只是要改用(c)中求出的功率，得 $\Delta t = 3709\ \text{s} = 61.8$ min.

19.50　证明：当物体的温度 T_e 与它的容器壁的温度 T_a 的差值 $\Delta T = T_e - T_a$ 与 T_a 比很小时，通过辐射从物体传递给器壁的热量记为 $P = 4\epsilon\sigma T_a^3 \Delta T$（题 19.26 中的牛顿冷却定律应用于辐射情况）.

证　☞ 热传递净功率由下式给出：$P_e - P_a = \epsilon\sigma A(T_e^4 - T_a^4)$，如果 $T_e = T_a + \Delta T$，我们得到

$$T_e^4 = T_a^4 = (T_a - \Delta T)^4 - T_a^4$$
$$- (T_a^4 + 4T_a^3\Delta T + 6T_a^2\Delta T^2 + 4T_a\Delta T^3 + \Delta T^4) - T_a^4$$
$$- 4T_a^3\Delta T\left[1 + \frac{6}{4}\frac{\Delta T}{T_a} + \left(\frac{\Delta T}{T_a}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta T}{T_a}\right)^3\right]$$

因为 $\Delta T \ll T_a$，括号内后三项远小于 1，所以 $T_e^4 - T_e^4 \approx 4T_a^3\Delta T$. 将它用于功率方程，得到 $P_e - P_0 = 4\epsilon\sigma A T_a^3 \Delta T$. 若将此结果用于微积分结果仍成立，$\Delta y \approx (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)\Delta x$，其中 $x = T$，$y = T^4$.

19.51　温度为 527℃ 的黑体，为使其每秒内的辐射量加倍，必须将它的温度升至何值？

解　☞ 因为 $P \propto T^4$，所以应将温度升至 $2^{1/4}(800\ \text{K}) = 951$ K.

19.52　当黑体温度从 7℃ 升至 287℃ 时，它的辐射功率增加多少倍？

解　☞ $\frac{P(560\ \text{K})}{P(280\ \text{K})} = \left(\frac{560}{280}\right)^4 = 16$

第二十章　气体定律和气体动理论

20.1　摩尔概念;理想气体状态方程

20.1　什么是摩尔？什么是阿伏伽德罗常数？什么是原子质量单位？

解　☞ 国际单位制中物质的量的单位为 mol[摩尔(摩)].根据定义,与 0.012 kg(=12g)的碳-12 同位素有相同粒子数的物质的量为 1 mol.这样,以 g 为单位,1mol 任何物质的质量在数值上等于该物质的原子(或分子、或分子式)量.

1 mol 物质的实际粒子数称为阿伏伽德罗常数;$N_A = 6.022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} = 6.022 \times 10^{26}\ \text{kmol}^{-1}$.

原子质量单位(u)定义为碳-12 原子质量的$\frac{1}{12}$,因此

$$1\text{u} = \frac{1}{12}\frac{0.012\ \text{kg/mol}}{6.022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}} = 1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

由此可以得到,以 u 为单位的任何一种原子的质量在数值上等于这种原子的原子量.

20.2　定义理想气体状态方程.

解　☞ 处于热平衡状态的气体(整个体系温度均匀)的状态方程与压强、体积、气体温度有关.密度足够低时,所有气体有相同的状态方程,即为理想气体状态方程:$pV = NkT = nRT$,其中 N 为气体的分子数,n 为气体的摩尔数,T 为气体的开尔文温度.

玻尔兹曼常数 k,气体普适常数 R 分别为 $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{J/K}$, $R = 8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$.这两个常数的比值为阿伏伽德罗常数,

$$N_A = \frac{R}{k} = 6.02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$$

即为 1 mol 物质的分子数.化学纯的理想气体的状态方程通常用 $pV = (m/M)RT$ 的形式表达.其中 m 为气体的质量,M 为它的分子量(质量/摩尔).等式两边除以 V,我们得到另一种形式:$p = (\rho RT)/M$,其中 ρ 为质量密度.

20.3　求一个氨分子 NH_3 的质量(采用 kg 为单位).

解　☞ NH_3 的分子质量为 17.0,因此

$$m_{NH_3} = 17.0\text{u} = (17.0\text{u})(1.66 \times 10^{-27}\text{kg/u}) = 2.82 \times 10^{-26}\text{kg}$$

20.4　在不久的将来,世界人口将达到 6×10^9,地球上的人有多少摩尔？

解　☞ 人类的摩尔数将为$(6 \times 10^9$ 人$)/(6 \times 10^{23}$人$/\text{mol}) = 1 \times 10^{-14}$ mol.

20.5　求一个电子的"原子质量",并求以 u 为单位的质量.($m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.)

解　☞ 根据定义,$M = N_A m_e = 5.48 \times 10^{-4}$ kg/kmol,由题 20.1,求出 $m_e = 5.48 \times 10^{-4}$u.

20.6　将质量为 60 kg 的人看作一个大分子,采用原子质量单位,此人质量为多少？他的分子量又为多少？

解　☞ 人分子的质量为 $M = N_A(60\ \text{kg}) = 3.6 \times 10^{28}$ kg/kmol.因此,1 个人的质量为 3.6×10^{28}u.

20.7　当温度为 298.15 K(25℃)时,某理想气体压强为 1.52 MPa,体积为 $10^{-2}\ \text{m}^3$(10L).(a)该气体有多少摩尔？(b)若该气体为氢气分子,求它的质量密度,(c)若该气体为氧气,求它的质量密度.

解　☞ (a)$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1.52 \times 10^6)(10^{-2})}{(8.31)(298.15)} = 6.135(\text{mol})$

(b)氢气的原子质量为 1.008,所以 1 mol 氢气(H_2)含有 2.016 g,或 2.016×10^{-3} kg,则氢气的密度为

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{(6.13)(2.016 \times 10^{-3})}{10^{-2}} = 1.24(\text{kg/m}^3)$$

(c)氧气的原子质量为 16,所以 1 mol 氧气含有 32 g,或 32×10^{-3} kg,则氧气的密度为

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{(6.13)(32\times10^{-3})}{10^{-2}} = 19.6(\text{kg/m}^3)$$

20.8 用压缩泵将 70L 的空气压入 6L 的容器，保持温度不变. 如果空气的原始压强为 1 atm，求容器中空气最后的绝对压强值.

解 ☞ 因为温度为常数，利用玻意耳定律：

$p_0V_0 = pV$，$p_0 = 1$ atm，$V_0 = 70 + 6 = 76(\text{L})$，$V = 6\text{L}$，$1(76) = p(6)$

$p = 12.7$ atm 绝对压强.

20.9 表压强为 3.17 atm，容积为 0.025 m^3 的容器装有 0.084 kg 的氮气(N_2)，求此气体的温度，单位用℃.($p_{\text{atm}} = 1.013\times10^5$Pa).

解 ☞ 注意到：1 kmol N_2 的质量为 28 kg. 根据理想气体状态方程：$pV = nRT$，$n = 0.084/28$ kmol，$p = 3.17 + 1 = 4.17(\text{atm}) = 4.17\times1.013\times10^5(\text{N/m}^2)$，$R = 8314$ J/kmol·K，代入即得

$$4.17(1.013\times10^5)(0.025) = (0.084/28)(8314)T$$

$$T = \frac{28(4.17)(1.013\times10^5)(0.025)}{0.084(8314)} = 423(\text{K}) = 150(℃)$$

20.10 一只部分膨胀的气球内充有 500 m^3 温度为 27 ℃，压强为 1 atm 的氦气，当气球升到 18000 ft 高度处，压强变为 0.5 atm，温度变为 −3℃，此时氦气的体积为多少?

解 ☞ 对一定量的气体，有

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},\quad \frac{1(500)}{300} = \frac{0.5V_2}{270},\quad V_2 = \frac{500(270)}{300(0.5)} = 900\ (\text{m}^3)$$

20.11 一个气泡从池底浮到水面上时体积变为在池底时体积的 4 倍. 若大气压强为 100 kPa，池底的压强为多大? 假设温度 T 为常数.

解 ☞ $p_0 = p\dfrac{V}{V_0} = (100\ \text{kPa})(4) = 400$ kPa.

20.12 用一压强计测量容器内外的压强差. 此压强计装在 1.00 m^3 的氧气瓶上读数为 30 atm，用掉一部分氧气后，读数为 25 atm. 在标准气压下，用了多少立方米的氧气? 假设在整个过程中温度不发生改变.

解 ☞ 因为温度恒定，我们可以利用玻意耳定律来求解. 容器内的总压强从 31 atm 降为 26 atm. 当压强为 26 atm 时，容器内原始气体的体积应为$\dfrac{31}{26}\text{m}^3$，而现在剩有 1 m^3，则用去了$\dfrac{5}{26}$ m^3 压强为 26 atm 的氧气，这些氧气在相同温度，一标准大气压下所占的体积应为此值的 26 倍：5.00 m^3.

20.13 在湖底 h 深处，一条鱼吐出一个体积为 V_0 的气泡，此气泡一直上升到湖面上. 假设温度为恒量，湖面上压强为标准大气压，求气泡刚漂到湖面上时的体积. 水的密度为 ρ.

解 ☞ h 深度处的 p_0V_0 等于湖面上的 pV，列出等式为$(p + \rho gh)V_0 = pV$，解出 $V = (1 + \rho gh/p)V_0$.

20.14 质量为 2.1212 g 的某种单原子气体在温度为 0 ℃，压强为 810.6 kPa 时所占体积为 1.49 L，这是何种气体?

解 ☞ $pV = (m/M)RT$，其中 m = 气体质量，M = 分子量

$$(810.6\times10^3\text{Pa})(1.49\times10^{-3}\text{m}^3) = \frac{(2.1212\times10^{-3}\text{kg})(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273.15\text{K})}{M}$$

$$M = 3.99\times10^{-3}\text{kg/mol} = 3.99\ \text{g/mol}$$

气体为氦气.

20.15 利用理想气体状态方程计算甲烷 CH_4 在 20℃，5 atm 时的密度. 已知 1 kmol 的甲烷质量为 16.0 kg.

解 ☞ $pV = nRT$，$T = 20 + 273 = 293(\text{K})$，$R = 8314$ J/kmol·K，$n = 1$ kmol，$p = 5$ atm $= 5(1.013$

$\times 10^5$)N/m^2,则

$$5(1.013\times10^5)V=8314(293),\quad V=4.8\ \text{m}^3,\quad d=\left(\frac{m}{V}\right)=\frac{16.0}{4.8}=3.33(\text{kg/m}^3)$$

20.16 不求出体积,如何解题20.15?

解 ☞ 利用 $pV=(m/M)RT$ 及 $\rho=m/V$,得出

$$\rho=\frac{pM}{RT}=\frac{(5\times1.013\times10^5\ \text{N/m}^2)(16\ \text{kg/kmol})}{(8314\ \text{J/kmol·k})(293\ \text{K})}=3.33\ \text{kg/m}^3$$

20.17 将27℃、15 lb/in^2 的100 ft^3 体积的氮气压缩装入容积为5 ft^3 的空容器内,若氮气最后的温度为17℃,求容器内的绝对压强.

解 ☞ 采用开尔文温标,列出理想气体状态方程

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2},\quad \frac{15(100)}{273+27}=\frac{p_2(5)}{273+17},\quad p_2=\frac{1500(290)}{5(300)}=290(\text{lbf/in}^2)$$

20.18 正准备在低温下给20 mL的试管封口时,恰有一滴50 mg的液氮掉入试管内.当试管被加热到27 ℃时,试管内的氮气压强为何值?假设气体为理想气体,结果用atm表示(1 atm=101.3 kPa).

解 ☞ 利用 $pV=(mRT)/M$. N_2 的 M 为28, $T=300$ K, $m=5\times10^{-5}$kg, $V=2\times10^{-5}$m^3, $R=8.314$ kJ/kmol·K,求出 $p=223$ kPa$=2.20$ atm.

20.19 温度为20℃时,一辆汽车橡胶车胎的相对压强为24 psi* (f/in^2),汽车高速行驶一段时间后,车胎温度上升至60℃,若车胎体积不变,求车胎内变化后的相对压强.

解 ☞ $p_1=p_0\dfrac{T_1}{T_0}=[(14.7+24)\text{psi}]\dfrac{333\text{K}}{293\text{K}}=44.0$ psi,或29.3 psi(相对压强).

20.20 一柴油机气缸将标准状态下的空气体积压缩为原来的$\frac{1}{6}$,压强变为50 atm,求压缩气体的温度.

解 ☞ 利用$(p_1V_1)/T_1=(p_0V_0)T_0$ 得 $T_1=(p_1/p_0)(V_1/V_0)T_0=(50)\left(\frac{1}{16}\right)(273)=853$ (K).

20.21 使气体冷却的一种方法是使其膨胀.若将27℃ 40atm的气体体积膨胀13倍,压强变为大气压,求此时气体的温度.

解 ☞ 与题20.20同理, $T_1=(p_1/p_0)(V_1/V_0)T_0=\left(\frac{1}{40}\right)(13)(300)=97.5$ K (−176℃).

20.22 在标准状态下,一只敞口的垂直气缸高 $h=30.00$ cm,底面积 $A=12.0$ cm^2.现将一5.0 kg且能紧密接触的活塞放入气缸,活塞在气缸内下降至平衡位置.求此时活塞的高度及气缸内的压强.假设最终温度为0℃.

解 ☞ 气缸内增加的压强 $\Delta p=(mg)/A=(5.0\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)/(12.0\times10^{-4}\text{m}^2)=41$ kPa,则新的压强为 $p_{atm}+\Delta p=142$ kPa.因为 T 为常数,则 $p_{atm}(30A)=142hA$,解得 $h=[101(30.0)]/142=21.4$(cm).

20.23 一内径为4.00 cm的气缸内装有气体,气体被一个能在气缸内自由移动,质量为 $m=13.0$ kg的活塞压缩(图20-1).将整个系统浸入一温度可调节的水槽中.系统初始平衡温度 $t_i=20$℃,此时活塞离气缸底高度为 $h_i=4.00$ cm;若水槽逐渐升温到 $t_f=100$ ℃,计算此时活塞的高度 h_f.

解 ☞ 因为气体的压强和质量为常数,利用查理定律

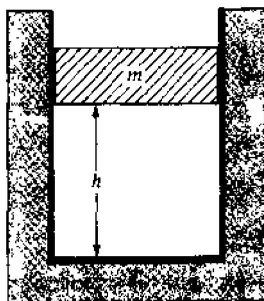


图20-1

* 1 psi = 6894.76 Pa

$$\frac{V_i}{T_i}=\frac{V_f}{T_f} \tag{1}$$

又因为气缸内的横截面积 A 为常数，所以

$$\frac{V_f}{V_i}=\frac{Ah_f}{Ah_i}=\frac{h_f}{h_i} \tag{2}$$

联立方程(1)、(2)，求出最后的高度为

$$h_f=h_i\left(\frac{V_f}{V_i}\right)=h_i\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

由 $t_i=20℃$，$t_f=100℃$ 求出 $T_i=293.15$ K，$T_f=373.15$ K，再利用 $h_i=4.00$ cm，可以求出

$$h_f=(4.00\ \text{cm})\left(\frac{373.15\ \text{K}}{293.15\ \text{K}}\right)=5.09\ \text{cm}$$

20.24　参见题 20.23，若将系统从相同的初始状况开始逐渐升温，但在活塞上放上重物使活塞高度保持在 h_i 处．当温度上升至 100℃时，活塞上所加重物的质量为何值？

解　☞ 因为气缸内气体的量为恒值，则 $(pV)/T$ 为常数；又因为气体体积 V 为常数，则最后的压强为

$$p_f=p_i\left(\frac{T_f}{T_i}\right) \tag{1}$$

利用系统内外的气体压强(取为 $p_{atm}=1.013\times10^5$Pa)，将气缸内气体的初始压强，最终压强写为

$$p_i=p_{atm}+\frac{m_ig}{A} \tag{2}$$

$$p_f=p_{atm}+\frac{m_fg}{A}=p_{atm}+\frac{m_ig}{A}+\frac{\Delta mg}{A} \tag{3}$$

将方程(1)代入方程(3)，解出需加重物质量 Δm 为

$$\Delta m=\frac{A}{g}(p_f-p_i)=\frac{A}{g}p_i\left(\frac{T_f}{T_i}-1\right)=\frac{A}{g}\left(p_{atm}+\frac{m_ig}{A}\right)\left(\frac{T_f}{T_i}-1\right)$$

横截面积 $A=(\pi/4)(4.00\ \text{cm})^2=12.57\ \text{cm}^2=1.257\times10^{-3}\ \text{m}^2$，将 $p_{atm}=1.013\times10^5$ Pa，$m_i=13.0$ kg，$g=9.80\ \text{m/s}^2$ 及各温度已知值代入得

$$\Delta m=\left(\frac{1.257\times10^{-3}}{9.80}\right)\left[1.013\times10^5+\frac{(13.0)(9.80)}{1.257\times10^{-3}}\right]\left(\frac{373.15}{293.15}-1\right)=7.09(\text{kg})$$

20.25　40℃时将某种理想气体装入一容器，相对压强为 608 kPa，现释放出 $\frac{1}{4}$ 的气体后仍回到热平衡状态．若此时温度变为 315℃，求容器内气体的相对压强．标准大气压强取 101 kPa．

解　☞ $pV=nRT\Rightarrow\frac{p_1V_1}{n_1T_1}=\frac{p_2V_2}{n_2T_2}$，　$T_1=273+40=313(\text{K})$

$p_1=101+608=709\ (\text{kPa})$，　$n_2=\frac{3}{4}n_1$，$V_2=V_1$，$T_2=273+315=588(\text{K})$

于是

$$p_2=(709\ \text{kPa})\left(\frac{3}{4}\right)(588\ \text{K})/(313\ \text{K})=999\ (\text{kPa})$$

最后的相对压强为 $999-101=898(\text{kPa})$．

20.26　水银气压计刻度标在玻璃管后的标尺上，读数为 740 mm．由于此读数低于标准气压，怀疑有空气进入了水银上部空间，此空间长度为 60 mm．现将气压计开口端再向水银槽中插入一段距离，读数变为 730 mm，水银柱上部空间长度为 40 mm．准确的大气压强为何值？

解　☞ 我们将准确的大气压标记为 p_a，将进入气压计的空气的初始压强标记为 p_i，将气压计的初始读数标记为 p_r．则处于静力平衡的水银柱在水银槽表面处的压强为

$$p_a=p_i+p_r \tag{1}$$

当气压计再插入一段距离后,气压计内空气压强增加到 p_t',气压计读数减为 p_r',而总的压强未改变

$$p_a = p_t' + p_r' \tag{2}$$

水银柱上方的空气体积从 V_t 变为 $V_t' = 2V_t/3$,利用玻意耳定律得

$$p_t' = \frac{3p_t}{2} \tag{3}$$

联立方程(1)到(3),求出

$$p_t = 2(p_r - p_r') = 2(740 - 730)\text{mmHg} = 20\ \text{mmHg}$$

由方程(1)得 $p_a = 740 + 20 = 760(\text{mmHg})$.

20.27 如图20-2,一可自由移动的活塞将一个封闭气缸分隔为1、2两室.1室内装有25 mg N_2 气体,2室内装有40 mg He气体.当系统处于平衡时,求 L_1/L_2 的值,求 N_2 与He的摩尔数之比.(N_2 与He的分子量分别为28和4.)

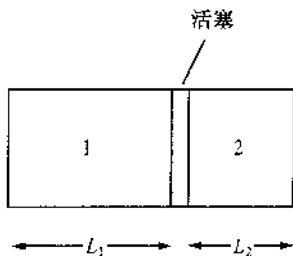


图 20-2

解 ☞ 平衡时,1、2两室压强相等.两部分气体的千摩数分别为 $n_1 = (25\times10^{-6}\text{kg})/(28\text{kg/kmol}) = 8.9\times10^{-7}\text{kmol}$, $n_2 = (40\times10^{-6})/4.0 = 1.0\times10^{-5}$.用 A 表示气缸横截面积,写出理想气体状态方程,$p = (n_1RT)/(AL_1) = (n_2RT)/(AL_2)$,解出 $L_1/L_2 = n_1/n_2 = 0.089$.

20.28 容器 A、B 内分别充有两种气体.A 中气体体积为0.11 m^3,压强为1.38 MPa;B 中气体体积为0.16 m^3,压强为0.69 MPa.现通过一体积不计的试管将两容器相连使两气体相互混合.若整个过程中保持温度不变,求容器内混和气体最后的压强值.

解 ☞ $p_AV_A = n_ART$,　$p_BV_B = n_BRT$

混合并达到平衡后的压强值

$$p_f(V_A + V_B) = (n_A + n_B)RT = p_AV_A + p_BV_B$$

所以

$$p_f = \frac{p_AV_A + p_BV_B}{V_A + V_B} = \frac{(1.38\ \text{MPa})(0.11\ \text{m}^3) + (0.69\ \text{MPa})(0.16\ \text{m}^3)}{0.11\ \text{m}^3 + 0.16\ \text{m}^3} = 0.97\ \text{MPa}$$

20.29 甲烷气体在空气中燃烧的反应方程式为 $2C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 10H_2O + 8CO_2$.假设反应前后温度保持不变且温度足够高,所有反应物和生成物均为气体.将2 mol甲烷和13 mol氧气混合并完全反应,若保持体积不变,反应前的压强为 p_0,反应后的压强为何值?

解 ☞ 开始时的气体为15 mol,所以 $p_0V_0 = 15RT_0$.最后气体有18 mol,因此 $p_fV_f = 18RT_f$.因为体积和温度保持不变,所以 $p_f = (18RT_f)/V_f = (18RT_0)/V_0 = (18)(p_0/15)$,其中将第一个方程代入了 $(RT_0)/V_0$.解出 $p_f = 1.20p_0$.

20.30 取 x、y 两份同种理想气体分别充入两个相邻气室内,两气室中间隔有一块绝热隔板.两份气体的初始体积、压强、温度分别为 V_x、V_y、p_x,p_y、T_x、T_y.现将隔板去掉,两气体混合,最后温度为 T_f.(a)假设去掉隔板后体积的改变量忽略不计,即最后体积为 $V_x + V_y$,求混合气体最后的压强 p_f.结果用 V_x, V_y, p_x, p_y, T_x, T_y, T_f 表示,(b)假设去掉隔板后体积增加量为 V_p,即最后的体积为 $V_x + V_y + V_p$,修改(a)的结果.

解 ☞ (a)x 中气体的摩尔数为 $n_x = (p_xV_x)/(RT_x)$;同理,$n_y = (p_yV_y)/(RT_y)$.去掉隔板后,气体摩尔数为 $n_f = n_x + n_y$, $V_f = V_x + V_y$,对混合气体应用理想气体状态方程,得

$$p_f = \frac{n_fRT_f}{V_f} = \frac{RT_f(n_x + n_y)}{V_x + V_y}$$

即

$$p_f = p_x\frac{T_f}{T_x}\ \frac{V_x}{V_x + V_y} + p_y\frac{T_f}{T_y}\ \frac{V_y}{V_x + V_y}$$

(b) $V_f = V_x + V_y + V_p$，结果变为

$$p_f = \frac{n_f RT_f}{V_f} = \frac{RT_f(n_x + n_y)}{V_x + V_y + V_p}$$

$$= p_x \frac{T_f}{T_x} \frac{V_x}{V_x + V_y + V_p} + p_y \frac{T_f}{T_y} \frac{V_y}{V_x + V_y + V_p}$$

20.31 某球形玻璃容器的容积为 400 cm³，现用一个体积不计的试管将它与另一个容积为 200 cm³ 的球形容器相连.两容器内都装有 20 ℃、1.000 atm 的干燥空气.现将稍大一些的容器浸入 100 ℃的蒸汽中，将小一些的浸入 0 ℃的冰中，最后两气体共同的压强为何值?

解 ☞ 我们用 n_1、n_2 标记一大一小两容器内气体的摩尔数，用 T_1、T_2 标记各自的温度，用 p_f 标记最后的压强，根据理想气体状态方程有

$$p_f V_1 = n_1 RT_1 \tag{1}$$

$$p_f V_2 = n_2 RT_2 \tag{2}$$

其中 $V_1 = 400$ cm³，$V_2 = 200$ cm³，我们还可得出

$$p_0 V_0 = nRT_0 \tag{3}$$

其中 p_0、$V_0 = V_1 + V_2$、T_0 分别为初始时的压强、体积、温度.将方程(1)～(3)代入 $n_1 + n_2 = n$，求出

$$\frac{p_f V_1}{RT_1} + \frac{p_f V_2}{RT_2} = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$$

解出 p_f，得到

$$p_f = \frac{p_0 V_0}{T_0\left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}\right)}$$

将数值 $p_0 = 1.00$ atm，$T_0 = 293.15$ K($t_0 = 20$ ℃)，$T_1 = 373.15$ K($t_1 = 100$ ℃)，$T_2 = 273.15$ K($t_2 = 0$ ℃)，解出

$$p_f = \frac{(1.00)(600)}{(293.15)\left[\left(\frac{400}{373.15}\right) + \left(\frac{200}{273.15}\right)\right]} = 1.13(\text{atm})$$

20.32 容积为 V_b 的盒子有一个密封的盖子，盖子质量为 M_l，面积为 A_l.盒子内装有温度为 T_0 的 n_b kmol 理想气体.现将盒子放到一气室内，气室中另外还装有 n_c kmol 同温度气体，这些气体所占体积为 V_c.(a)用 n_b、V_b 和 T_0 表示出盒子内气体的压强 p_b 的值，(b)用 n_c、V_c 和 T_0 表示出气室内气体的压强 p_c 的值，(c)开始时关闭盒盖，证明，要求满足 $p_b - p_c \leqslant M_l g / A_l$，(d)若将整个体系加热，温度 T_l 为何值时，气体将盒盖顶开?

解 ☞ (a)应用理想气体状态方程，得到 $p_b = (n_b RT_0)/V_b$.

(b)应用理想气体状态方程，得 $p_c = (n_c RT_0)/V_c$.

(c)当盒盖上向上的净压强产生的压力 $(p_b - p_c)A_l$ 等于 $M_l g$ 时，盒盖将被顶开，现要求盒盖闭合，所以要求 $p_b - p_c \leqslant (M_l g)/A_l$.

(d)当 $p_b - p_c = (M_l g)/A_l$ 时，盒盖将被顶开，利用(a)和(b)中结果，得到

$$\frac{n_b RT_l}{V_b} - \frac{n_c RT_l}{V_c} = \frac{M_l g}{A_l}$$

即 $T_l = \dfrac{M_l g}{RA_l[(n_b/V_b) - (n_c/V_c)]}$.

20.33 参见题 20.32.假设从 T_0 开始将此系统加热到温度 $T' > T_l$，然后又冷却到 T_0.只要不满足密封盒盖上的压强(改变值)比气室压强值(改变值)大 $M_l g/A_l$，盒盖会重新盖上.用 n'_b 代表加热并冷却之后留在盒子中气体的千摩尔数，证明

$$n'_b = \frac{(M_l g V_b V_c)/(A_l RT') + (n_b + n_c)V_b}{V_b + V_c}$$

证 ☞ 加热体系时,盒子中将有气体溢出到周围的气室中去,以保证盒子内外压强为$(M_l g)/A_l$.当温度达到最大值T'(开始冷却)时,盒盖重新盖上.因此,盒内气体最后的千摩尔数与气室内的气体千摩尔数满足方程

$$\left(\frac{n'_b R}{V_b} - \frac{n'_c R}{V_c}\right)T' = \frac{M_l g}{A_l}$$

因为整个体系内总的物质的量为常数,有

$$n'_c = n_b + n_c - n'_b$$

联立两式,得到

$$n'_b V_c - (n_b + n_c - n'_b)V_b = \frac{M_l g V_b V_c}{A_l R T'}$$

解出n'_b,得

$$n'_b = \frac{(M_l g V_b V_c)/(A_l R T') + (n_b + n_c)V_b}{V_b + V_c}$$

20.34 参见题20.33.证明,当$T' \to \infty$时,n'_b的值取到极限值$[(n_b + n_c)V_b]/(V_b + V_c)$.你能否简单解释此结果.

证 ☞ 当$T' \to \infty$时,n'_b表示式中分子的第一项趋于零,所以$n'_b \to [(n_b + n_c)V_b]/(V_b + V_c)$.即

$$\frac{n'_b N_A}{V_b} \to \frac{(n_b + n_c)N_A}{(V_b + V_c)}$$

其中N_A为阿伏伽德罗常数.上式左边部分是盒内气体最后的分子数密度,右边部分为整个体系总的平均数密度.当$T' \to \infty$时,两者趋于一致.因为当$T' \to \infty$时,与固定压强差$(M_l g)/A_l$对应的密度差降为零.另外,当$T' \to \infty$时,压强差与实际气压相比可以忽略不计.

20.35 验证道尔顿分压定律.

解 ☞ 理想气体状态方程可表示为总的分子数N的形式:$pV = NkT$.这一状态方程的前提是假设不考虑各个分子的精细结构及分子间的相互作用,只要此基本假设成立,则N可代表无相互作用混合气体总的分子数.若用下标1、2、3区分混合气体,则$N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots$表示各种气体分子数之和.根据上述分析,得

$$p = \frac{NkT}{V} = \frac{(N_1 + N_2 + N_3 + \cdots)kT}{V} = \frac{N_1 kT}{V} + \frac{N_2 kT}{V} + \frac{N_3 kT}{V} + \cdots$$

右面各项表示每种气体在温度T时单独占有总体积V时的压强,将它们称为"分压强"p_1、p_2、p_3、$\cdots$,于是得到结论:$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$.

20.36 20℃时混合气体各组分的分压强为:H_2, 200 mmHg; CO_2, 150 mmHg; CH_4, 320 mmHg;乙烯,105 mmHg.(a)求混合物的总压强,(b)求氢气所占的质量比.($M_{H_2} = 2$, $M_{CO_2} = 44$, $M_{CH_4} = 16$, $M_{C_2H_4} = 30$ kg/kmol.)

解 ☞ (a)根据道尔顿定律,总压强 = 各分压强之和 = 200 + 150 + 320 + 105 = 775(mmHg).

(b)对其中一种气体利用气体状态方程:$m = M(pV/RT)$.因此,氢气质量为$m_{H_2} = M_{H_2} p_{H_2}(V/RT)$.气体总的质量$m_t$为各分量质量之和,类似地写为

$$m_t = (M_{H_2} p_{H_2} + M_{CO_2} p_{CO_2} + M_{CH_4} p_{CH_4} + M_{C_2H_4} p_{C_2H_4})\frac{V}{RT}$$

所求质量比为

$$\begin{aligned}\frac{m_{H_2}}{m_t} &= \frac{M_{H_2} p_{H_2}}{M_{H_2} p_{H_2} + M_{CO_2} p_{CO_2} + M_{CH_4} p_{CH_4} + M_{C_2H_4} p_{C_2H_4}} \\ &= \frac{(2)(200)}{(2)(200) + (44)(150) + (16)(320) + (30)(105)} \\ &= 0.026\end{aligned}$$

20.2　分子动理论

20.37　什么是气体分子系统的方均根速率？它与理想气体压强有什么关系？

解　☞ 在质心参考系中观察，气体分子做无规则运动，动能取各种可能值. 假设有个分子的平动动能等于系统平均平动动能除以系统内分子数，则定义这个分子的速率为方均根速率(或称热速率)：$\frac{1}{2}mv_{\rm rms}^2 \equiv \overline{\frac{1}{2}mv^2}$，或 $v_{\rm rms}=\sqrt{\overline{v^2}}$. 对于稀薄气体，遵从理想气体方程：$\frac{1}{2}mv_{\rm rms}^2=\frac{3}{2}kT$，这样，可用微观物体的绝对温度衡量它在质心参考系中测量出的分子平均平动动能. 若将最后那个方程与理想气体状态方程 $pV=NkT$ 联立，解出：$pV=\frac{1}{3}Nmv_{\rm rms}^2$. 又因为 $Nm=M$，为此气体系统的总质量，所以有：$p=\frac{1}{3}\rho v_{\rm rms}^2$.

20.38　什么是能量均分定理？

解　☞ 能量均分定理是统计力学(忽略量子力学效应)的结果. 该定理的内容是"处于热平衡态的分子统计系统中每个分子能量的任意一项，若与坐标或速度的平方项有关，则此项平均值等于 $\frac{1}{2}kT$. 能量项指与坐标或速度有关的能量. 例如，平动动能有三个平方项：$\frac{1}{2}mv_x^2$，$\frac{1}{2}mv_y^2$，$\frac{1}{2}mv_z^2$. 则平均平动动能 $\overline{\frac{1}{2}mv^2}=\overline{\frac{1}{2}mv_x^2}+\overline{\frac{1}{2}mv_y^2}+\overline{\frac{1}{2}mv_z^2}=\frac{3}{2}kT$. 双原子分子有两个转轴，故有两个角速度项：$\overline{\frac{1}{2}I\omega_\theta^2}+\overline{\frac{1}{2}I\omega_\varphi^2}=2\left(\frac{1}{2}kT\right)=kT$. 同样，对于简单的固体，它内部的分子可以在平衡位置附近做简谐运动(沿 x，y，z 方向)，因此有六个平方项：$\frac{1}{2}kx^2$，$\frac{1}{2}ky^2$，$\frac{1}{2}kz^2$，$\frac{1}{2}mv_x^2$，$\frac{1}{2}mv_y^2$，$\frac{1}{2}mv_z^2$，总平均能量为 $6\left(\frac{1}{2}kT\right)=3kT$.

20.39　有五个分子速率分别为 12、16、32、40、48 m/s. 求(a)平均速率，(b)方均根速率，(c)证明：对于任意一种速率分布，都有 $v_{\rm rms}\geqslant\bar{v}$.

解　☞ (a) $\bar{v}=\frac{12+16+32+40+48}{5}=29.6(\rm m/s)$

(b) $v_{\rm rms}=\left[\frac{12^2+16^2+32^2+40^2+48^2}{5}\right]^{1/2}=32.6\ (\rm m/s)$

(c)用 v_i，$(i=1,\cdots,N)$代表各种速率，则有

$$\bar{v}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i,\quad v_{\rm rms}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i^2$$

考虑表达式：$A=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(v_i-\bar{v})^2$(表示每个速率偏离平均速率的平方平均值). A 值非负，将平方展开并各项相加，利用 $(v_i-\bar{v})^2=v_i^2-2\bar{v}v_i+\bar{v}^2$，则得到

$$A=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i^2-\frac{2\bar{v}}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i+\frac{1}{N}(N\bar{v}^2)$$

即

$$A=v_{\rm rms}^2-2\bar{v}^2+\bar{v}^2=v_{\rm rms}^2-\bar{v}^2\Rightarrow v_{\rm rms}^2\geqslant\bar{v}^2$$

所以

$$v_{\rm rms}\geqslant\bar{v}$$

当所有 v_i 都相等时，取等号.

20.40　计算 373.15 K(100 ℃)时氢气分子(H_2)的方均根速率.

解　☞ 根据分子量计算出一个氢气分子的质量：

$$m=\frac{M}{N_0}=\frac{2.016\times10^{-3}\rm kg/mol}{6.02\times10^{23}\rm mol^{-1}}=3.35\times10^{-27}\ \rm kg$$

根据 $\frac{1}{2}mv_{\rm rms}^2=\frac{3}{2}kT$ 得 $v_{\rm rms}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3(1.38\times10^{-23})(373.15)}{3.35\times10^{-27}}}=2.15(\rm km/s)$.

20.41　分子速率可用图 20-3 所示装置测出. 已知图中速度选择器的两圆盘相距 0.50 m，两

切口之间的角位移为 180°. 在实验中, 当圆盘以 600 r/s 的速度旋转时, 发现有分子穿过, 求分子可能的速率.

解 ☞ 一个分子穿过第一个切口后到达第二个切口的过程中, 若第二个圆盘转过了 π、3π、5π、…, 则这个分子还能穿过第二个切口, 则有

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{d}{v}$$

即 $v = \frac{\omega d}{\theta} = \frac{(600\times 2\pi)(0.50)}{(2n+1)\pi} = \frac{600}{2n+1}(\text{m/s}) \quad (n = 0,1,2,\cdots)$.

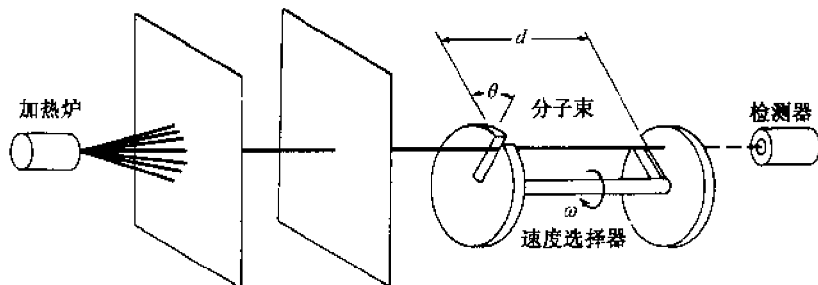


图 20-3

20.42 德·阿森戒耳(D'Arsonval)电流计的移动装置由一卷细绳和一片镜子组成, 两者通过一根石英纤维悬挂起来, 并可绕垂直轴旋转. 空气分子无规则地撞击到此悬挂着的装置上, 产生瞬时变化的力矩, 使角位移不断变化, 系统的零点也将不稳定(布朗运动的一种例子)见图 20-4. 若系统角位移平方根为 $\theta_{rms} = 2\times 10^{-4}$ rad, 细石英纤维的扭转系数 $K = 1\times 10^{-13}$ N·m/rad, 求空气的温度.

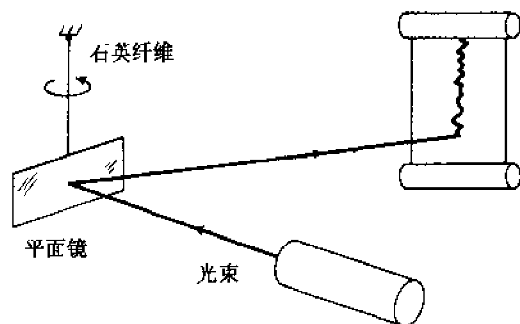


图 20-4

解 ☞ 假设有许多这种纤维一镜面系统与温度为 T 的空气处于平衡状态, 这些系统的能量项包括转动动能, 扭转势能.

利用能量均分定理求出这两种无序能量, 动能和势能. 系统因无规则碰撞产生的转动动能为 $\frac{1}{2}I\omega^2$, 纤维的扭转弹性势能为 $\frac{1}{2}K\theta^2$. 根据能量均分定理, 对所有纤维-镜面系统求平均, 得每种能量平均值等于 $\frac{1}{2}kT$. 若已知系统的 θ_{rms}, 则有 $\frac{1}{2}K\theta_{rms}^2 = \frac{1}{2}kT$. 而现在只有一个纤维-镜面系统, 模仿在任一时刻对许多系统求平均值的方法求其中一个系统对各时刻的平均值. 因为系统处于稳定状态, 它的运动来自空气分子的无规则碰撞, 所以两个平均值应相等. 根据所给条件, 求得

$$T = \frac{K\theta_{rms}^2}{k} = \frac{(1\times 10^{-13})(2\times 10^{-4})^2}{1.38\times 10^{-23}} = 290(\text{K}) = 17(℃)$$

20.43 求 200 ℃时氧气分子的有效方均根速率.

解 ☞ 一个 O_2 分子的质量 $m = 32\ \text{u} = 53\times 10^{-27}$ kg. $\frac{1}{2}mv_{eff}^2 = \frac{3}{2}kT$

$$\frac{1}{2}(53\times10^{-27})v_{\text{eff}}^2=\frac{3}{2}(1.38\times10^{-23})473$$

$$v_{\text{eff}}=\frac{3(1.38\times10^{-23})473}{5.3\times10^{-26}}=608(\text{m/s})$$

20.44　一个 100 mL 的容器中所装气体的压强为 200 kPa,每个气体分子的平均平动动能为 6.0×10^{-21} J.求容器内气体的分子数及摩尔数.

解　☞ 由 $p=(2n_u/3)(\overline{mv^2/2})$解出分子数密度:$n_u=N/V$. $n_u=[3(2.0\times10^5)]/[2(6.0\times10^{-21})]=(5.0\times10^{25})(/\text{m}^3)$,再乘以 100×10^{-6} m^3 得 $N=5.0\times10^{21}$;摩尔数$=N/N_A=8.3\times10^{-3}$ mol.

20.45　一个 2.00 mL 的容器内装有 50 mg 压强为 100 kPa 的气体,已知每个气体分子的质量为 8.0×10^{-26} kg,求每个气体分子的平均平动动能.

解　☞ 要求每个分子的平均平动动能 K_{avg},首先要求出分子数密度 $n_u=N/V$.分子数 $N=(50\times10^{-6}\text{ kg})/(8.0\times10^{-26}\text{ kg/个})=6.3\times10^{20}$.所以 $n_u=N/(2.0\times10^{-6}\text{m}^3)=(3.2\times10^{26})/\text{m}^3$.气体压强 $p=(2n_u/3)K_{\text{avg}}=1.0\times10^5(\text{Pa})$.所以,$K_{\text{avg}}=4.8\times10^{-22}$ J.

20.46　标准状态(STP)是指压强为 1.01×10^5 Pa,温度为 273 K 的状态,在标准状态下,22.4 m^{3}的理想气体包含 6.02×10^{26}个分子.求在标准状态下氯气(Cl_2)的一个分子的方均根速率.假设为理想气体情况.(氯气分子量为 71.)

解　☞ Cl_2 分子的质量为 $71/(6.02\times10^{23})=1.118\times10^{-25}(\text{kg})$.利用$(m_0\langle v^2\rangle)/2=\frac{3}{2}kT$,⟨ ⟩表示平均的意思.则$\langle v^2\rangle=[3(1.38\times10^{-23})(273)]/(1.8\times10^{-25})=9.6\times10^4$,所以 $v_{\text{rms}}=309$ m/s.

20.47　若温度为 T_0、压强为 p_0 时某种理想气体的方均根速率为 v_0,求下列各种情况下气体的速率.(a)温度从 20℃上升到 300℃,(b) $T=T_0$,压强加倍,(c)每个气体分子的分子量变为原来的 3 倍.

解　☞ (a)因为 $v\propto T^{1/2}$,所以 $v=v_0(573/293)^{1/2}=1.40v_0$.

(b)因为速率与压强无关,当 T 为常数时,速率仍为 v_0.

(c)注意到 mv^2 为常数,当 m 变为原来的 3 倍,则 v^2 变为原来的$\frac{1}{3}$,所以速率变为$(v_0/3)^{1/2}=0.58v_0$.

20.48　温度为何值时,氢气分子(分子量=2)的"有效"速率与 47℃时氧气分子(分子量=32)的"有效"速率相等.

解　☞ $\frac{1}{2}mv_{\text{eff}}^2=\frac{3}{2}kT\Rightarrow\frac{1}{2}Mv_{\text{eff}}^2=\frac{3}{2}N_AkT$,其中 $M=$分子量.则 $v_{\text{eff}}^2=(3kN_A)(T/M)$,对于 O_2,$v_{\text{eff}}^2=(3kN_A)(320\text{K}/32)$;对于 H_2,$v_{\text{eff}}^2=(3kN_A)(T/2)$.若两者相等,则 $T=(320)\left(\frac{2}{32}\right)=20(\text{K})=-253(℃)$.

20.49　一束质量都为 m_0,速率都为 v 的粒子沿x 轴方向发射.若每秒内有 1×10^{15}个粒子打到 1 mm^2 的面积上,且粒子粘到表面上,该面积上由于粒子束入射产生的压强为何值? 由此估算出电视机电子管内电子束产生的压强,$m_0=9.1\times10^{-31}$ kg,$v=8\times10^7$ m/s.

解　☞ 每个电子打到表面上时的冲量为 m_0v,乘上单位时间,单位面积上入射的电子数即为压强 $p=(10^{15}/10^{-6})m_0v=10^{21}m_0v$.将动量值$(9.1\times10^{-31})(8\times10^7)$代入,求出 $p=0.073$ Pa.

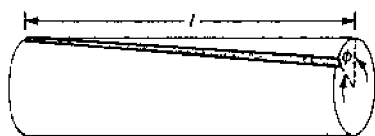


图 20-5

20.50　如图 20-5 所示的装置中,旋转圆筒长 20.0 cm,分子进入圆筒的入口与出口之间的角位移 $\phi=5.0°$,当圆筒以多大角速度转动时,速度为 300 m/s 的分子

能经过此圆筒？相当于每分钟转多少圈？

解 ☞ 分子以速度 v 沿 x 轴从左到右穿过圆筒所需要的时间 $t=l/v$. 若开始时从左端进入圆筒的分子速度有多种值, 只有那些运动时间 t 等于 ϕ/ω 的分子才能从右端出口飞出, 其中 ω 为圆筒的角速度. 因此, 要选出具有特定速度 v 的分子, 圆筒的转速必须为 $\omega=(v\phi)/l$. 将 $l=20.0$ cm $=0.200$ m, $\phi=5.0°=\pi/36$ rad, $v=300$ m/s 代入, 求出

$$\omega=\frac{(300\text{m/s})(\pi/36\text{rad})}{(0.200\text{m})}=130.9\text{ rad/s}=1250\text{ r/min}$$

20.51 外层空间的平均温度为 3 K, 求太空中质子(氢原子)的方均根速率($m_p=1.67\times10^{-27}$kg).

解 ☞ 利用 $(m_0\langle v^2\rangle)/2=(3kT)/2$, $\langle v^2\rangle=[3(1.38\times10^{-23})(3)]/(1.67\times10^{-27})=7.44\times10^4$, 所以 $v_{rms}=272$ m/s.

20.52 太阳光晕即我们看到的明亮的气态层的温度为 6000 K, 求在此温度下光晕的一种组成物质——质子的方均根速率($m_p=1.67\times10^{-27}$ kg).

解 ☞ 与题 20.51 同理, 只是改为 $T=6000$ K, 得 $v_{rms}=12.2$ km/s.

20.53 温度为何值时, H_2 分子的 v_{rms} 等于地球表面的逃逸速度($v_E=\sqrt{2gR_E}$)? 氢气逃逸月球表面的对应温度为何值? ($g_M=1.6$ m/s^2, $R_E=6367$ km, $R_M=1750$ km.)

解 ☞ 对于地球, $v_E=\sqrt{2gR_E}=\sqrt{2\times9.8\times6367\times10^3}=11.2$(km/s)

$$\frac{1}{2}mv_E^2=\frac{3}{2}kT_E\text{, 或}\frac{1}{2}Mv_E^2=\frac{3}{2}N_AkT_E=\frac{3}{2}RT_E,\ M=2\text{ kg/kmol}$$

$$T_E=\frac{Mv_E^2}{3R}=\frac{(2\text{ kg/kmol})(11.2\times10^3\text{ m/s})^2}{3(8314\text{ J/kmol}\cdot\text{K})}=10059\text{ K}$$

对于月球, $v_M=\sqrt{2\times1.6\times1750\times10^3}=2.37$(km/s). 利用 $T_M/T_E=v_M^2/v_E^2$, 求出 $T_M=(2.37/11.2)^2(10059\text{K})=450$ K.

20.54 重氢原子核气体中核的平均动能至少为 0.72 MeV 时发生原子核聚合反应, 重氢发生聚合反应所需温度为多少?

解 ☞ $\overline{\frac{1}{2}mv^2}=\frac{3}{2}kT$

$$(0.72\times10^6\text{ eV})(1.6\times10^{-19}\text{ J/eV})=1.5(1.381\times10^{-23}\text{ J/K})T$$

$$T=5.57\times10^9\text{ K}$$

20.55^c 理想气体状态方程的基础是统计能量分布, 即为麦克斯韦-玻尔兹曼分布, 它给出了动能在 $E\sim E+\mathrm{d}E$ 范围内的分子数为

$$N(E)\mathrm{d}E=\frac{2N}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{E}\mathrm{e}^{-E/kT}\mathrm{d}E$$

若总的分子数为 N, 求每个分子的平均动能.

解 ☞ $\bar{E}=\frac{1}{N}\int_0^\infty EN(E)\mathrm{d}E=\frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\int_0^\infty E^{3/2}\mathrm{e}^{-E/kT}\mathrm{d}E=\frac{2kT}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{3/2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 其中用了变量代换 $E=kTx$. 上式的积分可用标准积分法或查积分表求出, 结果等于 $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$. 所以 $\bar{E}=\frac{3}{2}kT$.

20.56^c 参见题 20.55, 写出麦克斯韦-玻尔兹曼速率分布函数.

解 ☞ 利用 $E=\frac{1}{2}mv^2$, 可将麦克斯韦-玻尔兹曼分布用速率 v 来表述. $\mathrm{d}E=mv\mathrm{d}v$, 令 $N'(v)$ 表示速度在 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 范围内的粒子数, 则

$$N'(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{2}{\pi}}N\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}v^2\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\mathrm{d}v$$

两边同除 N, 得到粒子在 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 范围内的概率 $P(v)\mathrm{d}v$ 为

$$P(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}v^2\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}$$

20.57 利用图 20-6(水银蒸气的麦克斯韦速率分布)求 N_2 分子在 460 K 时的最概然速率.

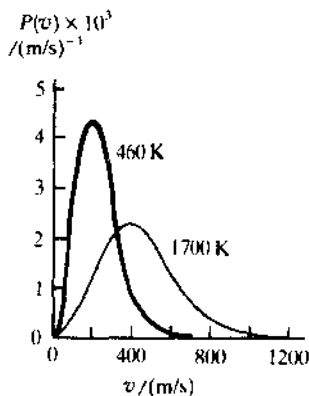


图 20-6

解 ☞ 对于水银,最概然速率为200 m/s. 令$(mv^2)/(2kT)\equiv x$,则概率密度方程可写为 $P(x)=4[m/(2\pi kT)]^{1/2}xe^{-x}$.(见题20.56).当 $x_{max}=[m_{Hg}(200^2)]/[2k(460)]$时,概率取到最大值,其中用的是水银的数据.因为,在固定温度 T 时,所有分子的 x_{max} 都相同,所以对于 N_2,我们有$(m_Nv^2)/[2k(460)]=[(m_{Hg})200^2]/[2k(460)]$,解出$v^2=(200)^2(m_{Hg}/m_N)$,$v=540$ m/s.[x_{max}的值为1.]

20.58 利用图 20-6,求 920 K 时 Hg 分子的最概然速率.

解 ☞ 同题 20.57 那样,将 $P(v)$写为只与 $x=(mv^2)/(2kT)$有关的形式.故只要求出 x_{max},则对所有 T,x_{max}都相等.与题 20.57 一致,有$(m_0v^2)/[2k(920)]=[m_0(200^2)]/[2k(460)]$,解出 $v=280$ m/s.

20.59 参见题 20.56,证明当 $v=\sqrt{(2kT)/m}$时,$P(v)$取最大值.利用微积分方法求最大值.

解 ☞ 令 $dP/dv=0$,即 $2v\exp[(-mv^2)/(2kT)]-(mv^3/kT)\exp[(-mv^2)/(2kT)]=0$,求出 $v_{max}=[(2kT)/m]^{1/2}$.

20.60 证明:题 20.56 中麦克斯韦速度分布函数是归一化的.[也就是说,$\int P(v)dv=1$,因此,$P(v)$确实是概率密度函数.]

解 ☞ $\int_0^\infty P(v)d(v)=\frac{4}{\pi^{1/2}}A^{3/2}\int_0^\infty v^2e^{-Av^2}dv$

其中 $A\equiv m/(2kT)$.右式积分值为 $\pi^{1/2}/4A^{3/2}$,所以$\int_0^\infty P(v)dv=1$,得证.

20.61 对阿伏伽德罗常数最早的一种的估算是在 1908 年由皮兰进行的.他将纯净液体中的均匀微粒驱散开,发现:达到平衡状态后,单位体积内的粒子数 n 随液体高度而减少.证明,存在关系式:$n=n_0e^{-(N_Av/RT)(\rho-\rho')gy}$,其中 n_0 为 $y=0$ 时的 n 值;ρ 和 ρ'分别为粒子和液体的密度;v 为一个粒子的体积.为得到 N_A,应如何利用 n,y 的数据绘制图表?

解 ☞ 要考虑的能量项为有效重力势能,因为只有浮力与高度有关,故将浮力考虑进来.由麦克斯韦-玻尔兹曼分布得粒子密度比为 $n/n_0=\exp[-(E-E_0)/(kT)]$.当 $y=0$ 时,势能取为 0.在任一高度 y 处的能量来自抵抗重力需做的正功:$m_0gy=\rho vgy$ 和抵抗浮力需做的负功:$-\rho'vgh$,所以 $E-E_0=(\rho vgy-\rho'vgy)-0$.

利用 $k=R/N_A$,代入麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数得到要证的结果:$n/n_0=\exp\{[-N_Avgy(\rho-\rho')]/(RT)\}$.两边求倒数并取自然对数,得 $\ln(n_0/n)=\{[N_Avg(\rho-\rho')]/(RT)\}y$.作出 $\ln(n_0/n)$-y 坐标图得到一根直线,利用此直线斜率可求出 N_A.

20.62 什么是气体分子的平均自由程?

解 ☞ 平均自由程是一个气体分子在两次碰撞之间走过的平均距离.对于半径为 b 的球形理想气体分子,平均自由程$=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)}$,其中 N/V 为单位体积的分子数.

20.63 证明:理想气体的平均自由程可用压强表示为

$$l=\frac{kT}{4\pi\sqrt{2}b^2p} \qquad (1)$$

证 ☞ 由题 20.62 得到 $l=1/(4\pi 2^{1/2}n_u b^2)$，其中 $n_u=N/V$. 联立 $pV=nRT$ 和 $n/V=n_u/N_A$，考虑到 $R/N_A=k$，所以 $n_u=(nN_A)/V=p/(kT)$，$l=(kT)/(4\pi 2^{1/2}b^2 p)$.

20.64 假设空气由半径为 1.7×10^{-10} m 的氮分子构成，求空气分子在标准状态下的平均自由程.

解 ☞ 将 $T=273$ K，$p=101$ kPa，$b=1.7\times10^{-10}$ m 代入题 20.63 的(1)式，得 $l\doteq73$ nm.

20.65 证明：容积为定值的容器中给定气体的分子的碰撞频率与绝对温度的平方根有关.

证 ☞ 由题 20.62 看出当体积 V 固定后，平均自由程 l 与温度无关. 要解这个问题先要求出两次碰撞间隔时间 t. 用 v_{rms} 表示系统的平均速度，根据平均自由程的定义，得到 $v_{rms}t=l$，或 $t=l/v_{rms}$ 而 $v_{rms}=\sqrt{(3kT)/m}$，所以 $t\propto1/\sqrt{T}$. 因为 t 表示每次碰撞的弛豫时间，所以碰撞频率 $f=(1/t)\propto\sqrt{T}$. 注意：若用其它的速度，如 $\bar{v}$ 或 v_p(最概然速率)来代表系统平均速度，结果也一样，因为这些速度也与 $\sqrt{T}$ 有关.

20.66 向太空发射一颗卫星取样调查太阳系的物质密度，得到每立方厘米有 2.5 个氢原子. 求此氢原子的平均自由程. 氢原子直径取 $d=0.24$ nm.

解 ☞ $l=\dfrac{1}{(N/V)\pi\sqrt{2}d^2}=\dfrac{1}{(2.5\times10^6)\pi\sqrt{2}(2.4\times10^{-10})^2}=1.56\times10^{12}(\text{m})$

(约是日地距离的 10 倍).

20.67 在体积为 20 km×20 km×1.5 km 的漆黑太空中有 10 架小型飞机以 150 km/h 的速度飞行，你坐在其中一架飞机内随着飞机随意飞行，不知道其它飞机的位置. 你的飞机平均经过多少时间后与其它飞机碰撞？在粗略计算时可把飞机假设为半径为 6 m 的球体.

解 ☞ 时间 $t=l/v$，其中 l 为题 20.62 给出的平均自由程，v 为飞机速度. 你所看见的飞机的密度为 $9/[20(20)(1.5)]=0.015(\text{km}^{-3})$. 所以碰撞时间约为 $1/[(4\pi2^{1/2})(36\times10^{-6})(0.015)(150)]=700$ (h).

20.68 标准状态下一气室内装有标准状态下的单原子气体氦. (a)求原子数密度 n'，(b)写出原子数密度 n、平均自由程 l 和碰撞截面 σ 的关系式.

解 ☞ (a)由理想气体状态方程得

$$n'=\frac{p}{kT}=\frac{1.01\times10^5\ \text{N/m}^2}{(1.38\times10^{-23}\text{N}\cdot\text{m/k})(273\text{k})}=2.68\times10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

(b)考虑碰撞时，可将一个运动原子视为存在一碰撞截面，面积为 σ. 一个原子在碰撞后经过一个平均自由程的距离，扫过体积为 σl 的柱体后进行下一次碰撞. 于是 $1/\sigma l$ 即为原子数密度，所以 $\dfrac{1}{\sigma l}\doteq n'$.

20.69 (a)常温下氦原子的截面积 σ 约为 10^8 b(10^{-20} m^2). 计算题 20.68 描述的氦气体的平均自由程.

(b)假设氦气室的直径为 1.0 m，温度为 273 K，为使平均自由程等于气室直径，应将压强降为何值？

解 ☞ (a)由题 20.68，得

$$l\approx\frac{1}{n'\sigma}=\frac{1}{(2.68\times10^{25}\text{m}^{-3})(1\times10^{-20}\text{m}^2)}=3.72\ \mu\text{m}$$

(此结果与题 20.64 求得的空气分子的结果一致，都比氦原子大)

(b)温度为常数时，平均自由程与压强成反比(见题 20.63)，所以 $lp=$ 常数 $=3.72\times10^{-6}$ m·atm，则与平均自由程 $l'=1.00$ m 相对应的压强值 p' 为

$$p'=\frac{3.72\times10^{-6}\ \text{m}\cdot\text{atm}}{1.00\ \text{m}}=3.72\times10^{-6}\ \text{atm}$$

20.3　大气性质;固体比热

20.70　一间 10 m×8 m×4 m 的房间内的温度计读数为 22 ℃,湿度计读出相对湿度(R.H.)为 35%.求这间房间内水蒸气的质量.22 ℃的饱和大气包含 19.33 g_{H_2O}/m^3.

解　☞ $\%R.H.=\frac{水的质量/m^3}{水的质量/m^3(饱和空气)}\times100$　$35=\frac{质量/m^3}{0.01933\ kg/m^3}\times100$

解出质量$/m^3=6.77\times10^{-3}kg/m^3$.此题中房间体积为 $10\times8\times4=320(m^3)$,因此,房间内水的质量为:$(320\ m^3)(6.77\times10^{-3}\ kg/m^3)=2.17\ kg$.

20.71　某天温度为 28 ℃,当盛冷饮的玻璃杯的温度为 16 ℃或更低时,有水蒸气在玻璃杯外壁上凝结.求这天的相对湿度(R.H.).28℃时饱和空气包含水 26.93 g/m^3;16 ℃时饱和空气包含水 13.50 g/m^3.

解　☞ 温度为 16 ℃或更低时,水蒸气凝结,所以凝结点为 16 ℃.此温度下的空气为饱和空气,含有水蒸气 13.50 g/m^3.因此

$$R.H.=\frac{实际质量/m^3}{饱和空气质量/m^3}=\frac{13.50}{26.93}=0.50=50\%$$

20.72　将室外 5 ℃,相对湿度为 20%的空气引入取暖空调机,加热到 20 ℃,相对湿度提高到 50%.在这一过程中,需要向每立方米室外空气加入多少克的水蒸气? 5 ℃的饱和空气含水 6.8 g/m^3,20 ℃时含水 17.3 g/m^3.

解　☞ 5 ℃时,水蒸气质量$/m^3=0.20\times6.8\ g/m^3=1.36\ g/m^3$

20 ℃时,质量$/m^3=0.50\times17.3\ g/m^3=8.65\ g/m^3$

$1m^3$ 5 ℃的空气加热到 20 ℃,体积膨胀为$(293/278)m^3=1.054\ m^3$

20 ℃时 1.054 m^3 空气中水蒸气质量$=1.054\ m^3\times8.65\ g/m^3=9.12\ g$

要向 $1m^3$ 5 ℃的空气中加入水蒸气质量$=(9.12-1.36)g=7.76\ g$

20.73　一台空调将 15 ℃相对湿度为 90%的空气降温至 10 ℃并除去一些水蒸气后又升温至 20 ℃以供观众席用.求从空气中除去的水蒸气的百分比和最后的相对湿度.

解　☞ 利用表 20-1 所给数据.15 ℃时饱和蒸汽压为 1.77,实际蒸汽压为 $0.90\times1.77=1.59$ kPa.10 ℃时饱和蒸汽压为 1.23 kPa.在给定绝对温度 T 时,蒸汽压与水蒸气密度成正比(根据理想气体方程)可以假设当温度变化很小时,蒸汽压仍与密度成正比,所以

$$需除去的水蒸气百分比=\frac{1.59-1.23}{1.59}=0.23=23\%$$

20 ℃时饱和蒸汽压为 2.31 kPa,所以

$$最后相对湿度=\frac{1.23}{2.31}=53\%$$

表 20-1

温度/℃	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
水的饱和蒸汽压/kPa	1.23	1.34	1.45	1.55	1.66	1.77	1.88	1.99	2.09	2.20	2.31	2.50	2.69
温度/℃	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
水的饱和蒸汽压/kPa	2.88	3.07	3.26	3.45	3.63	3.82	4.01	4.20	4.51	4.83	5.14	5.45	5.76

20.74　将 30 $m^3$20 ℃相对湿度为 85%的空气引入干燥设备除去所有水蒸气.一共除去了多少千克水蒸气?

解　☞ 利用理想气体方程和表 20-1 所给数据计算出 20 ℃时水蒸气的密度.

$$\rho=\frac{Mp}{RT}=\frac{(18\ kg/kmol)(0.85\times2.31\ kN/m^2)}{(8.314\ kN\cdot m/kmol\cdot K)(293\ K)}=0.0145\ kg/m^3$$

因此,需除去水蒸气$(30\ m^3)(0.0145\ kg/m^3)=0.435\ kg$.

20.75　若房间内空气的凝结点为 11℃,求它在 21℃时的相对湿度.

解　☞ 根据题 20.71 和题 20.73 的讨论,得

$$\text{R.H.}=\frac{11℃\text{饱和蒸汽压}}{21℃\text{饱和蒸汽压}}=\frac{1.34}{2.50}=54\%$$

20.76 将一份68°F,相对湿度为55%的空气样品缓慢降温,在温度为何值时发生凝结?

解 ☞ 如题20.73,我们假设蒸汽压∝温度微小变化下的密度值.从表20-1查出68°F,即20℃时,饱和蒸汽压为2.31 kPa.(0.55)(2.31)=1.27 kPa,约为10℃,即50°F时的饱和蒸汽压.

20.77 23℃时,某房间的相对湿度为75%,若温度降为19℃,相对湿度变为何值?

解 ☞ 同样我们假设蒸汽压∝温度变化范围内的密度值.从表20-1查出23℃时的饱和蒸汽压为2.88kPa,所以实际压强为(0.75)(2.88)=2.16 kPa.从表中查出19℃时饱和蒸汽压为2.20 kPa,因此相对湿度变为2.16/2.20=98%.

20.78 求25℃相对湿度为60%的空气的凝结点.

解 ☞ 从表20-1查出25℃时饱和蒸汽压为3.26 kPa,因此$p=(0.60)(3.26)=1.96(\text{kPa})$.分别假设(如题20.77)在凝结点时,对应的蒸汽密度(压强)等于饱和蒸汽密度(压强).从表中查出得凝结点≈17℃.

20.79 考虑标准下降率(温度随高度而降低),已知地面处温度为21℃,求在1100 m的高空的大气温度.

解 ☞ 温度随高度的标准下降率约为每110 m 1 ℃.(1100/110)(1 ℃)=10 ℃,温度降为21 ℃−10 ℃=11 ℃.(利用开尔文温标,294 K→284 K,下降率很小.)

20.80 (a)晴天时,轻型飞机的飞行员必须仔细计算飞机负载.为什么飞行员在海拔高的地方(如丹佛,科罗里达,密歇根市)起飞和着陆需格外小心?(b)将0℃时的空气密度与30℃时的空气密度比较.设压强为定值.

解 ☞ (a)在相对稀薄的空气中,机翼的升力较小.其它因素等同的情况下,晴天或高海拔处较稀薄的空气中,飞机起飞滑行时间较长,上升率较低,着陆时下降更快些.

(b)压强为常数时,密度与温度成反比$\rho_2/\rho_1=T_1/T_2$,将$T_2=273.15\text{K}(t_2=0\ ℃)$及$T_1=303.15\text{ K}(t_1=30\ ℃)$代入,得$\rho_2/\rho_1=303.15/273.15=1.11$.也就是说,0 ℃时的密度比30 ℃时大11%.

20.81 将波士顿(海拔0 m)罗根(Logan)机场0℃时的空气密度与丹佛(海拔1600 m)的斯坦布雷顿(Stapleton)机场30 ℃时的空气密度比较.温度为常数时,大气压p遵循方程$p=p_0e^{-z/8150}$,海拔z以m为单位,p_0表示$z=0$ m处的大气压.

解 ☞ 首先计算等温情况下斯坦布雷顿机场的压强.用下标l和s代表罗根和斯坦布雷顿,则有

$$p_s=p_le^{-(z_s-z_l)/8150}$$

现在计算在给定温度T_s下,p_s对应的密度.当温度相等时($T_s=T_l$),密度比ρ_s/ρ_l等于压强比p_s/p_l(玻意耳定律).而现在$T_s\neq T_l$,我们必须用更普遍的关系$(p/\rho T)$=常数.(假设两地的空气成分相同),则有

$$\frac{\rho_s}{\rho_l}=\left(\frac{273.15}{303.15}\right)e^{-(1600/8150)}=(0.9010)e^{-0.1963}=0.74$$

在上述条件及假设下,斯坦布雷顿机场的密度比罗根机场密度低26%,或者说,罗根机场密度比斯坦布雷顿机场密度高35%.

20.82 根据麦克斯韦-玻尔兹曼统计描述的粒子数(平衡系统)与$e^{-E/kT}$成正比推出大气方程.假设在任何高度处温度值恒定.(见题20.79.)

解 ☞ 空气分子的能量项中只有重力势能项mgz,(地面处为0),此项与垂直高度z有关,其中m是空气中一个分子的平均质量.粒子数密度$n_u(z)$遵从(麦克斯韦-玻尔兹曼定律):$n_u(z)\propto e^{-[E(z)/kT]}=e^{-mgz/kT}$,而$[n_u(z)]/[n_u(0)]=e^{-mgz/kT}/1$.因为空气密度$\rho$正比于$n_u$,我们有$\rho(z)/\rho(0)=e^{-mgz/kT}$.温度为常数时,$p(z)\propto\rho(z)$,所以$p(z)=p(0)e^{-mgz/kT}$,这就是大气方程.

20.83 温度为何值时，高 2.0 m 的容器顶部的水银蒸气密度与底部水银蒸气密度之比为 1/e？容器内温度均匀，气体为理想气体，水银分子量 = 201.

解 ☞ 根据大气方程 $\rho_1/\rho_2 = \exp[(-mgh)/(kT)]$. 因此，$1/2.718 = \exp\{[-m(9.8)(2)]/(kT)\}$，其中 $m = 201/N_A \doteq 3.34\times10^{-25}$ kg. 将 m 值代入，两边取自然对数得 $1 = 19.6\ m/kT$. 解出 $T = 0.47$ K.

20.84 27℃时将灰尘粒子气体装入 2.0 m 高的容器，达到平衡后，容器顶部的粒子密度等于底部粒子密度的$\frac{1}{e}$. 一个这种粒子的质量比一个氮气分子的质量大多少倍？

解 ☞ 与题 20.83 同理，则$(mgh)/(kT) = 1$. 解出 $m = (kT)/(gh) = 2.1\times10^{-22}$ kg. 一个 N_2 分子的质量为 $28/N_A = 4.65\times10^{-26}$ kg，所以灰尘粒子的质量比它大 4500 倍.

20.85[c] 从理想气体状态方程推出大气方程.

解 ☞ 图 20-7 所示为高度 z 处的一薄空气层，平衡时有

$$[p(z) - p(z+\Delta z)]A = \rho g A\Delta z$$

或写为

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

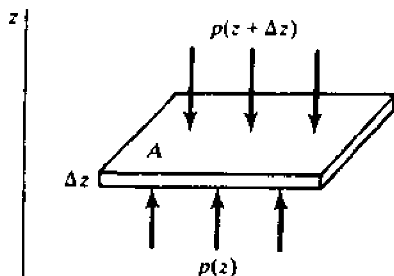


图 20-7

利用理想气体状态方程

$$p = \frac{\rho}{m}kT \text{ 或写为 } \rho = \frac{m}{kT}p$$

其中 m 为空气分子的平均质量，因此

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{mg}{kT}p$$

不计 T 和 g 随高度的改变，

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT}\int_0^z dz \text{ 得 } p = p_0 e^{-(mg/kT)z}$$

20.86 利用杜隆-珀蒂方程，估算铀金属的高温比热容（采用 J/kg·K 为单位）. ($M = 238$.)

解 ☞ 根据杜隆-珀蒂方程得摩尔定容比热容 $C_V = 3R$. 而 $c_V = C_V/M = [3(8314)]/238 = 105$ (J/kg·K).

20.87 20 世纪初常用杜隆-珀蒂方程来计算晶体的分子量. 高温下某种纯金属的比热为 230J/kg·K，求此金属的分子量.

解 ☞ 利用 $C_V = 3R$ 及 $M = C_V/c_V = 3(8314\text{J/kmol·K})/(230\text{J/kg·K}) = 108$ kg/kmol.

20.88[c] 证明：由能量均分定理（见题 20.38）可推导出杜隆-珀蒂方程.

证 ☞ 高温下，假设金属的内能基本来自晶格内原子在其平衡位置的振动. 若描绘成每个原子与邻近原子是通过弹簧联接的，则每个原子在三个相互垂直方向都有动能和势能——一共有 6 项. 根据能量均分定理，总能量为 $6\left(\frac{1}{2}kT\right) = 3kT$，则摩尔能量 $E = N_A(3kT) = 3RT$，摩尔热容 $C_V = dE/dT = 3R$.

20.89[c] 高温下固体很好地遵循杜隆-珀蒂方程，为预言低温下的热容，必须应用量子力学模型. 爱因斯坦最初应用了这种模型，他假设固体中所有的原子以相同频率 ν 振动. 含有 N 个原子的固体总能量等于 $3N$ 个一维简谐运动的能量. 这些总简谐运动能量的量子力学表达式为 $\langle E\rangle = 3Nh\nu\left[\frac{1}{2} + 1/(e^{\beta h\nu} - 1)\right]$，其中 $\beta = 1/kT$，$h = 6.63\times10^{-34}$ J·S. 证明：这种模型给出摩尔热容为

$$C = 3R\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 \frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T}-1)^2}$$

其中 $\Theta \equiv h\nu/k$.

证 ☞ 将阿伏伽德罗常数记为 A,则一摩尔物质

$$\langle E\rangle = 3Ah\nu\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\right] \tag{1}$$

所以给出摩尔热容为

$$C=\frac{d\langle E\rangle}{dT} = 3Ah\nu\frac{(-1)}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}\left(\frac{-h\nu}{kT^2}\right)e^{h\nu/kT}$$

$$= 3(Ak)\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2} \tag{2}$$

因为 $Ak=R$,为气体常数,方程(2)写为

$$C = 3R\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2\frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T}-1)^2} \tag{3}$$

其中 $\Theta\equiv h\nu/k$.

20.90 参见题 20.89,写出在极限值 $T\gg\Theta$ 和 $T\ll\Theta$ 时的 C 值.

解 ☞ $T\gg\Theta$ 时,$\Theta/T\ll 1$,所以解出方程(3)为

$$C = 3R(\Theta/T)^2\frac{[1+(\Theta/T)+\cdots]}{\{[1+(\Theta/T)+\cdots]-1\}^2}\to 3R\frac{(\Theta/T)^2[1+\Theta/T]}{(\Theta/T)^2}\to 3R$$

为杜隆-珀蒂方程.

$T\ll\Theta$ 时,$\Theta/T\gg 1$,所以

$$C\to 3R\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2\frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T})^2}=3R\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 e^{-\Theta/T}\text{($T\to 0$ 时 C 很快也$\to 0$)}$$

该结果比杜隆-珀蒂结果小.图 20-8 为题 20.89 中(3)的图像.

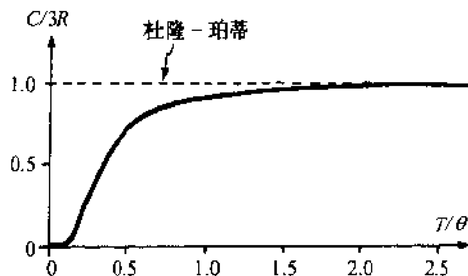


图 20-8

20.91[c] 低温下,金属比热容表达式为 $c=k_1T+k_3T^3$,其中 T 为开尔文温标.对 Cu,$k_3=2.48\times10^{-7}$ cal/g·K^4,$k_1=2.75\times10^{-6}$ cal/g·K^2.要将 15 g 的铜块从 5 K 加热到 30 K 需多少热能?

解 ☞ 所需热能为

$$\Delta H = m\int_{T_{初}}^{T_{末}}c(T)dT = m\int_{T_{初}}^{T_{末}}(k_1T+k_3T^3)dT$$

$$= m\left[\frac{k_1}{2}(T_{末}^2-T_{初}^2)+\frac{k_3}{4}(T_{末}^4-T_{初}^4)\right]$$

将数值代入,求得

$$\Delta H = 15\left\{\left(\frac{2.75\times10^{-6}}{2}\right)(30^2-5^2)+\left(\frac{2.48\times10^{-7}}{4}\right)(30^4-5^4)\right\}$$

$$= 0.0180+0.7527 = 0.771(\text{cal})$$

第二十一章 热力学第一定律

21.1 热力学基本概念

表 21-1 等体比热

气体(15℃)	c_V/(kcal·(kg)$^{-1}$·K)	c_V/(kJ·(kg)$^{-1}$·K)	*M/(kg/kmol)
He	0.75	3.100	4
Ar	0.075	0.310	40
O_2	0.155	0.650	32
N_2	0.177	0.740	28
H_2	2.40	10.000	2
CO_2	0.153	0.640	44
H_2O(200℃)	0.359	1.500	18
CH_4	0.405	1.690	16

* $c_p \approx c_v + R/M$($R = 8.314$ kJ/kmol·K)为理想气体满足的关系.将比热乘以 M 就得到摩尔热容.

21.1 描述热力学系统功的转化.

解 ☞ 在物理中,通常用 W 代表系统对外界所做的功.当系统向外膨胀,向外界传递能量时,W 为正;当系统压缩,系统从外界吸收能量时,W 为负.

有时,特别在化学中,会采用相反符号定义.

21.2 什么是系统的内能?

解 ☞ 系统的内能(U)是系统包含的总能量,是系统内分子或原子的动能、势能、化学能、电能、原子能等各种形式能量的总和.可以将能量分为有序能和无序能.其中有序能与系统粒子的整体运动有关,如系统的宏观运动.发射固定频率的光子等现象表示释放系统有序能.无序能与粒子的无规则热运动(碰撞)有关.因此,可用温度来衡量理想气体的无序动能,也称为热能,它是热力学研究的重点.

21.3 给出热力学第一定律.

解 ☞ 热力学第一定律描述能量守恒:设有 ΔQ 的热能流入系统,则这些能量成为系统增加的内能 ΔU 及系统对外界做的功 ΔW,热力学第一定律为 $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$.

21.4 定压比热(或热容)与定体比热有何关系?

解 ☞ 若将气体定体加热,则提供的热能转变为气体分子增加的内能.若将气体定压加热,则提供的热能转变为分子增加的内能和气体定压膨胀所做的功.因此,气体的定压比热 c_p 比定体比热 c_v 大.可以证明,分子量为 M 的理想气体,$c_p - c_v = R/M$,其中 R 为普适气体常数.

定压比热与定体比热的比值有很重要的应用,尤其在包含绝热过程的时候,此比值通常用 γ($\gamma = c_p/c_v$)标记.根据上述讨论,气体的 $\gamma > 1$.由运动定律得到常温下单原子气体(如 He、Ne、Ar),$\gamma = 1.67$;对于双原子气体(如 O_2、N_2),$\gamma = 1.40$.

21.5 为什么定体比热被认为比定压比热更加重要?

解 ☞ 虽然在定压下做实验更容易一些,尤其是液体和固体,但定体比热比定压比热更加重要.因为定体比热与化学系统的内能有密切的关系.这可以从热力学第一定律看出,当 V 为常数时,$\Delta W = p\Delta V = 0$,于是 $\Delta Q = nC_v\Delta T = \Delta U$.令 $u = U/n$ = 摩尔内能,得到 $C_v = \Delta u/\Delta T$.因此 C_v 直接给出了内能信息.

21.6 定义等温、等压、等体、绝热过程.

解 ☞ 等温过程指在系统整个变化过程中,保持温度为常数.只有准静态过程才有等温过程,因

为在准静态过程中,系统温度才有意义,系统可以有序地从一个状态进入另一个状态.

等压过程指在整个变化过程中,系统压强保持不变.它只在准静态过程中适用,只有准静态过程才存在固定的系统压强(或压强分布).

等体过程有时也称为等容或定容过程,指整个变化过程中保持系统体积不变.它对准静态过程和非静态过程都有意义.

绝热过程指与外界没有热量交换的变化过程.它对准静态和非静态过程都有意义.

这一章的所有问题基本上都指准静态过程.

21.7 一间 2.5 m×10 m×7 m 的房间内充满 100 kPa, 27℃的氮气.求房间内气体的质量.在下列两种情况下,要将房间温度升高 1℃需多少卡的热量? (a)定容情况,(b)定压情况.

解 ☞ 根据 $pV=(m/M)RT$,求出 $m=196$ kg.

(a)查表 21-1,利用 $\Delta Q=c_V m\Delta T=0.177(196)(1)=34.8$ kcal.(b)利用 $\Delta Q=c_p m\Delta T$,将 $c_p=c_V+R/M=0.740+8.314/28=1.037$ kJ/kg·K,求出 $\Delta Q=204$ kJ 或 48.7 kcal.

21.8 用活塞将 20 gCO_2 气体压入圆柱筒内,要使气体温度升高 5℃需吸收多少卡的热能? (a)定容情况,(b)定压情况.假设 $\gamma=1.3$.

解 ☞
$$\Delta Q=c_V m\Delta T=0.153(20)(5)=15.3(\text{cal})$$

(b)因为 $c_p/c_V=\gamma=1.30(CO_2)$,则 $c_p=1.30c_V=0.199$ cal/g·℃,则 $\Delta Q=0.199(20)(5)=19.9$ (cal).

21.9 假设空气由质量百分比为 78% 的 N_2 和 22% 的 O_2 组成,求空气的 c_V 值.

解 ☞ 1 g 空气含有 0.78 gN_2 和 0.22 gO_2,则热容应为 $c_V=0.78(0.177)+0.22(0.155)=0.172$ (cal/g·℃)

21.10 在标准状态下(1.01×10^5Pa, 273K),将$\frac{1}{2}$mol 氦气装入容器内,要将气体压强加倍需多少热能?

解 ☞ 因为 $pV=nRT$,所以要使压强加倍,要使温度加倍,即 $\Delta T=273$K.从表21-1查出 He 的摩尔热容 $c_V=Mc_V=(4\text{g/mol})(3.100\ \text{J/g·K})=12.4$ J/mol·K.因此,$\Delta Q=nc_V\Delta T=\frac{1}{2}(12.4)(273)=1693$(J).

21.11 求溴化氢(HBr)气体的 c_V 和 c_p.单位取 cal/g·℃,Br 的分子量为 80.

解 ☞ 注意到摩尔热容 C_V 来自每个能量项 $\frac{1}{2}R\approx1$ cal/mol·K.HBr 为双原子气体,故 $C_V=5$ cal/mol·K, $C_p=7$ cal/mol·K.比热容 $c_V=C_V/M$, $c_p=C_p/M$,而 $M=(1+80)$g/mol,则 $c_V=0.062$ cal/g·℃, $c_p=0.086$ cal/g·℃.

21.12 从表 21-1 可以看出氢气的定压、定容比热分别为 3.4 kcal/kg·℃和 2.4 kcal/kg·℃.若将 100 g 氢气在等压情况下从 10℃加热到 20℃,求外界做的功.

解 ☞ 外界做的功 $W=m(c_p-c_V)\Delta t=0.100(3.4-2.4)(20^\circ-10^\circ)=1$ kcal.

21.13 固体金属钠的密度为 970 kg/m³.(a)每立方米有多少钠原子? (b)金属内每个钠原子有一个自由电子构成电子气,设为理想气体.求钠金属内电子气的比热(cal/g·℃).Na 的分子量为 23.

解 ☞ 1 m³ 钠的原子数 $=(N_A m)/M=[(6\times10^{26})(970)]/23=2.5\times10^{28}$.自由电子有 3 个平动自由度,所以 $C_V=3$, $C_p=5$ cal/mol·K.除以 $M=23$,得 $c_V=0.13$, $c_p=0.22$.而实验值 c_p 为 0.293 cal/g·℃.

21.14[c] 将某种单原子理想气体从初始体积 V_i 压缩为 V_f.在压缩过程中,与外界存在热交换以保持气体温度不变,即 $T_f=T_i$.若气体有 n kmol.(a)求此气体的初压强 p_i,末压强 p_f,用 n、V_i、T_i 和 V_f 表示,(b)求等温压缩过程中气体压强 $p(V)$表达式,(c)求

压缩过程中气体做的功 ΔW，用 n、T_i 压缩率 V_i/V_f 表示，(d)求压缩过程中气体获得的热能 ΔH.

解 ☞ (a)根据理想气体方程，得 $p_i=(nRT_i)/V_i$；$p_f=(nRT_i)/V_f$.

(b)理想气体方程给出压强 $p=(nRT_i)/V$.

(c)气体做的功为

$$\Delta W=\int_{V_i}^{V_f}p(V)\mathrm{d}V=nRT_i\int_{V_i}^{V_f}\frac{\mathrm{d}V}{V}=nRT_i\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

可知：$\Delta W<0$.

(d)理想气体能量只与温度有关，所以在等温压缩过程中，$\Delta E=0$. 因此 $\Delta H=\Delta W=nRT_i\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$.

21.15[c] 在室温(20℃)下，配有活塞的圆柱筒内装有 0.10 mol 空气. 缓慢压活塞以保证筒内空气与外界处于热平衡. 若最后体积变为初始体积的 $\frac{1}{2}$，圆柱筒内空气做了多少功?

解 ☞ 利用 $pV=nRT$ 且 T 为常数，则

$$W=\int_{V_i}^{V_f}p\mathrm{d}V=nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{\mathrm{d}V}{V}=nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$W=(0.1\ \mathrm{mol})(8.314\ \mathrm{J/mol\cdot K})(293\ \mathrm{K})\ln\frac{1}{2}=-169\ \mathrm{J}$$

21.16[c] 1 mol 氦气开始时处于标准状态($p_1=1$ atm $=101.3$ kPa, $T_1=0℃=273.15$ K). 经历一等压过程后压强降为原来的一半. (a)求气体做的功，(b)求气体最后的温度，(c)再将气体等压膨胀 2 倍，气体做多少功?

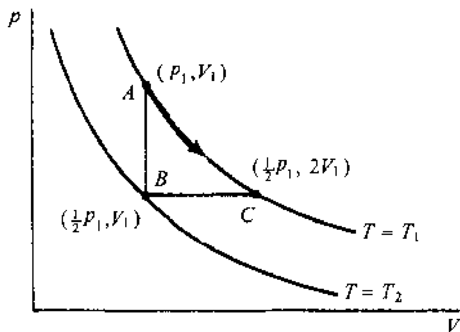


图 21-1

解 ☞ (a)根据图 21-1，因为 $\mathrm{d}W=p\mathrm{d}V=0$，所以 $W_{AB}=0$.

(b)利用定容时的理想气体方程

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{1}{2}，得\ T_2=\frac{T_1}{2}=136.58\ \mathrm{K}$$

(c)经历等压过程后，气体压强不变，体积加倍，温度回到初始温度 $T_1=273.16$ K.

$$W_{BC}=\int_{V_1}^{2V_1}\frac{1}{2}p_1\mathrm{d}V=\frac{1}{2}p_1V_1=\frac{1}{2}RT_1=\frac{1}{2}(8.31)(273.15)=1135(\mathrm{J})$$

21.17 参见题 21.16. 假设气体经历一等温膨胀过程后从状态(a)变为状态(c)，求气体所做的功.

解 ☞ 等温过程 $T=T_1$，$p=RT_1/V$，因此

$$W_{AC}=\int_{V_1}^{2V_1}p\mathrm{d}V=RT_1\int_{V_1}^{2V_1}\frac{\mathrm{d}V}{V}=RT_1\ln2=(8.31)(273.15)(0.693)=1573(\mathrm{J})$$

注意到 $W_{AC}\neq W_{AB}+W_{BC}$，可见气体做功与路径有关.

21.18 遵循范德瓦耳斯方程：$(p+an^2/V^2)(V-bn)=nRT$ 的气体经历一等温压缩(或膨胀)过程，体积从 V_1 变为 V_2，推导出此过程中系统做功的表达式.(当 $a=b=0$ 时，即为理想气体情况.)

解 ☞ 求出范德瓦耳斯方程中压强表达式

$$p=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2}\tag{1}$$

利用(1)式求出气体经历一等温过程、体积由 V_1 变为 V_2 时所做的功

$$\Delta W=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V-nb}-an^2\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V^2}$$

$$= nRT\left[\ln(V-nb)\Big|_{V_1}^{V_2}\right]+an^2\left[\left(\frac{1}{V}\right)\Big|_{V_1}^{V_2}\right]$$

$$= nRT\ln\left(\frac{V_2-nb}{V_1-nb}\right)+an^2\left(\frac{V_1-V_2}{V_1V_2}\right) \quad (2)$$

21.19 参见题21.18,国际单位制下 H_2 的 a、b 值约为24.8 kPa·m^6/kmol^2 和0.0266 m^3/kmol.若利用范德瓦耳斯方程计算300 K时将0.100 kmolH_2 从10.0 m^3 压缩到0.100 m^3 所需的功,修正值为多少?

解 ☞ 由题21.18(2)式,改变符号,得,对范德瓦耳斯气体,

$$\Delta W = (0.100)(8.314)(300)\ln\left[\frac{10.0-(0.100)(0.0266)}{0.100-(0.100)(0.0266)}\right]-(24.8)(0.100)^2\left[\frac{10.0-0.100}{(10.0)(0.100)}\right]=1153(\text{kJ})$$

而理想气体结果为(令 $a=b=0$)

$$\Delta W=(0.100)(8.314)(300)\ln\left(\frac{10.0}{0.100}\right)=1149(\text{kJ})$$

利用范德瓦耳斯气体得到的修正值为4 kJ,比理想气体结果增加了0.4%.

21.20^c 求出单原子分子在绝热过程中的 p-V 关系.

解 ☞ 热力学第一定律给出:在绝热过程中,$dE=-dW$,E=内能.单原子理想气体的能量 $E=\frac{3}{2}NkT$,因此 $dE=\frac{3}{2}Nk\,dT$.再利用理想气体方程,

$$dW=p\,dV=\frac{NkT}{V}dV$$

则 $\frac{3}{2}Nk\,dT=-\frac{NkT}{V}dV$,即 $\frac{dT}{T}+\frac{2dV}{3V}=0$

积分得:$\ln T+\frac{2}{3}\ln V$=常数,即 $TV^{2/3}$=常数

最后,利用理想气体方程将 T 代入,得到 $pV^{5/3}$=常数.

21.21 (a)计算单原子气体氩气的 c_v 值.已知 $c_p=0.125$ cal/g·℃,$\gamma=1.67$.
(b)计算双原子气体一氧化氮(NO)的 c_p 值.已知 $c_v=0.166$ cal/g·℃,$\gamma=1.40$.

解 ☞ (a)$c_v=\frac{c_p}{\gamma}=\frac{0.125}{1.67}=0.0749$(cal/g·℃).

(b)$c_p=\gamma c_v=(1.40)(0.166)=0.232$(cal/g·℃).

21.22 若150 L压强为1 atm的 $N_2(\gamma=1.4)$ 经历一绝热膨胀过程后体积变为250 L,求膨胀后气体的压强.

解 ☞ 根据绝热方程

$p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}$, $1(150^{1.4})=p_2(250^{1.4})$, $p_2=(0.6^{1.4})=0.49$(atm)

21.23 将某种气体样品准静态绝热膨胀,压强从120 kPa降为100 kPa,温度从300 K降为280 K.这种气体为单原子气体还是双原子气体?

解 ☞ 绝热过程中 p-T 关系为 $p_fV_f^{\gamma}=p_iV_i^{\gamma}$,或为 $p_f^{1/\gamma}V_f=p_i^{1/\gamma}V_i$.利用 $V=(nRT)/p$,得到

$$p_f^{1/\gamma-1}T_f=p_i^{1/\gamma-1}T_i \quad (1)$$

方程(1)可写为

$$\left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{1/\gamma-1}=\frac{T_f}{T_i} \quad (2)$$

则

$$\frac{1}{\gamma}-1=\frac{\ln(T_f/T_i)}{\ln(p_i/p_f)}=\frac{\ln(280/300)}{\ln(120/100)}=-0.378 \quad (3)$$

由(3)式解出 $\gamma=1.61$.此值更接近单原子气体的 γ 值1.67(双原子 $\gamma=1.40$),由此推断出该气体为单原子气体.

21.24^c 证明:若将理想气体等温压缩,则压缩率为 $1/p$;而将它绝热压缩,压缩率为 $1/\gamma p$.

证　☞ 根据定义，$\kappa=1/B=-(1/V)(\mathrm{d}V/\mathrm{d}p)$（$B$＝体积模量）．等温压缩过程中，$pV$ 为常数（因为 $pV=nRT$）．因此

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(pV)\Big|_{\Delta T=0}=1V+p\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)\Big|_{\Delta T=0}$$

容易得到，等温压缩过程

$$K\equiv\frac{-1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)\Big|_{\Delta T=0}=\frac{1}{p}$$

在绝热压缩过程中，pV^{γ} 值为常数，故有

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(pV^{\gamma})\Big|_{\Delta Q=0}=1V^{\gamma}+p\gamma V^{\gamma-1}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)\Big|_{\Delta Q=0}$$

解得，绝热压缩过程

$$K\equiv\frac{-1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)\Big|_{\Delta Q=0}=\frac{1}{\gamma p}$$

21.25[c]　求理想气体经绝热膨胀从状态(p_1,V_1)变为状态(p_2,V_2)过程中所做的功．

解　☞ 绝热膨胀过程

$$pV^{\gamma}=\text{常数}\quad C，\text{则}\ p=CV^{-\gamma}$$

于是　$W=\int_{V_1}^{V_2}p\mathrm{d}V=C\int_{V_1}^{V_2}V^{-\gamma}\mathrm{d}V=\frac{CV_1^{1-\gamma}-CV_2^{1-\gamma}}{\gamma-1}$

而　$C=p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}$，所以

$$W=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}$$

21.26　在 p-V 图中画出理想气体的绝热线和等温线（图 21-2）．证明：绝热线斜率的绝对值为等温线斜率绝对值的 γ 倍．因此，由于 γ 大于 1，故绝热线比等温线陡．

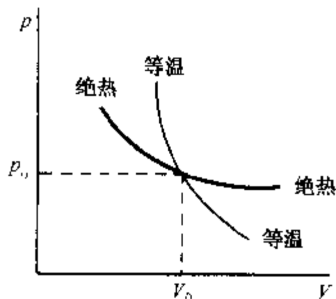


图 21-2

解　☞ 将交点记为(p_0,V_0)，则等温线可写为 $pV=p_0V_0$，或

$$p\big|_{\Delta T=0}=p_0V_0V^{-1}\tag{1}$$

而绝热线写为 $pV^{\gamma}=p_0V_0^{\gamma}$，或

$$p\big|_{\Delta T=0}=p_0V_0^{\gamma}V^{-\gamma}\tag{2}$$

对(1)式求导，并令 $V=V_0$ 求出等温线在(p_0,V_0)处的斜率

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)\Big|_{\Delta T=0}=-p_0V_0V^{-2}\Big|_{V_0}=\frac{-p_0}{V_0}\tag{3}$$

同理由(2)式求出绝热线在(p_0,V_0)处的斜率

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)\Big|_{\Delta Q=0}=-\gamma p_0V_0^{\gamma}V^{-\gamma-1}\Big|_{V_0}=\frac{-\gamma p_0}{V_0}\tag{4}$$

由(3)式和(4)式可证得在交点(p_0,V_0)处

$$\left|\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)\Big|_{\Delta T=0}\right|=\gamma\left|\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)\Big|_{\Delta Q=0}\right|$$

21.2　热力学第一定律；内能；p-V 图，循环过程

21.27　在下列两种情况下，将 0.100 molN_2 气从 10℃ 加热到 30℃ 的过程中，内能改变多少？(a)定容，(b)定压．

解　☞ 理想气体内能与温度成线性关系：$\Delta U=nC_v\Delta T$．所以(a)、(b)结果相等：$\Delta U=(0.100\ \mathrm{mol})$

$(4.96\ \text{cal/mol·K})(20\ \text{K}) = 9.92\ \text{cal} = 41.5\ \text{J}$.

21.28 在标准状态下将 50 L 空气等温压缩为 10 L,必须放出多少热量($p_{atm} = 100$ kPa)?

解 ☞ 设空气为理想气体,因为是等温过程,$\Delta U = 0$,所以 $\Delta Q = \Delta W$. 而 $\Delta W = nRT\ln(V_2/V_1) = p_1V_1\ln(V_2/V_1)$.

用到了理想气体状态方程:$p_1V_1 = nRT_1$,T 为常数. 因此,$\Delta Q = (1\times10^5)\cdot(5\times10^{-2})\ln 10/50 = -8050(\text{J})$,即要放出 8.05 kJ 的热量

21.29 将圆柱筒内的空气绝热压缩为原体积的$\frac{1}{3}$. 在此过程中,压缩机做功为 45 J. (a)此过程中气体内能改变多少? (b)气体吸收多少热量?

解 ☞ 此例中,$\Delta Q = 0$,所以 $\Delta U = -\Delta W = -(-45\ \text{J}) = 45\ \text{J}$;(b)绝热过程吸热为零.

21.30 求系统在下列各种情况下内能的改变. (a)系统吸热 500 cal,同时对外做功 400 J,(b)系统吸收 300 cal 热量,同时外界对它做功 420 J,(c)气体在定容情况下放热 1200 cal.

解 ☞ (a)$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (500\ \text{cal})(4.184\ \text{J/cal}) - 400\ \text{J} = 1700\ \text{J}$

(b)$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (300\ \text{cal})(4.184\ \text{J/cal}) - (-420\ \text{J}) = 1680\ \text{J}$

(c)$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (-1200\ \text{cal})(4.184\ \text{J/cal}) - 0 = -5000\ \text{J}$

注意到:当系统吸热时 ΔQ 为正,系统对外做功时,ΔW 为正;相反情况下,ΔQ、ΔW 取负

21.31 利用热力学第一定律及理想气体 $C_p - C_V = R$, $C_p/C_V = \gamma$ 其中 C 为摩尔热容,重新推导题 21.25 的结果.

解 ☞ 用 ΔH 表示热量,ΔE 表示内能的改变. 绝热过程,$\Delta H = 0$,因此 $\Delta W = -\Delta E$. 而 $\Delta E = nC_V(T_B - T_A)$,且 $R = C_p - C_V = (\gamma - 1)C_V$. 所以内能改变值可写为

$$\Delta E = \frac{nR}{(\gamma - 1)}(T_B - T_A)$$

而理想气体有 $nRT = pV$,所以

$$\Delta W = -\Delta E = \frac{-p_BV_B + p_AV_A}{\gamma - 1} = \frac{p_AV_A - p_BV_B}{\gamma - 1}$$

与题 21.25 结果一致.

21.32 求将边长为 6 cm 的立方铁块从 20℃ 加热到 300℃ 的过程中的 ΔW 和 ΔU. 对于铁,$c = 0.11$ cal/g·℃,体膨胀系数 $\beta = 3.6\times10^{-5}$℃$^{-1}$,铁块质量为 1700 g.

解 ☞

$$\Delta Q = cm\Delta T = (0.11\ \text{cal/g·℃})(1700\ \text{g})(280℃) = 52000\ \text{cal}$$

铁块体积 $V = (6\ \text{cm})^3 = 216\ \text{cm}^3$. 利用$(\Delta V)/V = \beta\Delta T$,得

$$\Delta V = V\beta\Delta T = (216\times10^{-6}\ \text{m}^3)(3.6\times10^{-5}℃^{-1})(280℃) = 2.18\times10^{-6}\ \text{m}^3$$

假设大气压为 1×10^5 Pa,

$$\Delta W = p\Delta V = (1\times10^5\ \text{N/m}^2)(2.18\times10^{-6}\ \text{m}^3) = 0.22\ \text{J}$$

根据热力学第一定律:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (52000\ \text{cal})(4.184\ \text{J/cal}) - 0.22\ \text{J}$$
$$= 218000\ \text{J} - 0.22\ \text{J} \approx 218000\ \text{J}$$

注意到在空气中膨胀所做的功与 ΔU, ΔQ 相比极小,因此在处理液体、固体问题时,ΔW 可以忽略.

21.33 将 1 m^3 温度为 0℃,压强为 1 atm 的 He 气等压冷却至 0.75 m^3,放出多少热量?

解 ☞ 利用普适气体方程求出末温,然后利用热力学第一定律.

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \quad p_1 = p_2$$

于是

$$\frac{1}{273} = \frac{0.75}{T_2}, \quad T_2 = 205\ \text{K}$$

$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$,而理想气体,$\Delta U = mc_v\Delta T$. 因此,$\Delta Q = mc_v\Delta T + p\Delta V = nC_v\Delta T + p\Delta V$. 在

STP 下，1 kmol 气体为 22.4 m^3，

$$\Delta Q = \frac{1}{22.4}(3)(205-273) + \frac{(1.013\times10^5)(0.75-1)}{4184} = -9.11 - 6.05 = -15.2\ (\text{kcal})$$

负号表示放热.

21.34 1 kg 水在 100℃ 时体积约为 1×10^{-3} m^3. 它在此温度和标准气压下沸腾形成水蒸气的体积为 1.671 m^3. (a)此过程中对外做多少功？(b)液体变为气体过程中，内能增加多少？

解 ☞ (a)水做的功为

$$\Delta W = p_{atm}\Delta V = (1.013\times10^5\ \text{N/m}^2)[(1.671-0.001)\text{m}^3] = 169\ \text{kJ}$$

(b)由表 17-2 得水的汽化热 $L = 540$ kcal/kg. 它表示在固定压强 1 atm 下蒸发每千克 100℃ 的水需要的热量. 因此，当 1 kg 水在 1 atm 压强下沸腾过程中内能改变量为

$$\Delta E = \Delta H - \Delta W = Lm - \Delta W = (540\ \text{kcal/kg})(1.00\ \text{kg})(4.184\text{kJ/kcal}) - (169\ \text{kJ}) = 2090\ \text{kJ}$$

21.35 用桨叶搅动盛在容器内的液体，若桨叶的功率为 2.24 kW，容器以 0.586 kW 的功率放热. 将容器和液体视为一个系统，求系统在单位时间内内能的改变.

解 ☞ $\Delta E = Q - W = -0.586 - (-2.24) = 1.654\ (\text{kW}) = 1.654\ (\text{kJ/s}) = 5954\ (\text{kJ/h})$，约为 6(MJ/h).

21.36 将一根劲度系数为 5 N/m 的弹簧压缩 0.04 m 并夹紧后放入一盛酸容器，使弹簧溶解. 弹簧有多少势能？当弹簧溶解后将有什么现象发生？

解 ☞ 被压缩的弹簧具有弹性势能，大小为 $U_{弹} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(5)(0.04)^2 = 0.004(\text{J})$. 弹簧溶解时，有序势能转变为系统的无序势能和动能，总能量守恒.

21.37 燃烧 1 磅燃烧热为 10000 Btu/lb 的燃料，使 6000 lb 水泵高 110 ft，求转化成有用功的热量比值.

解 ☞ $效率 = \frac{有用功}{燃料发热提供的总功} = \frac{(6000\ \text{lb})(110\ \text{ft})}{(10000\ \text{Btu})(778\ \text{ft·lb/Btu})} = 0.085 = 8.5\%$.

21.38 将容器内 1.00 kmol He 气(近似认为是理想气体)经历如图 21-3 所示的循环过程. BC 为等温过程，$p_A = 1.00$ atm，$V_A = 22.4$ m^3，$p_B = 2.00$ atm，求 T_A、T_B、V_C 的值.

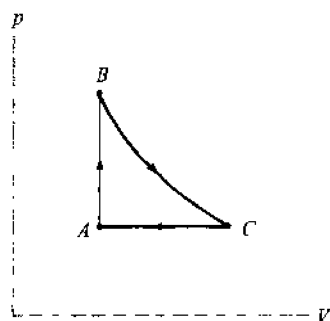


图 21-3

解 ☞ 根据理想气体状态方程得到

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(1.013\times10^5\ \text{Pa})(22.4\ \text{m}^3)}{(1.00\ \text{kmol})(8.314\times10^3\ \text{J/kmol·K})} = 273\ \text{K}$$

因为图 21-3 中 AB 为等容过程，$T_B = (p_B/p_A)T_A$. 将 $p_B = 2.00\ \text{atm} = 2p_A$ 代入得 $T_B = 546$ K. CA 为等压过程，可用查理定律，$V_C/T_C = V_A/T_A$，则 $V_C = (T_C/T_A)V_A$. 而 BC 为等温过程，所以 $T_C = T_B = 2T_A$，因此：$V_C = 2V_A = 44.8$ m^3.

21.39 参见题 21.38，计算此循环过程中对外做的功.

解 ☞ AB 过程，气体对外做功为 0；等温过程 BC 气体对外做功为

$$\Delta W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{RT_B}{V} dV = RT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = RT_B \ln 2$$
$$= (8.314\ \text{kJ/kmol·K})(546\ \text{K})(0.6931)1\ \text{kmol} = 3150\ \text{kJ}$$

CA 过程中气体对外做功为

$$\Delta W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} p\,dV = p_A \int_{V_C}^{V_A} dV = p_A(V_A - V_C) = -p_A V_A$$
$$= -(101.3\ \text{kPa})(22.4\ \text{m}^3) = -2270\ \text{kJ}$$

则在整个循环过程中对外做的总功

$$\Delta W = \Delta W_{AB} + \Delta W_{BC} + \Delta W_{CA} = 0 + (3150) + (-2270) = 880\ (\text{kJ})$$

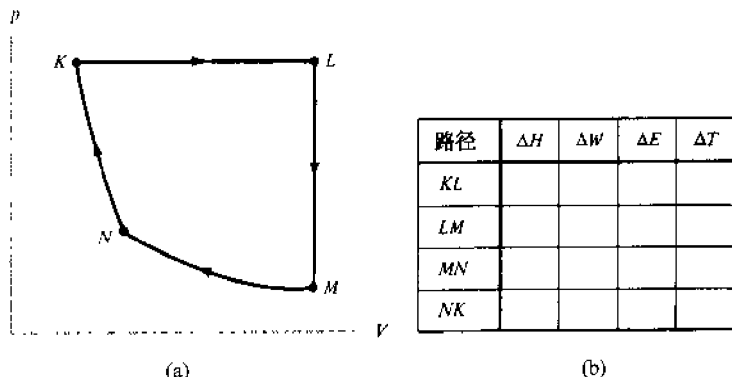
21.40 参见题 21.39,证明净功等于气体吸收的净热量.假设为理想单原子气体情况.

解 ☞ AB 过程,气体等容加热,所以 $\Delta H_{AB} = nC_V(T_B - T_A)$,因为气体为单原子气体,$C_V = \frac{3}{2}R$.因此,$\Delta H_{AB} = \frac{3}{2}nR(T_B - T_A) = (1.5)(1.00)(8.314)(273) = 3400\ (\text{kJ})$.$BC$ 过程,$\Delta T = 0$,理想气体内能不改变:$\Delta E_{BC} = 0$.由热力学第一定律得到:$\Delta H_{BC} = +\Delta W_{BC} = 3150$ kJ.CA 过程,压强为常数,所以 $\Delta H_{CA} = nC_P(T_A - T_C) = \frac{5}{2}nR(T_A - T_C) = (2.5)(1.00)(8.314)(-273) = -5670(\text{kJ})$.整个循环过程吸收的净热量 $\Delta H = \Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta H_{CA} = 3400 + 3150 - 5670 = 880\ (\text{kJ})$,等于系统对外做的净功.

21.41 假设气体经历图 21-3 的逆循环过程,从 A 经 C 经 B 最后回到 A.求每一阶段系统对外做的功及系统吸的热.

解 ☞ 系统在任意时刻的状态由热力学变量 p、V、T 描述,此过程为准静态可逆过程.这就意味着,在原过程中吸热多少热,则在逆过程中就放出多少热.对外做功也一样.

21.42 图 21-4(a)为某理想气体的可逆循环 p-V 图,其中 MN 为等温过程,NK 为绝热过程.根据此循环过程填表 21-4(b),用 + 表示所列值增加,用 − 表示减少,用 0 表示无变化.



路径	ΔH	ΔW	ΔE	ΔT
KL				
LM				
MN				
NK				

(a) (b)

图 21-4

解 ☞ 路径 KL:此过程为等压膨胀(p 为常数,V 增加).显然,气体对外做功,所以 $\Delta W > 0$.气体密度减小时要保持压强不变,必须提高温度:$\Delta T > 0$.对于理想气体,能量仅与温度有关,E 随 T 增加,所以 $\Delta E > 0$.因为 $\Delta H = \Delta E + \Delta W$,则$\Delta H > 0$.

路径 LM:此过程为等容冷却(V 为常数,p 减小,T 随 p 而减小).因为体积不变,得 $\Delta V = 0$,因此 $\Delta W = 0$.已经得到 $\Delta T < 0$,因为这是 p 在等容情况下变小的唯一方法.而 E 随 T 单调增加,所以 $\Delta E < 0$.于是 $\Delta E + \Delta W = \Delta H < 0$.

路径 MN:此过程为等温压缩过程,所以 $\Delta T = 0$,对理想气体,$\Delta E = 0$.此过程体积减小($\Delta V < 0$),所以对外做功 $\Delta W < 0$.因此 $\Delta E + \Delta W = \Delta H < 0$.

路径 NK:此过程为绝热压缩,所以 $\Delta H = 0$,因为体积减小($\Delta V < 0$),所以 $\Delta W < 0$.因此,$\Delta H - \Delta W = \Delta E > 0$.理想气体温度也相应增加:$\Delta T > 0$.

结果为图 21-5.

21.43 n kmol 单原子理想气体准静态地从状态 A 沿直线到达状态 C,如图 21-6.计算在此过程中,气体对外做的功 ΔW,气体内能的增加 ΔE,气体吸收的热量 ΔH.所有结果都用 p_A、V_A 表示.

解 ☞ 气体沿直线路径 AC 所做的功 ΔW_{AC} 等于此路径下的面积 $\int_A^C p\mathrm{d}V$.此积分为图 21-6 中长方形的面积 $p_A(V_C - V_A)$ 加上三角形面积 $\frac{1}{2}(p_C - p_A)(V_C - V_A)$.因为 $p_C = 2p_A$,$V_C = 2V_A$,得到

$\Delta W_{AC} = p_A(V_A) + \frac{1}{2}(p_A)(V_A)$. 因此, $\Delta W_{AC} = \frac{3}{2}p_A V_A$. 对于单原子理想气体, $\Delta E_{AC} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_A)$. 因为 $pV = nRT$, 求得 $\Delta E_{AC} = \frac{3}{2}(p_C V_C - p_A V_A) = \frac{3}{2}(4p_A V_A - p_A V_A) = \frac{9}{2}p_A V_A$. 最后利用热力学第一定律, $\Delta H_{AC} = \Delta E_{AC} + \Delta W_{AC} = 6p_A V_A$.

路径	ΔH	ΔW	ΔE	ΔT
KL	+	+	+	+
LM	−	0	−	−
MN	−	−	0	0
NK	0	−	+	+

图 21-5

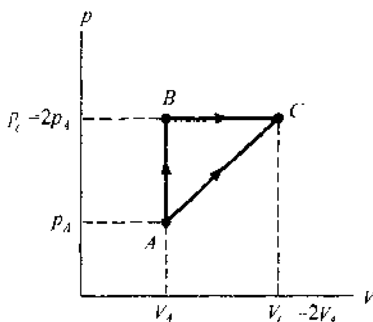


图 21-6

21.44 (a)若气体沿路径 ABC 准静态地从 A 到达 C, 重求题 21.43, (b)解释(a)的结果与题 21.43 结果的异同点.

解 ☞ (a)气体沿路径 ABC 所做的功 ΔW_{ABC} 为两部分之和, ΔW_{AB} 和 ΔW_{BC}. 而沿 AB, $dV = 0$, 所以 $\Delta W_{AB} = 0$. 因此, $\Delta W_{ABC} = \Delta W_{BC} = p_C(V_C - V_A) = 2p_A V_A$, $A \to C$ 过程中能量的变化与路径无关: $\Delta E_{ABC} = \Delta E_{AC} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_A) = \frac{9}{2}p_A V_A$. 气体吸热 $\Delta H_{ABC} = \Delta E_{ABC} + \Delta W_{ABC} = \frac{13}{2}p_A V_A$. (b)因为 E 为状态量, 所以两个过程的内能改变量相同. 而 ΔW 和 ΔH 因过程不同而不同, 气体做的功和气体传递的热与过程有关. W 和 H 都不是状态量.

21.45 参见图 21-7 所示的理想气体卡诺循环, 证明绝热过程 NK 和 LM 中气体做的净功等于 0.

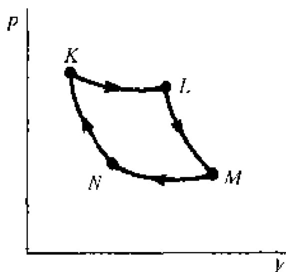


图 21-7

解 ☞ 如图所示, 卡诺循环是由两个绝热过程和两个等温过程组成的闭合路径. 沿着绝热过程 NK, 气体做的功为(见题 21.25)

$$\Delta W_{NK} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_N V_N - p_K V_K) \tag{1}$$

沿着绝热过程 LM, 气体做的功为

$$\Delta W_{LM} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_L V_L - p_M V_M) \tag{2}$$

则卡诺循环中两个绝热过程内气体做的净功为

$$\Delta W = \Delta W_{NK} + \Delta W_{LM} = \frac{1}{\gamma - 1}[(p_L V_L - p_K V_K) + (p_N V_N - p_M V_M)] \tag{3}$$

因为 KL 和 MN 为等温过程, 利用玻意耳定律: $p_K V_K = p_L V_L$, $p_M V_M = p_N V_N$. 代入方程(3), 得到 $\Delta W = 0$.

21.46 图 21-8 的 p-V 图表示在装有活塞的圆柱筒内气体经历的一个循环过程. 求气体在(a)AB 段, (b)BC 段, (c)CD 段, (d)DA 段做的功.

解 ☞ 在膨胀过程中, 气体做的功等于 p-V 曲线相关段下包围的面积. 而在压缩过程中两者大小相等, 符号相反.

(a)功 = 面积 $ABFEA = [(4 - 1.5)\times 10^{-5}\ \mathrm{m^3}](4\times 10^5\ \mathrm{N/m^2}) = 1.00\ \mathrm{J}$

(b)功 = BC 下的面积 = 0

在 BC 段, 体积没有改变, 因此 $p\Delta V = 0$.

(c)这是压缩过程, 所以功为负值:

$$功 = -(面积\ CDEFC) = -(2.5\times 10^{-6}\ \mathrm{m^3})(2\times 10^5\ \mathrm{N/m^2}) = -0.50\ \mathrm{J}$$

(d)功 = 0

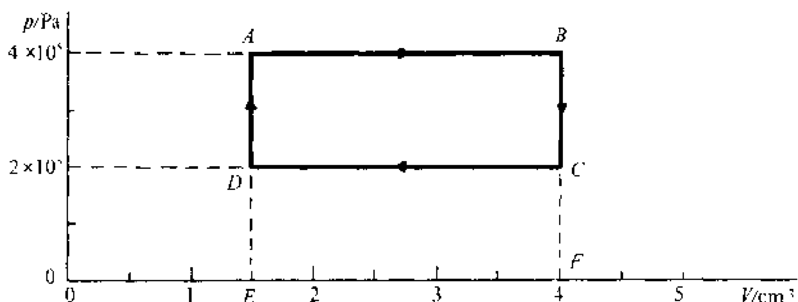


图 21-8

21.47 从图 21-8 所示的循环过程中求(a)在此循环中气体的净输出功.(b)每个循环过程中气体放出的净热量.

解 ☞ (a)方法一　从题 21.46 中可知,气体对外做的净功为 1.00 J − 0.50 J = 0.50 J.

方法二　气体对外做的净功等于 p-V 曲线包围的面积.

$$功 = 面积\ ABCDA = (2\times10^5\ \mathrm{N/m^2})(2.5\times10^{-6}\ \mathrm{m^3}) = 0.50\ \mathrm{J}$$

(b)假设循环从 A 点处开始,经过一个循环后回到 A 点,因此气体的初状态与末状态相同.因此,每个循环过程中,ΔU 等于 0.利用热力学第一定律,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0 + 0.50\ \mathrm{J} = 0.50\ \mathrm{J}$$

21.48 如图 21-9 所示,8 kg 的可自由移动的活塞(面积为 60 cm^2)将理想气体封闭在一圆柱筒内.大气压强为 100 kPa,然后将气体从 30℃ 加热到 100℃,活塞上升 20 cm.将活塞固定在此位置后再将气体冷却到 30℃.用 ΔQ_1 表示加热过程中气体吸收的热,用 $|\Delta Q_2|$ 表示冷却过程中气体放出的热,求 ΔQ_1 与 $|\Delta Q_2|$ 之差.

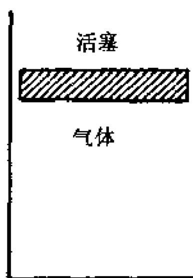


图 21-9

解 ☞ 在加热过程中,内能改变 ΔU_1,气体做功 ΔW_1,气体压强为

$$p = \frac{8(9.8)\ \mathrm{N}}{60\times10^{-4}\ \mathrm{m^2}} + 1.00\times10^5\ \mathrm{N/m^2} = 1.13\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

$$\Delta Q_1 = \Delta U_1 + \Delta W_1 = \Delta U_1 + p\Delta V$$

$$= \Delta U_1 + (1.13\times10^5\ \mathrm{N/m^2})(0.20\times60\times10^{-4}\ \mathrm{m^3}) = \Delta U_1 + 136\ \mathrm{J}$$

在冷却过程中,$\Delta W = 0$,所以易得 $\Delta Q_2 = \Delta U_2 < 0$.要求出 ΔU_2,我们注意到理想气体回到初始温度,因此内能与开始时相同.所以 $\Delta U_2 = -\Delta U_1$,即 $|\Delta Q_2| = \Delta U_1$.得出 ΔQ_1 比 $|\Delta Q_2|$ 大 136 J = 32.5 cal.

第二十二章　热力学第二定律

22.1　热机；热力学第二定律的开尔文-普朗克表述及克劳修斯表述

22.1　什么是热力学可逆过程？

解　☞ 在理想的可逆过程中，系统经过一系列平衡态后，从初始时的平衡状态，进入最终的平衡态．也就意味着在此过程的任何时刻，系统与外界保持热平衡与力平衡．只要改变外部条件，此过程进行方向可以反过来(因此，称为"可逆")．

只有在准静态(即变化缓慢)和没有耗散作用(如摩擦)情况下，才能是可逆过程．

22.2　什么是热机？什么是热机效率？

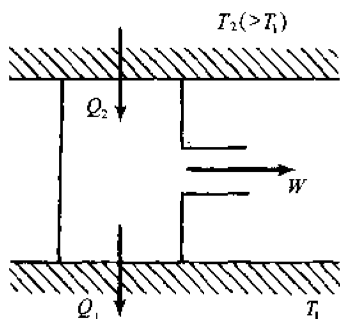


图 22-1

解　☞ 热机是将热转变成功的装置或系统．热机从高温热源吸热，对外做功，再向低温热源放热．循环热机的工作效率 η 为

$$\eta=\frac{W}{Q_2}=1-\frac{Q_1}{Q_2}$$

其中 Q_2、Q_1 和 W(见图 22-1)分别表示每次循环中从高温热源吸收的热量，向低温热源释放的热量和对外做功．第 2 个等号是考虑到每次循环中有 $\Delta U=0$，故 $W=Q_2-Q_1$．

工作在两个热源之间，有最大热效率的热机是卡诺热机，它进行卡诺循环时(题 21.45)的最大效率为

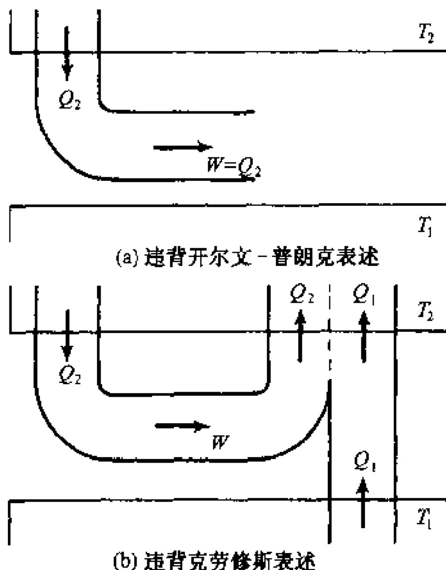
$$\eta^*=1-\frac{T_1}{T_2}$$

T_1、T_2 分别是低温热源和高温热源的温度．

22.3　什么是致冷机？什么是致冷机致冷系数？

解　☞ 致冷机(或称热泵)是逆向工作的热机．它从低温热源吸热，吸收外界的功，再向高温热源放热．在致冷机的一个循环过程中，从低温热源吸热 Q_1，外界提供的功 $W=Q_2-Q_1$，其中 Q_2 表示致冷机向高温热源释放的热量．则致冷系数 $\kappa=Q_1/W=Q_1/(Q_2-Q_1)$．当 Q_1 确定时，则工作在两个热源之间的致冷机进行卡诺循环时，致冷机的致冷系数最大

$$\kappa^*=\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right)^{-1}$$



(a) 违背开尔文-普朗克表述

(b) 违背克劳修斯表述

图 22-2

22.4 热力学第二定律有哪两个经典描述?

解 ☞ 开尔文-普朗克表述:不可能从单一热源吸收热量,使它完全转变为功,而不引起其他变化.

克劳修斯表述:不可能把热量从低温物体传向高温物体,而不引起其他变化.

22.5 证明热力学第二定律的克劳修斯表述与开尔文-普朗克表述是等价的.

证 ☞ 若违背表述 A 则也违背表述 B,那么 A、B 是等价的;反之,则 A、B 不等价.

图 22-2(a)所示为一台违背开尔文-普朗克表述的热机,它从温度 T_2 的热源吸热 Q_2,对外做功也为 Q_2.现在用这台热机驱动一台工作在 $T_1(T_1<T_2)$,T_2 热源之间的普通致冷机.如图 22-2(b)所示,复合热机将净热量 Q_1 从 T_1 热源传向 T_2 热源而不需要外界做功.因此也违背了克劳修斯表述.

图 22-3(a)所示的致冷机违背了克劳修斯表述,将此致冷机与一台普通热机联合工作,如图 22-3(b),复合热机将从高温热源吸收的净热量 Q_2-Q_1 全部转化为对外做的功而没有向低温热源放热.这就违背了开尔文-普朗克表述.

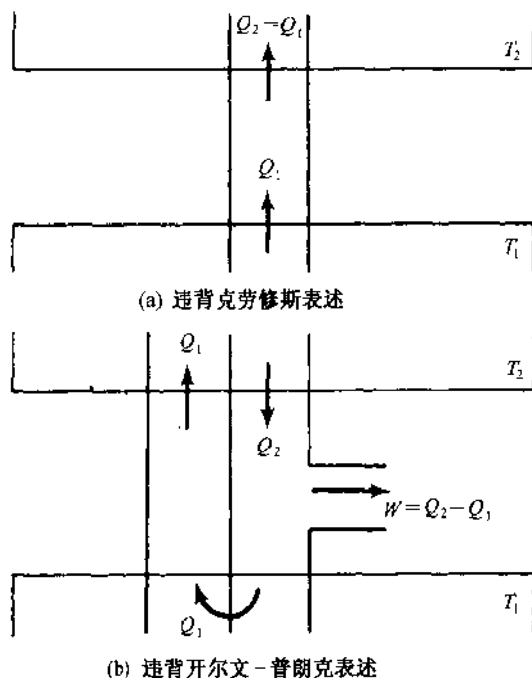


图 22-3

22.6 证明(如题 22.2 所述),工作在高温热源与低温热源之间的任何热机的效率小于或等于卡诺热机效率.

证 ☞ 我们利用题 22.5 的推理,考虑到卡诺热机是可逆的.图 22-4 中,假设工作在 T_2 热源与 T_1 热源之间的热机 A 的效率大于卡诺热机 C 的效率.现进行逆卡诺循环从低温热源吸收热量 Q_1,则必有 $Q'_2<Q_2$.这是因为根据假设,有 $\eta_A=1-(Q_1/Q_2)>\eta_C=1-(Q_1/Q'_2)$.又因为 $W=Q_2-Q_1$,$W'=Q'_2-Q_1$,所以热机 A 做功 W 大于热机 C 吸收的功 W',而 $W-W'=Q_2-Q'_2$.于是,若将两

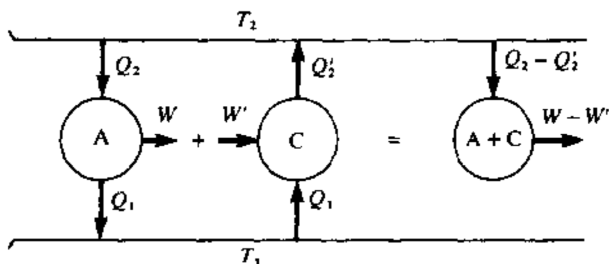


图 22-4

热机看成一台复合热机，如图中所示，违背了热力学第二定律．所以假设 $\eta_A > \eta_C$ 不成立，而应为 $\eta_A \leqslant \eta_C \equiv \eta^*$．

22.7 证明卡诺循环(图 22-5 所示)满足 $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$．假设工作物质为 1 mol 理想气体．(注意：Q_1，Q_2 定义为正值．)

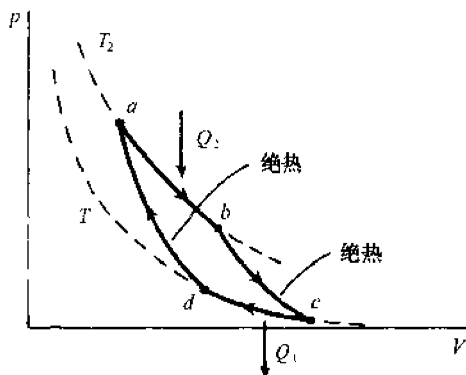


图 22-5

证 ☞ 过程 $a \to b$ 中，气体等温膨胀，内能不变，从 T_2 热源吸热 Q_2 等于气体对外做的功．与题 21.15 同理，可得 $Q_2 = RT_2\ln(V_b/V_a)$．同样，在过程 $c \to d$ 中，放出的热量 $Q_1 = RT_1\ln(V_c/V_d)$．

过程 $b \to c$ 和 $d \to a$ 为绝热过程，有

$$T_2V_b^{\gamma-1} = T_1V_c^{\gamma-1},\ T_1V_d^{\gamma-1} = T_2V_a^{\gamma-1}$$

两式相除得 $V_b/V_a = V_c/V_d$，于是

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{RT_1\ln(V_c/V_d)}{RT_2\ln(V_b/V_a)} = \frac{T_1}{T_2}$$

22.8 证明：工作在相同的两个热源之间的所有卡诺热机有相同的效率，$\eta^* = 1 - (T_1/T_2)$．

证 ☞ 参考题 22.6，假设 A 和 C 都为卡诺热机，但用了不同的工作物质，易得 $\eta_A \leqslant \eta_C$．现令两热机交换位置，同理可得 $\eta_C \leqslant \eta_A$．所以 $\eta_A = \eta_C$，得证．

由题 22.7 得，以理想气体为工作物质的卡诺热机满足 $Q_1/Q_2 = T_1/T_2$．因此，对于理想气体，$\eta^* = 1 - (T_1/T_2)$．既然所有卡诺热机效率都相等，则有 $\eta^* = 1 - (T_1/T_2)$，如题 22.2 所述．

22.9 一台汽油机进行如图 22-6 所示的奥托循环，求此汽油机的热效率．假设工作物质为 1 mol空气．

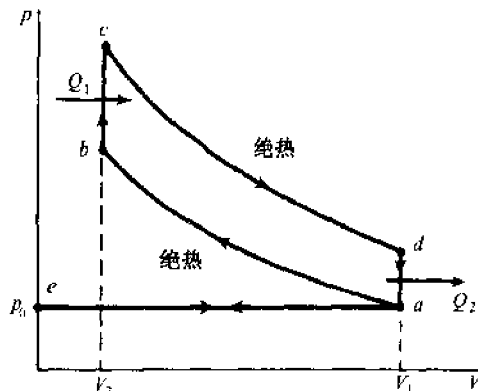


图 22-6

解 ☞ 假设循环可逆，工作物质(空气)的 C_v 为常数．则过程 $b \to c$ 中，系统吸热 $Q_1 = C_v\Delta T = C_v(T_c - T_b)$．同理，过程 $d \to a$ 中，系统放热 $Q_2 = -C_v\Delta T = C_v(T_d - T_a)$．因此热效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}$$

现假设空气为理想气体，两个绝热过程可用下面两个等式描述：

$$T_dV_1^{\gamma-1} = T_cV_2^{\gamma-1} \text{ 和 } T_aV_1^{\gamma-1} = T_bV_2^{\gamma-1}$$

(见题 21.23)

两式相减，得

$$(T_d - T_a)V_1^{\gamma-1} = (T_c - T_b)V_2^{\gamma-1} \text{ 或写为 } \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

所以：$\eta = 1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$

奥托循环是区别于卡诺循环的一种可逆循环．

22.10 一台卡诺热机工作在317℃和67℃的热源之间,求它的效率.

解 ☞ $\eta=\frac{T_2-T_1}{T_2}=\frac{590-340}{590}=42\%$.

22.11 一台类卡诺热机工作在480 K和300 K的热源之间.假设热机每吸收1 kcal的热量后实际产生的机械能为1.2 kJ.比较此热机的实际效率与理论上最大的效率.

解 ☞ 最大效率 $=\frac{T_2-T_1}{T_2}=\frac{480-300}{480}=37.5\%$

实际效率 $=\frac{输出功}{输入功}=\frac{1.2}{1\times4.184}=28.7\%$

实际效率约为最大效率的$\frac{3}{4}$.

22.12 一台卡诺热机从427℃的热源吸热,向177℃的热源放热,此卡诺热机每吸收1 kcal热量能产生的最大功为多少?

解 ☞ 效率 $=\frac{Q_2-Q_1}{Q_2}=\frac{T_2-T_1}{T_2}$, $Q_2=(1\ \text{kcal})(4.184\ \text{kJ/kcal})=4.184\ \text{kJ}$

效率 $=\frac{Q_2-Q_1}{4.184\ \text{kJ}}=\frac{700\ \text{K}-450\text{K}}{700\ \text{K}}$, 所以 $W=Q_2-Q_1=1.49\ \text{kJ}$.

22.13 一理想卡诺热机从317℃的热源吸热,对外做功后,将剩余热量传给117℃的低温热源.若它从高温热源吸热500 kcal,它对外做多少功?向低温热源释放多少热量?

解 ☞ 效率 $=\frac{Q_2-Q_1}{Q_2}=\frac{T_2-T_1}{T_2}$, $\frac{500-Q_1}{500}=\frac{590-390}{590}$

$500-Q=169\ \text{kcal}$, $Q_1=331\ \text{kcal}$(即向低温热源放的热)

$W=Q_2-Q_1=169\ \text{kcal}=169(4.184)\text{kJ}=710\ \text{kJ}$

22.14 一台蒸汽机工作在沸腾温度220℃和凝固温度35℃之间,功率为8hp*.若此蒸汽机的效率为工作在相同热源之间的卡诺热机效率的30%,每秒内蒸汽机从沸腾物体吸收多少热?每秒内向凝固物体释放多少热?

解 ☞ 实际效率 $=(0.30)(卡诺效率)=(0.30)\left(1-\frac{308}{493}\right)=0.113$

从关系式:

$$效率=\frac{输出功}{输入功}$$

得

$$输入功/s=\frac{输出功/s}{效率}=\frac{(8\text{hp})(746\ \text{W/hp})\left(\frac{1\ \text{cal/s}}{4.184\ \text{W}}\right)}{0.113}=12.7\ \text{kcal/s}$$

利用能量守恒定律求出向凝固物释放的能量

吸收热能 = 对外作功 + 释放热能

所以,

$$\begin{aligned}释放热能/s&=(吸收热能/s)-(对外做功/s)\\&=(吸收热能/s)[1-(效率)]\\&=(12.7\ \text{kcal/s})(1-0.113)=11.3\ \text{kcal/s}\end{aligned}$$

22.15 一台致冷系数为5的冰箱,外界对它做功3.6 MJ(1 kW·h)后,能将多少千克0℃的水变成0℃的冰块?用表17-1所给的数据.

解 ☞ 根据题22.3,致冷系数为Q_1/W.

$$5=\frac{mL}{3.6\times10^6\ \text{J}}=\frac{m(80\ \text{kcal/kg})(4184\ \text{J/kcal})}{3.6\times10^6\ \text{J}}$$

解得,$m=54$ kg.

22.16 一台冰箱从−5℉的冷冻室吸热,向95℉热源放热.求它最大的致冷系数.

解 ☞ 对于卡诺冰箱,$Q_1/W=T_1/(T_2-T_1)$.利用绝对温度(兰氏°R),则

---

* 1 hp = 745.700 W.

$$\frac{Q_1}{W}=\frac{-5+460}{(95+460)-(-5+460)}=\frac{455}{100}=4.55(致冷系数)$$

22.17 一台冰箱的致冷系数为 5. 若冷冻室温度为 $-20℃$，放热处的温度为何值？假设为理想气体系统.

解 ☞ $\frac{Q_1}{W}=\frac{T_1}{T_2-T_1}$, $5=\frac{253}{T_2-253}$

得，$T_2=304\ \text{K}=31℃$.

22.2 熵

22.18[c] 给出熵的数学定义并讨论熵与热力学第二定律的关系.

解 ☞ 任何热力学系统都有一个态函数——熵(S). 与 p、V、U 一样，当系统处于给定的平衡态时，S 为确定值. 熵的定义如下. 令系统在绝对温度 T 下经历一个无限小可逆过程，吸收热量 ΔQ，则系统熵的变化为

$$\Delta S=\frac{\Delta Q}{T}或\ \mathrm{d}S=\frac{đQ}{T}(对无限小过程)$$

注意：$đQ$ 不是实际函数之微分. 熵的单位为：J/K.

克劳修斯等式：$\mathrm{d}S=đQ/T$ 只对可逆过程成立. 因为 S 是态函数，所以计算不可逆过程中熵的变化量时，可以通过将 $đQ/T$ 沿绝热可逆过程的路径从初态积到终态求出结果.

态函数熵的重要性在于热力学第二定律的如下表述：在任何过程中，系统与外界总的熵总是增加或(对于可逆过程)不变. 若为孤立系统，即系统与外界无相互作用，则可将系统直接应用热力学第二定律.

22.19 用有序/混乱度来定义熵，并作简短讨论.

解 ☞ 热力学第二定律表明：熵是不可逆性的量度. 在分子水平上，不可逆性与混乱度增加有关. 随着时间的推移，分子系统趋于混乱，一旦它离开了较有序的一个状态，不可能再回到这个状态. 另外，还可以通过分析分子系统的微观状态来定义熵，两者完全等价. 假设系统的 Ω 种微观态(如分子的不同排列)有相同宏观状态(即 p, V, T, U 有相同值)，则这种宏观态的熵 $S=k\ln\Omega$，其中 ln 为以 e 为底的对数；k 为玻尔兹曼常数：1.38×10^{-23} J/K.

只以一种方式(如分子的排列)发生的状态是高度有序的状态；能以多种方式发生的状态是较混乱的状态. 将混乱度与数值联系起来，则状态的混乱度与 Ω，状态的发生方式成比例. $S=k\ln\Omega$，熵是混乱度的量度.

多分子系统的自发过程总是按如下方向进行：

$$\begin{pmatrix}\text{只能以少数方式}\\\text{发生的状态}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\text{能以许多方式}\\\text{发生的状态}\end{pmatrix}$$

因此，系统除非保持自己原有的状态，否则就增加混乱度.

22.20 热机进行一次循环后回到初始状态，$\Delta S=\Delta E=0$，由热力学第一定律给出每次循环中热机对外做功：

$$W=Q_2\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)-T_1\Delta S_t=W^*-T_1\Delta S_t \tag{1}$$

其中，W^* 为工作在相同热源间的卡诺热机做的功，ΔS_t 为一个循环中，系统内外总熵的改变量(在此题中为高温热源和低温热源熵改变量). 推导(1)式并说明它对热力学第二定律的意义.

解 ☞ 工作在两热源之间的任何热机，因为每次循环后 $\Delta U=0$，所以有 $W=Q_2-Q_1$.(此处 Q_1 定义为正值，表示热机放出的热量值，在解关于热机和致冷机问题时，通常都这样定义.) 高温热源，低温热源熵的改变量与它们在确定温度下转移的能量有关：$Q_2=-T_2\Delta S_2$，$Q_1=T_1\Delta S_1$. 而 $\Delta S_t=\Delta S_2+\Delta S_1$，则有 $T_1\Delta S_t=Q_1-(T_1Q_2)/T_2$. 所以 $W=Q_2-Q_1=Q_2[1-(T_1/T_2)]-T_1\Delta S_t$. 又因为卡诺循环的效率为 $W^*/Q_2=1-(T_1/T_2)$，所以结果化为：$W=W^*-T_1\Delta S_t$. 对于确定的 Q_2，可以得到，$W\leqslant W^*\Leftrightarrow\Delta S\geqslant0$. 若考虑效率，则 $\eta\leqslant\eta^*\Leftrightarrow\Delta S\geqslant0$.

22.21 抛 100 枚硬币，只有 1 种方式使所有硬币面朝上，有 100 种方式使只有 1 枚硬币背朝上，在大约 1×10^{29} 种方式使其中 50 枚面朝上．将这 100 枚硬币放在盒内，只有 1 枚硬币面朝上．摇动盒子，最后有 50 枚面朝上．求摇动后硬币熵的变化量．

解 ☞ 根据题 22.19，得

$$\Delta S = k(\ln\Omega_2 - \ln\Omega_1) = (1.38\times10^{-23}\ \text{J/K})[\ln(1\times10^{29}) - \ln100]$$
$$= (1.38\times10^{-23}\ \text{J/K})(27\ln10) = 8.6\times10^{-22}\ \text{J/K}$$

其中用到 $\ln10 = 2.303$．

22.22 N 个原子组成的体积为 V 的单原子理想气体，当气体能量在 $E \sim E+\mathrm{d}E$ 之间时，Ω 的值为 $\Omega = A(N)V^NE^{3N/2}$，其中因数 $A(N)$ 只与 N 有关．(a)利用态函数 V 和 E，求出熵 S，(b)利用熵和开尔文温度的定义，$1/T = (\partial S/\partial E)_V$，证明：$E = \frac{3}{2}NkT$．

解 ☞ (a)熵由下式解出：

$$S = k\ln\Omega = k\ln A(N) + Nk\ln V + \frac{3}{2}Nk\ln E$$

(b)开尔文温度由下式给出：

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{3}{2}Nk\frac{\mathrm{d}(\ln E)}{\mathrm{d}E} = \frac{3}{2}\frac{Nk}{E}$$

因此 $E = \frac{3}{2}NkT$．

22.23 一活塞将理想气体压缩在圆柱筒内，活塞缓慢推动以保证气体温度保持 20℃．在压缩过程中，活塞对气体做功 730 J．求气体熵的改变量．

解 ☞ 根据热力学第一定律：$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$，等温过程，理想气体内能不变．因此，$\Delta U = 0$，$\Delta Q = \Delta W = -730$ J．(因为气体被压缩，气体做负功，所以为负号．)于是

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-730\ \text{J}}{293\ \text{K}} = -2.49\ \text{J/K}$$

注意：熵改变量为负值．因为气体体积被压缩时，气体混乱度减小．

22.24 为什么题 22.23 的结果没有违背热力学第二定律的熵增加原理，$\Delta S \geqslant 0$？

解 ☞ 热力学第二定律中指的是熵总的改变量．显然，圆柱筒向周围环境放热，使外界系统熵增加．根据热力学第二定律，此增加量至少等于圆柱筒内气体熵的减小量．

22.25 ΔH 的热从 T_1 大热源转移到 T_2 大热源，$T_1 > T_2$，才使此过程能自发进行．若两热源的热容足够大，以致整个过程中温度几乎不变．证明，整个系统的熵增加了．

证 ☞ 因为恒温热源 T_1 放热 ΔH，则它的熵改变量为

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta H_1}{T_1} = -\frac{\Delta H}{T_1}$$

恒温热源 T_2 吸热 ΔH，则它的熵改变量为

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta H_2}{T_2} = \frac{\Delta H}{T_2}$$

总的熵变 $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ 为

$$\Delta S = -\frac{\Delta H}{T_1} + \frac{\Delta H}{T_2} = \Delta H\frac{T_1 - T_2}{T_1T_2}$$

因为 $T_1 > T_2$，所以 ΔS 为正值．

22.26 求 2.00 kg 水分子在 1 atm 的恒定压强下由 100℃ 的水变为同温度的蒸汽的过程中熵的变化量．(用表 17-2 给出的数据．)

解 ☞ 因为在恒温过程中吸热，则 $\Delta S = \Delta Q/T = (mh_v)/T = (2.00\ \text{kg})(540\ \text{kcal/kg})(4.184\ \text{kJ/kcal})/(373\ \text{K})$，即 $\Delta S = 12.12\ \text{kJ/K}$．

22.27 n kmol 理想气体从体积 V_A 膨胀为 $V_B(V_B > V_A)$，初始温度与末了温度相同，求气体

熵的改变量.

解 ☞ 根据题22.18的讨论,可以假设一个等温可逆过程.等温过程中,理想气体内能不变:$dE=0$,因此 $dH=dW=pdV$.于是,熵的改变量为

$$\Delta S \equiv S_B - S_A = \int_A^B \frac{dH}{T} = \int_A^B \frac{pdV}{T_0} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_0/V}{T_0}dV = nR\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} = nR\ln\frac{V_B}{V_A}$$

22.28 一不计热容的铜罐中盛有1.000 kg冰点的水,另一只相同的铜罐中盛有1.000 kg沸点的水.现令两只铜罐热接触,求系统熵的改变量.

解 ☞ 每只铜罐中的水都有:$dH=cmdT$,对于水,$cm=4184$ J/K.因为两物质热容相等,则末温为两初始温度的平均值

$$T_{1f}=T_{2f}=\frac{T_{1i}+T_{2i}}{2}=\frac{273\text{ K}+373\text{K}}{2}=323\text{ K}$$

所以 $$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=\int_{T_{1i}}^{T_{1f}}cm\frac{dT_1}{T_1}+\int_{T_{2i}}^{T_{2f}}cm\frac{dT_2}{T_2}$$
$$=(4184\text{ J/K})[\ln(323\text{ K}/273\text{K})+\ln(323\text{ K}/373\text{ K})]$$
$$=+100\text{ J/K}$$

22.29 题22.22说明对定容理想气体加热时,气体的熵将(对数)增加,从有序/混乱度方面考虑,给出解释.

解 ☞ 高温意味着大的方均根速率,则相应每个原子的速率也变大.因为每个分子被提供了更多的速度可能值,所以同一宏观态对应了更多的微观排列,因此混乱度更高.

22.30 在图22-7所示的循环中,AB、CD为等温过程,工作物质可视为理想气体.根据物理中常用的符号惯例,判断四个过程中ΔH、ΔW、ΔE、ΔT、ΔS的值取正还是取负?

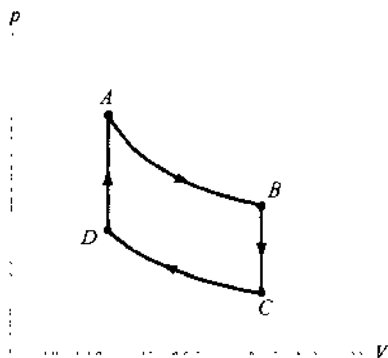


图22-7

解 ☞ 过程AB.气体膨胀,做正功,$\Delta W>0$.因为AB为等温过程,$\Delta T=0$.工作物质为理想气体,所以$\Delta E=0$.所以,$\Delta E+\Delta W=\Delta H$为正,$\Delta S=\frac{\Delta H}{T}$也为正.

过程BC.气体体积没有改变,所以$\Delta W=0$.因为压强在定容条件下减小,ΔT为负,ΔE也为负,所以$\Delta E+\Delta W=\Delta H$同样为负.熵变$\Delta S=\int_b^c dH/T$也为负.

过程CD.气体压缩,所以$\Delta W=\int_c^d pdV<0$.因为CD是相对AB逆方向的等温过程,所以$\Delta T=\Delta E=0$,$\Delta H<0$,$\Delta S<0$.

过程DA.DA为等容加热过程,而BC为等容冷却过程,两个过程中符号都相反:$\Delta W=0$,$\Delta T>0$,$\Delta E>0$,$\Delta H>0$,$\Delta S>0$.

22.31 当题22.30中的工作物质经过一个循环过程后回到A点,则此时的5个物理量与初始时刻的差值为正还是负?

解 ☞ 因为E、T、S为状态量,则经过一个循环后,ΔE、ΔT、ΔS都等于0.根据p-V图线,可以看出气体沿AB过程做的正功大于沿CD过程做的负功.因此,气体做的净功为正,$\Delta W>0$.因为$\Delta H=\Delta E+\Delta W$,推出$\Delta H$为正.

22.32[c] 温度为T_f的大热源与1.0 kg的水接触,使其温度由T_i变为T_f.证明整个系统熵增加.

证 ☞ 水吸收的热$\Delta H_水$为

$$\Delta H_水=m_水c_水\Delta T=(1.0\text{ kg})(1.00\text{ kcal/kg·K})(T_f-T_i)=T_f-T_i$$

单位取 kcal. 热源吸热为负值：$\Delta H_{源} = -\Delta H_{水}$. 因此，热源增加的熵为

$$\Delta S_r = \frac{\Delta H_r}{T_f} = -\frac{T_f - T_i}{T_f}$$

水的熵增加量通过对各表述式 $dS_{水} = dH_{水}/T$ 积分求得

$$\Delta S_{水} = \int dS_{水} = \int \frac{dH_{水}}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

因为在 (T_i, T_f) 过程中 $\frac{1}{T}$ 逐渐变小，所以

$$\Delta S_{水} > \frac{1}{T_f}\int_{T_i}^{T_f} dT = \frac{T_f - T_i}{T_f} = -\Delta S_r$$

即：$\Delta S_{净} = \Delta S_{水} + \Delta S_{源} > 0$.

22.33[c] 求 1 mol 具有确定摩尔热容 C_P、C_V 的理想气体熵的表达式.

解 ☞ $\Delta S = \Delta Q/T$. 要求 p-V 图上任何两状态点的 $S_B - S_A$ 值，可以沿 p-V 图的任何路径将所有 ΔS 值相加求出. 定容情况下的 $\Delta Q = C_V\Delta T$，定压情况下的 $\Delta Q = C_P\Delta T$，我们选图 22-8 中的 ACB 为路径，则

$$S_C - S_A = \int_A^C \frac{dQ}{T} = C_P\int_{T_A}^{T_C} \frac{dT}{T} = C_P\ln\frac{T_C}{T_A} = C_P\ln\frac{V_C}{V_A}$$

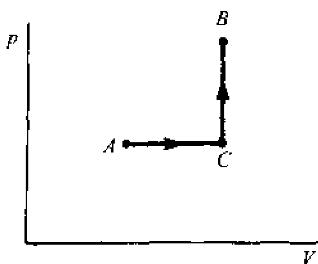


图 22-8

最后一步是因为 $pV = RT$，而 p 为常数. 同样，

$$S_B - S_C = \int_C^B \frac{dQ}{T} = C_V\int_C^B \frac{dT}{T} = C_V\ln\frac{T_B}{T_C} = C_V\ln\frac{p_B}{p_C}$$

最后一步是因为 V 为常数. 两式相加（考虑到 $p_C = p_A$，$V_C = V_B$）

$$S_B - S_A = C_P\ln\frac{V_C}{V_A} + C_V\ln\frac{p_B}{p_C} = C_P\ln\frac{V_B}{V_A} + C_V\ln\frac{p_B}{p_A}$$

$$S_B - S_A = C_V\left[\frac{C_P}{C_V}\ln\frac{V_B}{V_A} + \ln\frac{p_B}{p_A}\right] = C_V\ln\frac{p_B V_B^{\gamma}}{p_A V_A^{\gamma}}$$

固定点 A，令 B 为 p-V 图上一绝热点，则得到结果：$S = C_V\ln(pV^{\gamma})$ + 常数. [常数为 $S_A - C_V\ln(p_A V_A^{\gamma})$.]

22.34 由题 22.33 推出，绝热可逆过程中，理想气体压强和体积满足关系：pV^{γ} = 常数.

解 ☞ 根据题 22.33 中 $S = C_V\ln(pV^{\gamma})$ + 常数. 在绝热过程中，$\Delta S = 0$，S 为常数. 因此，若 C_V 为常数，则 $\ln(pV^{\gamma}) = C$. 当假设成立时，得到绝热过程中，pV^{γ} = 常数.

第二十三章　波　　动

23.1　波动特性

23.1　因为光速远大于声速,因此在闪电发生 6.0 s 后才听到雷声.闪电发生在多远处?(设声速为 330 m/s)

解　☞ 声波从闪电发生处运动到听到雷声处需要 6.0 s 时间,所以

$$x = vt = (330\ \text{m/s})(6.0\ \text{s}) = 1980\ \text{m}.$$

23.2　人类能听到的声波的频率范围为 20 Hz 到 20000 Hz,若声速为 340 m/s,求相应的波长范围.

解　☞ $\lambda f = v$,所以

$$\lambda_1 = \frac{340\ \text{m/s}}{20\ \text{Hz}} = 17\ \text{m},\quad \lambda_2 = \frac{340\ \text{m/s}}{20000\ \text{Hz}} = 0.017\ \text{m} = 1.7\ \text{cm}$$

23.3　某电台播音频率为 760 kHz,电波速度为 3×10^8 m/s.求电波波长.

解　☞ $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{3\times10^8\ \text{m/s}}{760000\ \text{Hz}} = 395\ \text{m}$

23.4　声波在海水中的速度为 1530 m/s,若在海水中产生一频率为 1800 Hz 的声波,求此声波的波长.

解　☞ $v = \nu\lambda,\quad 1530 = 1800\lambda,\quad \lambda = 0.85\ \text{m}$

23.5　波长为 λ 的声波从波速为 v 的介质传播到波速为 $4v$ 的另一种介质.求声波在第二种介质中的波长.

解　☞ 传播过程中 ν 不变,所以

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{4v}{\lambda_2},\quad \lambda_2 = 4\lambda$$

23.6　(a)声纳中的超声换能器产生频率为 40 kHz 的超声波.若声波在海水中的速度为 5050 ft/s,求此超声波的波长.(b)若在超声换能器发出一小段声波后立即将其关闭,并将接收器打开.声波传向潜伏着的潜水艇并反射回来,若从声波发出 5.0 s 秒后接收到返回的声波.潜水艇应在多远处?

解　☞ (a) $v = \nu\lambda,\quad 5050 = 40000\lambda,\quad \lambda = 0.126\ \text{ft}$

(b)若潜水艇位于距离 d 处,则声波从声纳发出到被反射回来的过程中共经过的距离为 $2d$.

$$v = \frac{2d}{t},\quad 5050 = \frac{2d}{5.0},\quad d = 12600\ \text{ft}$$

23.7　扰动和波在各种介质中的传播速度都是由该介质的特性决定的.根据这些特性,写出下列波的传播速度表达式.(a)在拉伸的线上传播的横波,(b)在液体、固体、气体中传播的纵波.

解　☞ (a) $v = \sqrt{\dfrac{\text{线上的张力}}{\text{单位线长的质量}}}$

(b)在液体中:$v = \sqrt{\dfrac{\text{体积模量}}{\text{液体密度}}} = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

在固体中:$v = \sqrt{\dfrac{\text{杨氏模量}}{\text{固体密度}}} = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

在气体中:$v = \sqrt{\dfrac{\gamma\times(\text{气体压强})}{\text{气体密度}}} = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}$

其中 γ 为比热之比:c_p/c_v,单原子气体(如 He, Ne)为 1.67,双原子气体(如 N_2, O_2, H_2)为 1.40.

23.8 用 120 Hz 的振动器振动一根绳子，此时在绳上传播的横波波长为 31 cm.(a)求此横波的速度.(b)若绳上拉力为 1.20 N，求 50 cm 长的这种绳子的质量.

解 ☞ (a)$v=\lambda f=(0.31\ \mathrm{m})(120\ \mathrm{Hz})=37\ \mathrm{m/s}$

(b)$v=\sqrt{S/\mu}$，其中 S 为张力.则 $\mu=S/v^2=(1.20\ \mathrm{N})/(37\ \mathrm{m/s})^2=8.76\times10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$. $M=\mu L=(0.50\ \mathrm{m})(8.76\times10^{-4}\ \mathrm{kg/m})=4.38\times10^{-4}\ \mathrm{kg}=0.44\ \mathrm{g}$.

23.9 直径为 2.4 mm、长 3 m 的铜丝一端悬挂一个质量为 2 kg 的物体，一端固定在梁上.用铅笔轻轻敲打铜丝，产生的横向扰动沿铜丝传播，求此扰动传播的速度.已知铜的密度为 8920 $\mathrm{kg/m^3}$.

解 ☞ 在线上传播的横波速度 $v=\sqrt{S/\mu}$. $S=(2\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})=19.6\ \mathrm{N}$. $\mu=\rho A$，其中 A 为铜丝的横截面积，$\mu=(8920\ \mathrm{kg/m^3})(3.14)(1.2\times10^{-3}\ \mathrm{m})^2=0.0403\ \mathrm{kg/m}$.所以，$v=\sqrt{19.6/0.0403}=22(\mathrm{m/s})$

23.10 增加 100 kPa 压强后，水的体积减少了 $5\times10^{-3}\%$.(a)求水的体积模量.(b)求声波(压缩波)在水中的速度.

解 ☞ (a)$B=V|\Delta p/\Delta V|=\dfrac{100\times10^3\ \mathrm{Pa}}{5\times10^{-5}}=2000\ \mathrm{MPa}$

(b)$v=\sqrt{\dfrac{B}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{2.0\times10^9\ \mathrm{N/m^2}}{1000\ \mathrm{kg/m^3}}}=1400\ \mathrm{m/s}$

23.11 若水的体积模量为 2100 MPa，求水中的声速.

解 ☞ $v=\left(\dfrac{B}{\rho}\right)^{1/2}=\left[\dfrac{2.1\times10^9}{10^3}\right]^{1/2}=1450(\mathrm{m/s})$

23.12 根据钢中声速约为 5900 m/s，计算钢的弹性模量.钢的密度为 7900 $\mathrm{kg/m^3}$.

解 ☞ 固体中的声速 $v=(B/\rho)^{1/2}$，因此，$5900=(B/7900)^{1/2}$，得出 $B=2.75\times10^{11}\ \mathrm{Pa}$.

23.13 在线上传播的波速为 $v=\sqrt{T/\mu}$.证明等式右边的表达式具有速度单位.对于 $v=\sqrt{B/\rho}$ 做同样的证明.

证 ☞ 前一种情况下：$[(T/\mu)^{1/2}]=[\mathrm{MLT^{-2}}]^{1/2}[\mathrm{M^{-1}L}]^{1/2}=[\mathrm{LT^{-1}}]=[v]$.在后一种情况下：$[B/\rho]^{1/2}=[(F/A)/\rho]^{1/2}=[(\mathrm{MLT^{-2}})(\mathrm{L^{-2}})]^{1/2}[\mathrm{M^{-1}L^3}]^{\frac{1}{2}}=[\mathrm{L/T}]=[v]$.

23.14 直径为 3.0 cm 的钢索上的张力为 10 kN，钢的密度为 7.8 $\mathrm{g/cm^3}$，求沿此钢索传播的横波波速.

解 ☞ 钢索的质量线密度 $\mu=\rho[(\pi d^2)/4]$，其中 ρ 和 d 分别为钢索的质量密度和直径.利用 $\rho=7.8\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$、$d=0.03\ \mathrm{m}$，求出 $\mu=5.51\ \mathrm{kg/m}$.利用已知的张力 $F=1.0\times10^4\ \mathrm{N}$，求出速度 $v=\sqrt{F/\mu}=42.6\ \mathrm{m/s}$.

23.15 沿拉伸的绳子传播的横波速度为 1000 ft/s，若绳子上的张力变为原来的 4 倍，求此时的波速.(单位采用 ft/s)

解 ☞ $v\propto T^{1/2}$，2000 ft/s.

23.16 一绳子圈成的环以角速度 ω 高速旋转成为一个绷紧的圆，半径为 R.圆上有一个扭结，如图 23-1(a)所示.(a)证明：绳上的张力为 $F=\mu\omega^2R^2$，其中 μ 为绳子线密度.(b)在什么条件下，扭结相对地面观察者保持静止.

解 ☞ (a)如图 23-1(b)所示，设 ACB 为绳上的一小段(没有扭结)，所张中心角为 $\Delta\theta$，C 为弧的中点.向心力由 F_A、F_B 的合力提供：$F_{\mathrm{net}}=F_A+F_B$.要使 F 指向 O 点，必有 $|F_A|=|F_B|=F$，所以 ACB 段的向心力为 $|F_{\mathrm{net}}|=2F\sin(\Delta\theta/2)$.当 $\Delta\theta\to0$ 时，$|F_{\mathrm{net}}|\to2F(\Delta\theta/2)=F\Delta\theta$.令它的大小等于所需向心力值，则有$(\mu R\Delta\theta)\omega^2R=F\Delta\theta$，$\mu R\Delta\theta$ 为 ACB 段的质量.解出 F，得到 $F=\mu\omega^2R^2$，得证.(b)扭结相对绳子的运动速度为 $v=\sqrt{F/\mu}=R\omega$.因此，当扭结相对绳子作顺时针运动时，它相对地面静止.

23.17 一根可弯曲的钢索全长 L，单位长度质量为 μ，将它一端悬挂在支点上.(a)证明：沿着

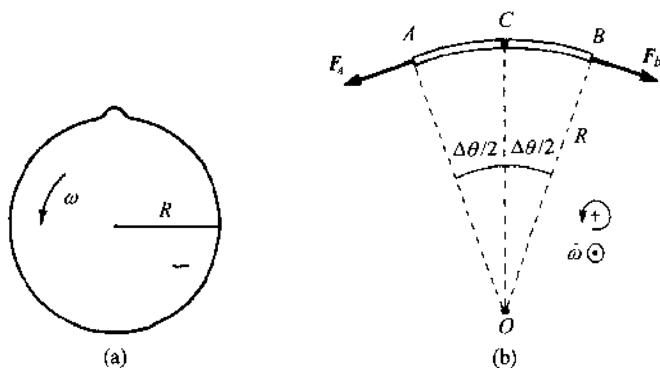


图 23-1

钢索传播的横波波速为 $v=\sqrt{g(L-x)}$，其中 x 为离支点的距离，(b)横波传过整根钢索需多长时间？

解 ☞ (a)张力 T 和传播速度 v 都与长度有关. 沿钢索传播的波速为 $v=(T/\mu)^{1/2}$. 张力 $T=g\mu(L-x)$(x 位置以下钢索的重力)，则 $v=[g(L-x)]^{1/2}$.

(b)波传过距离 dx 所需时间 dt 为 dx/v，因此总的时间为

$$t=\int_0^L \frac{dx}{[g(L-x)]^{1/2}}=2\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}$$

23.18 用数学方法描述沿 x 正方向传播的正弦波，令 y 代表粒子离 x 轴平衡位置的位移.（横波或纵波都适用）

解 ☞ 波的一般表达式为 $y=A\cos(kx-\omega t+\phi)$. 此处 A 为振幅，k 为波数，ω 为角频率，ϕ 为一常数，由 $t=0$ 时刻波的位置决定. 对于行波，ϕ 值无关紧要，通常令 $\phi=0$，则 $y=A\cos(kx-\omega t)=A\cos(\omega t-kx)$；也可令 $\phi=3\pi/2$，则 $y=A\sin(kx-\omega t)$；或 $\phi=\pi/2$，则 $y=A\sin(\omega t-kx)$. 因为 $\omega=2\pi f$，(其中 f 为频率)或写为 $\omega=(2\pi/T)$(T = 周期)，$k=(2\pi)/\lambda$(λ = 波长)，则重新写出波的表达式为

$$y=A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{2\pi t}{T}+\phi\right)$$

波的传播速度为 $c=\frac{\omega}{k}=\lambda f$，所以

$$y=A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right]=A\cos\left[2\pi f\left(\frac{x}{c}-t\right)+\phi\right]$$

（注意此处所用的都是标准记号，有时也用 ν 表示频率，v 表示传播速度，y_0 表示振幅.）

23.19 频率为 60 Hz 的振动器产生如图 23-2 所示的波，求此波的：(a)振幅，(b)频率，(c)波长，(d)波速，(e)周期.

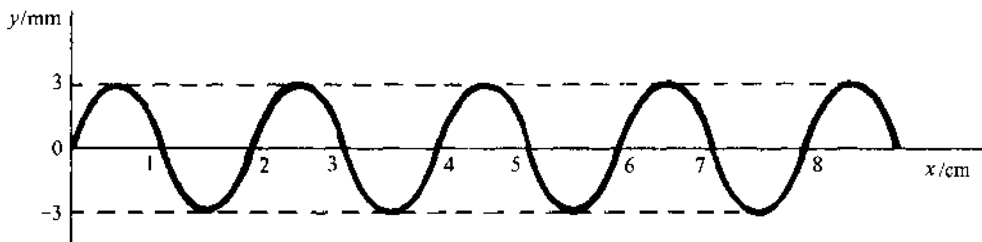


图 23-2

解 ☞ (a)振幅，$A=3$ mm$=0.3$ cm. (b)f 与振动器频率相等，所以 $f=60$ Hz. (c)λ = 一个周期的波长（见图 23-2），$\lambda=2$ cm. (d)波速 $v=\lambda f=(2.0\text{ cm})(60\text{ Hz})=120$ cm/s. (e)周期 $T=1/f=0.0167$ s.

23.20 对于 $y=5\sin 30\pi[t-(x/240)]$的波，其中 x 和 y 的单位都取 cm，t 的单位取 s，求(a)$t=0$，$x=2$ cm 时的位移，(b)波长，(c)波速，(d)波的频率.

解 ☞ (a)$y=5\sin 30\pi\left(0-\frac{2}{240}\right)=5\sin\left[\frac{-\pi}{4}\right]=5(-0.707)=-3.535$ cm

(b)与等式(见题 23.18)$y=R\sin 2\pi\nu(t-x/v)$比较，则有

$$30\pi=2\pi\nu,\ \nu=15\ \text{Hz},\ v=240\ \text{cm/s}$$

又因为 $v=\nu\lambda$，所以 $240=15\lambda$，$\lambda=16$ cm.

(c)$v=240$ cm/s，(d)$\nu=15$ Hz

23.21 一列沿绳子传播的波的表达式为(x:m，t:s)：

$$y=0.02\sin(30t-4.0x)\ \text{m}$$

求它的振幅，频率，速度和波长.

解 ☞ 与标准形式 $y=y_0\sin[2\pi f(t-x/v)]$相比，得到 $y_0=0.02$ m，$f=4.78$ Hz，$v=7.5$ m/s；又因为 $\lambda=v/f$，所以 $\lambda=1.57$ m.

23.22 一列行波的附加压强 $p=1.5\sin\{[(2\pi)/\lambda](x-330t)\}$，其中 x、λ 的单位取 m，t 取 s，p 取 Pa.(a)波速为何值？(b)若 $\lambda=2$ m，求频率，(c)最大压强(压强振幅)为何值？(d)在 $x=\frac{1}{6}$ m，$t=0$ 处压强为何值？

解 ☞ 波的标准方程为 $y=y_0\sin[2\pi\nu(t-x/v)]$. 为了便于比较，将所给方程写为标准形式：$p=-1.5\sin[2\pi(330/\lambda)(t-x/330)]$.(负号只表示相位差，见题 23.18.)(a)$v=330$ m/s；(b)$v=\nu\lambda$，$330=\nu(2)$，$\nu=165$ Hz；(c)$p_0=1.5$ Pa(振幅)；(d)$p=-1.5\sin\left[2\pi\frac{330}{2}\left(0-\frac{\frac{1}{6}}{330}\right)\right]=1.5\sin\frac{\pi}{6}$ $=0.75$ Pa.

23.23 若图 23-3 所示波的波速为 300 m/s，求它的振幅、频率、波长. 根据 $t=0$ 时波所在的位置，写出波沿 $+x$ 轴运动的方程.

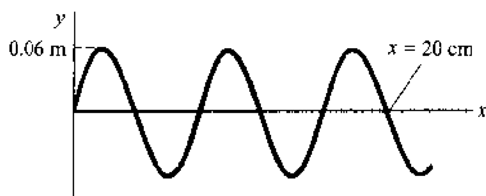


图 23-3

解 ☞ 振幅 $=0.06$ m，$\frac{5}{2}\lambda=20$ cm，所以 $\lambda=0.080$ m；$f=v/\lambda=300/0.080=3750$ (Hz). 现有$(2\pi)/\lambda=78.5$，$2\pi f=23600$，所以 $y=0.06\sin(78.5x-23600t)$ m.

23.24 绳上一列行波频率为 30 Hz，波长为 60 cm，振幅为 2 mm. 写出国际单位制下的波动方程.

解 ☞ 已知 $f=30$，$\lambda=0.60$，$y_0=0.020$，根据方程 $y=y_0\sin[2\pi(ft-x/\lambda)]$得这列波的波动方程为 $y=0.0020\sin(188t-10.5x)$ m.

23.25 求题 23.24 中绳上某点的最大横向速度和最大横向加速度.

解 ☞ 根据题 23.24，$y=(0.20\ \text{cm})\sin(188t-10.5x)$，对于任一确定的 x，上式为振幅 $y_0=0.20$ cm，角频率为 $\omega=188$ rad/s 的简谐运动方程. 所以 $v_{y,\max}=\omega y_0=37.6$ cm/s；$a_{y,\max}=\omega^2 y_0=7070$ cm/s^2.

23.26 绳上一列行波遵从以下方程：$y=0.27\sin(12x-500t)$ mm，其中 x 单位取 m；t 取 s. 求绳上 $x=20$ cm 处一点的(a)横波的横向速度方程，(b)横向加速度方程，(c)求此点在 $t=4$ s 时的位移.

解 ☞ (a)绳上行波的横向速度为 $v=\partial y/\partial t=-0.27(500)(12x-500t)$ mm/s $=-0.135\cos(2.4-500t)$ m/s.(b)横向加速度 $a=\partial v/\partial t=-0.135(500)\sin(2.4-500t)=-67.5\sin(2.4-500t)$ m/s^2.(c)$y=0.27\sin[12(0.20)-500(4.0)]=0.27\sin(-1997.6)$. 将$(-1997.6)$除以 2π，化成

圈数为$(-317.93\ \mathrm{r})$，而$-(0.93\ \mathrm{r})(360°/\mathrm{r})=-334°$，所以$y=0.27\sin26°=0.118(\mathrm{mm})$.

23.27　一列正弦波沿拉伸的绳子的正方向运动，振幅为2.0 cm，波长为1.0 m，波速为5.0 m/s. 在$x=0$，$t=0$处，有$y=0$且$\partial y/\partial t<0$. 求波动方程$y=f(x,t)$.

解　☞ 我们从右行波的一般形式入手

$$y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+\delta\right]$$

已知振幅$A=2.0\ \mathrm{cm}=0.020\ \mathrm{m}$，波长$\lambda=1.0\ \mathrm{m}$，波速为5.0 m/s，所以$\lambda/T=5.0\ \mathrm{m/s}$，$T=0.20\ \mathrm{s}$. 因此

$$y=(0.020\ \mathrm{m})\cos[2\pi(x-5.0t)+\delta]$$

题目给出$x=0$，$t=0$时，$y=0$且$\partial y/\partial t<0$. 即$y=0.020\cos\delta=0$，$\partial y/\partial t=0.2\pi\sin\delta<0$. 根据上述条件，可以推出$\delta=(-\pi/2)+2n\pi$，$n$代表任一整数，所以

$$y=(0.020\ \mathrm{m})\cos\left[2\pi(x-5t)-\frac{\pi}{2}\right]=(0.020\ \mathrm{m})\sin2\pi(x-5t)$$

23.28　直接推断出沿$-x$方向以速率$|v|$运动的波脉冲满足方程$f(x,t)=f(x+|v|t)$. 引入一个沿$-x$方向运动的观察者O'加以讨论.

证　☞ 观察者O看到波脉冲以速率$|v|$沿$-x$方向运动，方程为$y=f_l(x,t)$，l代表左行波. 第二个观察者O'相对O以速率$|v|$向左运动，他看到波脉冲静止不动，方程为$y'=f(x')$，x'表示在O'坐标系下固定点的坐标. 因为O'相对O以速率$|v|$向左运动，$x=x'-|v|t$，或$x'=x+|v|t$. 两观察者只在x方向有相对运动，所以他们测出的波脉冲的位移应是相等的，即$y=y'$，所以

$$f_l(x,t)=y=y'=f(x')=f(x+|v|t)$$

得证.

23.29　证明：绳上的正弦波传播的平均功率为$\overline{P}=\frac{1}{2}\omega^2A^2\mu c$，其中$\mu$为单位长度的质量.

证　☞ 绳上无限小的一段$\mathrm{d}x$作振幅为A，角频率为ω的简谐运动. 这一小段质量为$\mu\mathrm{d}x$，根据学过的简谐运动的知识可得，此段的能量等于它的最大功能：$\frac{1}{2}(\mu\mathrm{d}x)\omega^2A^2$. 在时间$t$内，沿假想边界传播的能量被提供给绳上所有质元$\mu\mathrm{d}x$，因为在此时间内，所有质元都在运动. 对应有$L=ct$. 将所有在长度$L=ct$内的能量相加，得到：$E=\frac{1}{2}\mu L\omega^2A^2=\frac{1}{2}\mu ct\omega^2A^2$. 除以$t$便得到传播的平均功率：

$$\overline{P}=\frac{E}{t}=\frac{1}{2}\omega^2A^2\mu c$$

23.30　绳上有一列频率为120 Hz，振幅为0.160 mm的波，质量为80 g的绳上有多少能量？假设长度为一波长的绳子的质量远小于80 g.

解　☞ 根据题23.29，$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}(0.080\ \mathrm{kg})(2\pi\times120\ \mathrm{s^{-1}})^2(16\times10^{-5}\ \mathrm{m})^2=0.58\ \mathrm{mJ}$.

23.31　(a)如图23-3所示波的频率为150 Hz，求波速. (b)若绳子质量为0.20 g/m，每秒内沿绳子传播多少能量？

解　☞ (a)同题23.23，$\lambda=0.08\ \mathrm{m}$，所以$v=\lambda f=12\ \mathrm{m/s}$.

(b)$P=2\pi^2f^2y_0^2\mu v=2\pi^2(150^2)(0.060^2)(0.00020)(12)=3.84(\mathrm{W})$.

23.32　两根不同密度的绳子在$x=0$处连接(见图23-4)，一列波$y_i=A_i\sin(\omega t-k_1x)$从$x\leqslant0$处向右传播，在$x=0$处，部分被反射回来，部分继续向右传播. 用初始波的振幅表示出反射波和透射波的振幅.

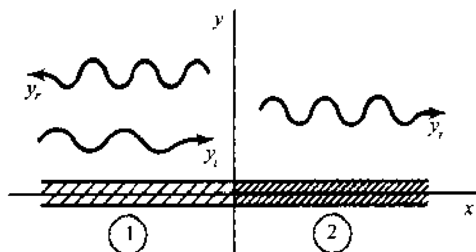


图23-4

解 ☞ 反射波和透射波有以下的形式：

$$y_r = A_r\sin(\omega t + k_1 x),\ y_t = A_t\sin(\omega t - k_2 x)$$

其中 A_r 可能为负值(因为反射后相位改变 180°).边界条件为 $x=0$ 处,位移 y 及斜率$\partial y/\partial x$ 是连续的,所以

$$y_i|_{x=0} + y_r|_{x=0} = y_t|_{x=0},\ A_i + A_r = A_t \tag{1}$$

及

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial y_r}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y_t}{\partial x}\right|_{x=0},\ -k_1A_i + k_1A_r = -k_2A_t \tag{2}$$

联立(1)、(2)解出

$$A_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A_i,\quad A_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A_i$$

可见当 $k_2 > k_1$ 时 A_r 确为负值,绳 2 密度大于绳 1 密度时就属这种情况.

23.33 假设一列正弦横波沿绳子传播.证明:在任何时间 t,绳上任意点的斜率$\partial y/\partial x$ 等于绳子 x 处瞬时横向速度$\partial y/\partial t$ 除以波速 v 的负值.即证明$\partial y/\partial x = -(\partial y/\partial t)/v$.

证 ☞ 正弦横波的一般运动方程为

$$y = A\cos[k(x - vt) + \delta] \tag{1}$$

其中 $k = (2\pi/\lambda)$表示波数,v 为波速,$k|v|$为角频率.x 点处 t 时刻的斜率为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\sin[k(x - vt) + \delta] \tag{2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = kvA\sin[k(x - vt) + \delta] \tag{3}$$

比较方程(2)和(3),得到

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{4}$$

23.34 不计耗散,写出沿 x 轴以恒定速率传播的波的一般数学表达式,并证明它满足标准波方程.

解 ☞ 波 $y(x,t)$无耗散地以速率 v 沿 x 轴传播,方程为 $y = f(x \pm vt)$,其中负号,正号分别代表沿 x 轴正向和负向传播.

方程满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

只需令 $\mu = x \pm vt$,并利用

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t}$$

便可得到.

23.35 画出 $t = 0$ s 及 $t = 1$ s 时波 $f(x,t) = A\mathrm{e}^{-B(x-vt)^2}$的图像.设 $A = 1.0$ m, $B = 1.0$ m^{-2}, $v = +2.0$ m/s.

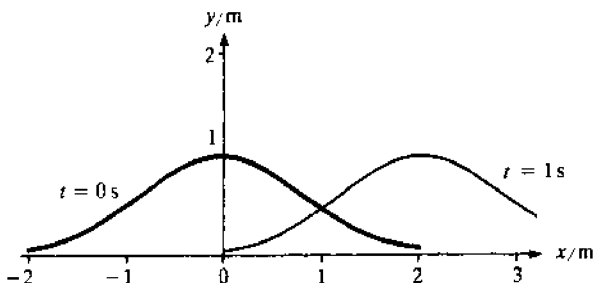


图 23-5

解 ☞ 见图 23-5.

23.36 证明题 23.35 中的波满足一维波动方程.

解 ☞ 已知

$$f(x,t) = Ae^{-B(x-vt)^2} \tag{1}$$

对 x 求导,得到

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2AB(x-vt)e^{-B(x-vt)^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = [-2AB + 4AB^2(x-vt)^2]e^{-B(x-vt)^2} \tag{3}$$

对 t 求导,得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2ABv(x-vt)e^{-B(x-vt)^2} \tag{4}$$

对 t 求两次导,得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2[-2AB + 4AB^2(x-vt)^2]e^{-B(x-vt)^2} \tag{5}$$

将方程(3),方程(5)比较,可以看出

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{6}$$

23.2 驻波和共振

23.37 一根受张力作用的绳子上相向传播两列振幅,频率相等的横波,重叠后又继续各自传播下去.求绳子最后的振动情况,并对结果加以讨论.

解 ☞ 设 $y_1 = A\sin(\omega t - kx)$, $y_2 = A\sin(\omega t + kx)$.(因为两列波各自连续传播,相位 ϕ 只代表波在原点处沿 x 方向的空间位移,所以我们可以将两列波可能的相位差 ϕ 忽略.)将两列波叠加,$y_T = y_1 + y_2$,即

$$\begin{aligned} y_T &= A[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] \\ &= A[\sin\omega t\cos kx - \cos\omega t\sin kx + \sin\omega t\cos kx + \cos\omega t\sin kx] \\ &= 2A\sin\omega t\cos kx \end{aligned}$$

振动 y_T 称为驻波,因为此波不沿 x 轴移动,绳上满足 $\cos kx = 0$ 的各点的振幅永远等于 0. 又因为当 $kx = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 时满足 $\cos kx = 0$,所以相邻零点间隔 Δx 满足 $k\Delta x = \pi$,即 $\Delta x = \pi/k = \lambda/2$. 这些静止点称为波节.绳上各点作振幅为$(2A\cos kx)$的简谐运动.最大振幅在两波节中点处,称为波腹,任意两波节内的粒子作同相位振动.

23.38 证明:两列同向传播的具有相等频率和振幅的波叠加不可能产生驻波.

证 ☞ 将两列波用正弦函数表示,叠加得到:$y_0\sin(\omega t - kx) + y_0\sin(kx - \omega t + \phi) = 2y_0\cos(\phi/2)\sin(\omega t - kx + \phi/2)$,这是振幅为 $2|y_0\cos(\phi/2)|$ 的行波.

23.39 一列波可表示为 $y_1 = A\sin[\omega t - (\omega x)/v]$,该波沿着一根绳子传播,经反射后变为 $y_2 = -\frac{1}{2}A\sin[\omega t + (\omega x)/v]$. 证明:这两列波叠加后能写为一驻波与一行波之和.

证 ☞ 令 $y = y_1 + y_2$,将 y_1 分成两列相等的波,则有:$y = (A/2)\sin[\omega t - (\omega x)/v] + (A/2)\sin[\omega t - (\omega x)/v] - (A/2)\sin[\omega t + (\omega x)/v]$,即 $y = -A\sin(\omega x/v)(\cos\omega t) + (A/2)\sin[\omega t - (\omega x)/v]$.第一项表示驻波,第二项表示行波.

23.40 相距 20 m 的两个振源按下列方程振动:

$$y_1' = 0.06\sin\pi t(\text{m}),\ y_2' = 0.02\sin\pi t(\text{m})$$

两振源发出的波以速度 3 m/s 沿杆传播,求距第一振源 12 m 的粒子和距第二振源8 m 的那个粒子的运动方程.

解 ☞ 根据图 23-6,设源 1 发出的波沿 $+x$ 方向传播,所以

$$y_1 = A_1\sin 2\pi f_1\left(t - \frac{x_1}{v}\right)$$

源 2 发出的波沿 $-x$ 方向传播，所以

$$y_2 = A_2\sin 2\pi f_2\left(t + \frac{x_2}{v}\right)$$

此处，$v = 3$ m/s；x_1、x_2 分别为相对各振源的位移. 令 $x_1 = 0$ 处的 y_1 等于 y_1'，$x_2 = 0$ 处的 y_2 等于 y_2'，则有

$$A_1 = 0.06\ \text{m},\quad f_1 = f_2 = \frac{1}{2}\ \text{Hz},\quad A_2 = 0.02\ \text{m}$$

在 $x_1 = 12$ m，$x_2 = -8$ m 处粒子的振动为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 0.06\sin\pi\left(t - \frac{12}{3}\right) + 0.02\sin\pi\left(t - \frac{8}{3}\right) \\ &= 0.06\sin\pi t + 0.02\sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 0.06\sin\pi t + 0.02\left(\sin\pi t\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\pi t\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 0.06\sin\pi t + 0.02\left[(\sin\pi t)\left(-\frac{1}{2}\right) - \cos(\pi t)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\ &= 0.05\sin\pi t - 0.0173\cos\pi t \end{aligned}$$

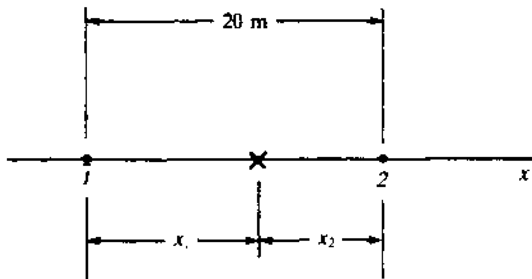


图 23-6

23.41 描述共振驻波产生的条件及性质.

解 ☞ 一列波在绳上来回反射或在其它类似情况下，通常会产生一列大振幅的驻波(题 23.37). 这列由于多重干涉产生的大振幅波称为共振驻波. 在一定的波动路径下，只有波长取某些特定值时，才能产生共振驻波. 例如，一根两端固定长为 L 的绳子上所有半波长之和应等于 L. 通常将共振驻波简称为驻波.

驻波使绳子呈现图 23-7 所示的形状. 且绳子在图中各限定点之间振动. 点 A、B、C、D 称为波节. 在驻波的波节处振幅为零. 点 F、G、H、I、J 为波腹. 在波腹处振幅为最大值. 两相邻节(或腹)之间的距离为半波长. 两相邻波节之间的区域称为一段.

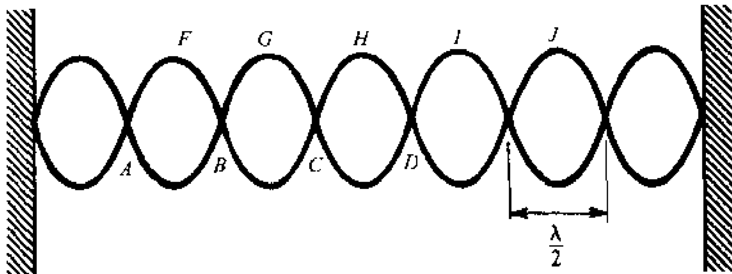


图 23-7

23.42 长 0.5 m、单位长度质量为 0.0001 kg/m 的绳子在 4 N 张力作用下振动，求基频.

解 ☞ $$v=\sqrt{\frac{T_s}{\mu}}=\sqrt{\frac{4}{0.0001}}=200\ \text{m/s}$$

当驻波的半波长等于绳长,即 $\lambda=1.0$ m 时,绳子的运动频率为基频,所以

$$\nu=\frac{v}{\lambda}=\frac{200\ \text{m/s}}{1.0\ \text{m}}=200\ \text{Hz}$$

23.43 一根橡皮管长 5.0 m,单位长度质量为 3.0 kg/m,橡皮管一端系在固定悬点上,另一端施加一 100 N 的张力.若在橡皮管一端横向打击一下,振动传到另一端需多少时间?

解 ☞ $v=\sqrt{\frac{T_s}{\mu}}=\sqrt{\frac{100}{0.30}}=18.3(\text{m/s})$, $s=vt$,所以 $5.0=18.3t$,得:$t=0.27$ s.

23.44 参见题 23.43,若要使橡皮管上产生四段的驻波,振动频率需为多少?(此频率称为四次谐频)

解 ☞ $4(\lambda/2)=5.0$ m, $\lambda=2.5$ m,则 $\nu=v/\lambda=18.3/2.5=7.3(\text{Hz})$.

23.45 长 12 m 的橡皮管上产生一列驻波,若驻波有五段且波速为 20 m/s,求:(a)波长,(b)波的振动频率.

解 ☞ (a)$5\left(\frac{\lambda}{2}\right)=12$ m, $\lambda=4.8$ m;(b)$\nu=\frac{20\ \text{m/s}}{4.8\ \text{m}}=4.17$ Hz.

23.46 一根绳长 0.4 m,质量为 0.16 g,绳上张力为 70 N,求绳振动时的最低的三个频率值.

解 ☞ $v=\sqrt{\frac{T_s}{\mu}}=\sqrt{\frac{70}{(0.00016/0.4)}}=\sqrt{175000}=418(\text{m/s})$.

基频对应的波长为 $2(0.4)=0.8(\text{m})$,所以

$$\nu_1=\frac{418\ \text{m/s}}{0.8\ \text{m}}=523\ \text{Hz}$$

则二次谐频和三次谐频分别为 $2\nu_1=1046$ Hz, $3\nu_1=1569$ Hz.

23.47 当 2 m 长的弦以 1200 Hz 的频率振动时产生三次泛音,求二次泛音的频率及基音的频率,并求出传播速度.

解 ☞ 三次泛音等于四次谐音,$\nu_4=1200$ Hz,则 $\nu_1=1200/4=300$ (Hz).而 $\nu_2=2\nu_1=600$ Hz, $\nu_3=3\nu_1=900$ Hz. $v=\lambda_4\nu_4=(1\ \text{m})(1200\ \text{Hz})=1200$ m/s(或 $v=\lambda_1\nu_1=(4\ \text{m})(300\ \text{Hz})=1200$ m/s).

23.48 160 cm 长的绳上两相邻共振频率为 85 Hz 和 102 Hz.(a)求绳子的基频,(b)求 85 Hz 的简正模每段的长度,(c)求绳上波传播的速率.

解 ☞ (a)基频 $f_1=v/(2L)$,n 次谐波的频率为 $nf_1=85$ Hz,$(n+1)$次谐波的频率为$(n+1)f_1=102$ Hz.解出 $f_1=17$ Hz, $n=5$.(b)$n=5$ 时,驻波有 5 段,则每一段长度为 $160/5=32$ cm.(c)从 $f_1=17=v/[2(1.6)]$得出 $v=54.4$ m/s.

23.49 将 200 cm 的绳子垂直悬挂,下端施加一张力,大小为 800 g 物体的重力.这时绳子分为三段并以 480 Hz 的频率共振.求此绳单位长度的质量.

解 ☞ 在三次谐振中,$(3\lambda)/2=2.00$ m,所以 $v=f\lambda=480(1.33)=640(\text{m/s})$.再利用 $v^2=T/\mu$,求出 $\mu=(mg)/v^2=[0.800(9.80)]/640^2=1.91\times10^{-5}(\text{kg/m})$.

23.50 绳上某一驻波满足方程 $y=0.15(\sin5x\cos300t)$m.求(a)波腹处的振幅,(b)两波节间距,(c)波长,(d)频率,(e)波速.

解 ☞ (a)与标准式 $y_0=A\sin[(2\pi x)/\lambda]\cos(2\pi ft)$比较,可得 $A=0.15$m.(b)取正弦为 0、π、2π 时为波节,所以 $x=0$ 处为一波节,而下一波节处有 $5x=\pi$,故 $x=\pi/5=0.628(\text{m})$.(c)波长为相邻波节间距的两倍,$\lambda=(2\pi)/5=1.26$ m.(d)因为 $2\pi f=300$, $f=150/\pi=47.7(\text{Hz})$.(e)$v=\lambda f=[(2\pi)/5](150/\pi)=60$ m/s.

23.51 一两端开口的风琴管长 1 ft,若声速为 1100 ft/s,求基频及前两个泛音的频率.

解 ☞ 从图 23-8 可以看出:两端开口的风琴管与绳子一样,满足 $n(\lambda/2)=L$.所以,基频为 $\nu_1=v/2L=(1100\ \text{ft/s})/2\text{ft}=550$ Hz.一次泛音即为二次谐音,$\nu_2=2\nu_1=2(550)=1100(\text{Hz})$.同理,$\nu_3=3\nu_1=3(550)=1650(\text{Hz})$(二次泛音).

23.52 一长 2.5 ft 的封闭风琴管发出声音，若声速为 1100 ft/s，求基频及前两个泛音的频率.

解 从图 23-9 可以看出，封闭管(即只有一端开口)满足 $(2n-1)(\lambda/4)=L$. 因此 $\nu_{2n-1}=(2n-1)v/4L=(2n-1)\nu_1$，只有奇次谐波出现. 对于基频，$\lambda_1=4L=4(2.5)=10$ ft，$v=\nu_1\lambda_1$，即 $1100=\nu_1(10)$，$\nu_1=110$ Hz. 一次泛音为三次谐音，所以 $\lambda_3=4L/3$，$\nu_3=v/\lambda_3=3v/4L=3\nu_1=3(110)=330$(Hz). 同理得 $\nu_5=5\nu_1=550$ Hz.

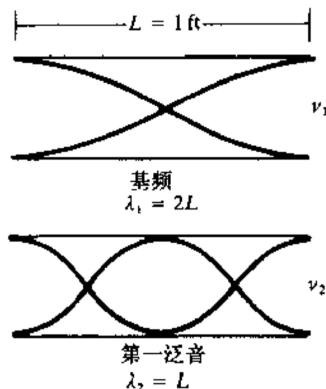


图 23-8

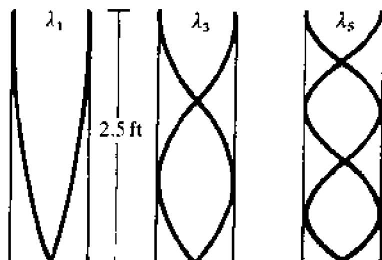


图 23-9

23.53 将一频率为 256 Hz 的音叉放在空量筒上方，如图 23-10. 音叉声音很微弱，若在量筒内倒入适量水，声音就会变响. 若倒入适量水后形成空气柱的长度为 0.31 m，求一级近似下空气中的声速.

解 当量筒内空气柱振动的频率等于音叉频率时，产生共振，听到的声音最响亮. 因为空气柱一端开放，另一端封闭，可推得波长等于空气柱长度的 4 倍：$\lambda=4L=(4)(0.31\ \text{m})=1.24$ m. 此处我们假设空气柱以基频共振. 频率 $\nu=256$ Hz，所以声速 $v=\nu\lambda=317$ m/s. 这一结果比实际值小. 因为距水面 $\frac{1}{4}$ 波长的位移波腹(或压强波节)实际会伸到量筒外，即大于 0.31 m.

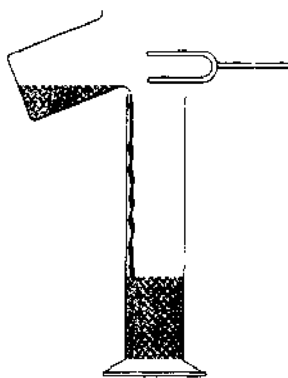


图 23-10

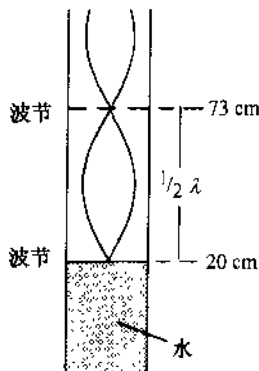


图 23-11

23.54 频率为 320 Hz 的声波从顶端射入盛水容器内，容器内水平面可以调节. 若产生驻波的两相邻水平面分别为 20 cm、73 cm，求试管内空气段中的声速.

解 如图 23-11 所示，水平面间的距离即为两相邻波节间距离，也就是半波长.

$$\frac{\lambda}{2}=73-20=53(\text{cm}),\quad \lambda=106\ \text{cm}=1.06\ \text{m}$$

$$v=\nu\lambda=320\times1.06=339(\text{m/s})$$

注意：这种方法可以避免题 23.53 中一端开放导致波腹高于量筒口的情况.

23.55 长 40 cm 的铜棒一端落到硬地板上，在整个铜棒落地之前被扶住. 此碰撞产生声音的频率为 3 kHz，求铜中的声速.

解 ☞ 铜棒两端开放，所以此纵波满足 $L = n(\lambda/2) = n[v/(2f)]$. 对于基频：$0.40 = (v/6000)$，求出 $v = 2400$ m/s.

23.56 一中心处被夹住的金属棒以基频共振产生频率为 4 kHz 的纵波. 若将此金属棒的一端夹住，求此时的基频共振频率及前两个泛音频率.

解 ☞ 中心处被夹住时，对于基频 $L = \lambda/2$，故 $f = v/(2L) = 4$ kHz. 一端被夹住时，$L = \lambda/4$，$3\lambda/4, 5\lambda/4, \cdots, (2n-1)(\lambda/4)$，$n = 1, 2, \cdots$ 频率 $f_n = (2n-1)[v/(4L)] = (2n-1)(2\text{ kHz})$，所以 $f_1 = 2$ kHz，$f_2 = 6$ kHz，$f_3 = 10$ kHz.

23.57 两端封闭的试管长 80 cm，试管内波速为 330 m/s，写出此声波的基频驻波方程，波腹处振幅用 s_0 表示. 同样，写出二次谐频、三次谐频驻波方程.

解 ☞ 与在线上一样，位移波节位于两端点处.

由 $L = (n\lambda)/2$ 得 $f_n = n[v/(2L)]$，故 $\lambda_n = (2L)/n = (1.6/n)$ m，$f_n = n(330/1.6) = (206n)$ Hz. 波节在两端点处的驻波方程 $s = s_0\sin[(2\pi x)/\lambda_n]\cos(2\pi f_n t)$. x 和 t 的系数分别为 $2\pi/\lambda_n = 3.93n$ 和 $2\pi fn = 1295n$，所以 $s = s_0\sin(3.93nx)\cos(1295nt)$. $n = 1$，即为基频驻波方程；$n = 2$、3 分别为二次谐频，三次谐频驻波方程.

23.58 将较硬的金属丝围成一直径为 D 的圈，两端点被刀刃夹紧. 在连结处附近的一微小振动产生的横波沿此金属圈传播. 用波速 v 和直径 D 表示出此金属圈上的共振频率.

解 ☞ 假设在金属圈两端点处产生波节；对于半金属圈，$(\pi D)/2 = (n\lambda)/2$. 利用 $\lambda = v/f$，求出 $f = n[v/(\pi D)]$.

23.59 一均质细绳（长为 L，密度为 μ，张力为 T）n 次谐频振幅为 A_n，证明：振动总能量为 $E = \pi^2\nu_n^2A_n^2\mu L$.

证 ☞ 绳子位移由下式给出：

$$y(x,t) = A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cos(2\pi\nu_n t + \delta)$$

所以横波速度为

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -2\pi\nu_n A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sin(2\pi\nu_n t + \delta)$$

绳子总的振动能量等于最大动能.（注意当 $y = 0$ 时，绳上所有质点同时获得最大动能）因为 $dm = \mu dx$，故有

$$E = K_{\max} = \max\left[\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dm\right] = \max\left[\frac{1}{2}\int_0^L \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx\right]$$

当 $\sin^2(2\pi\nu_n t + \delta) = 1$ 时，E 取到最大值，所以求得

$$E = \frac{\mu}{2}(2\pi\nu_n A_n)^2\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx$$

$\sin^2[(n\pi x)/L]$ 在半个周期内的平均值为 $\frac{1}{2}$. 因此 $E = 2\pi^2\mu\nu_n^2A_n^2(L/2) = \pi^2\nu_n^2A_n^2\mu L$，得证.［与题 23.29 中行波结果比较.］

23.60 边长为 85 cm 的正方形薄膜崩紧地固定在硬质框架上. 在它中心处轻微拍击一下，产生一频率为 200 Hz 的声音. 若薄膜以图 23-12 所示的方式共振，求薄膜内的波速.



图 23-12

解 ☞ 矩形面的共振频率由下式给出：

$$f_{mn} = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2}$$

其中 m、n 分别表示满足长度 L_x、L_y 的半波数. 在图 23-12 中，$m = n = 1$，因此

$$200 = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{2}{(0.85^2)}}$$

解得 $v = 240$ m/s.

第二十四章　声

24.1　声速;拍;多普勒频移

24.1　氦气(He)为单原子气体,当压强为 76 cm Hg,温度为 0℃ 时,He 密度为 0.179 kg/m³. 求在此温度和压强下,压缩声波在氦气中的传播速度.

解　☞ $v=\sqrt{B/\rho}$,其中 B 为绝热过程的体积模量. 对于理想气体,$B=\gamma p$(见题 21.24),而单原子气体 $\gamma=1.67$. 所以,

$$v=\sqrt{\frac{1.67(1.013\times10^5)\text{N/m}^2}{0.179\ \text{kg/m}^3}}=972\ \text{m/s}$$

24.2　氢气(H_2)由双原子分子组成,分子量 $M=2$ kg/kmol, 27℃ 时氢气中的声速为多少?

解　☞ 理想气体 $v=[\gamma p/\rho]^{1/2}=[(\gamma RT)/M]^{\frac{1}{2}}$,所以

$$v=[(1.40)(8314\ \text{J/kmol·K})(300\ \text{K})/(2\ \text{kg/kmol})]^{1/2}=1321\ \text{m/s}$$

24.3　氧气(O_2)分子的分子量为 32 kg/kmol,求 0℃ 时氧气中的声速.

解　☞ 与题 24.2 同理,$v=[(1.40)(8314)(273)/32]^{1/2}=315(\text{m/s})$.

24.4　温度为 −73℃ 时,盛氢容器内声速为 4000 ft/s. 若保持体积不变,氢气温度升至 127℃,求此时的声速(单位取 ft/s).

解　☞ 因为 $v=[(\gamma RT)/M]^{1/2}$,设 γ 为常数,则 $v=v_0\sqrt{T/T_0}=(4000\ \text{ft/s})\cdot\sqrt{(400\ \text{K})/(200\ \text{K})}=5657\ \text{ft/s}$.

24.5　温度为 35℃ 时,空气中的声速为多少? 已知 0℃ 时空气中的声速为 331 m/s.

解　☞ $v\propto\sqrt{T}=\sqrt{273+t}$,所以,若 0℃ 时速度为 v_0,则 $v=v_0(1-t/273)^{1/2}=331(1+35/273)^{1/2}=351.6(\text{m/s})$.

24.6　要使空气中的声速提高 1%,必须要将 0℃ 的空气升高多少℃?

解　☞

$$\frac{(273+t)^{1/2}-(273)^{1/2}}{273^{1/2}}=0.01$$

利用 $[1+t/273]^{1/2}\approx1+t/546$,得到 $(t/546)(100)=1.0$,求出 $t=5.5$℃.

24.7　某种混和气体由两种双原子气体组成(分子量为 M_1 和 M_2),两种气体的质量比 $m_2/m_1=r$. 证明,若此混和气体为理想气体,则在此混和气体内声速为

$$v=\sqrt{\frac{1.40RT}{M_1M_2}\frac{M_2+rM_1}{1+r}}$$

证　☞ $v=[(\gamma p)/\rho]^{1/2}$,而 $\rho=m/V=(m_1+m_2)/V$,根据道尔顿定律:$p=p_1+p_2=(n_1+n_2)\cdot[(RT)/V]$,其中 $n_1=m_1/M_1$, $n_2=m_2/M_2$,所以:$p/\rho=[(m_1/M_1+m_2/M_2)RT]/(m_1+m_2)=[(1/M_1+r/M_2)RT]/(1+r)$,其中 $r=m_2/m_1$. 将 p/ρ 及 $\gamma=1.40$ 代入 v 表达式,即得到要证的结果.

24.8　(牛顿)假设气体内的受迫振动是等温而不是绝热的. 在等体情况下,声速表达式为 $v_{ad}=(\gamma p/\rho)^{1/2}$,求等温情况下等价的声速表达式.

解　☞ 等温时 pV 为常数,故 $\Delta(pV)=p\Delta V+V\Delta p=0$,或写为 $\Delta V/\Delta p=-V/p$;而根据 B 的定义有 $\Delta V/\Delta p=-V/B$,所以 $B=p$,而等温时的声速 $v_{iso}=(B/\rho)^{1/2}=(p/\rho)^{1/2}$. 因此,$v_{ad}/v_{iso}=\gamma^{1/2}$.

24.9　空气中频率为 1000 Hz 的声波射到湖面上并进入水中,求声波在水中的频率和波长. 假设水中声速为 1500 m/s.

解 ☞ 单位时间内经过任一点的完整波数在空气中和在水中是相等的，所以对于两种媒质都有 $f=1000$ Hz，因此

$$\lambda_w=\frac{v_w}{f}=\frac{1500\ \text{m/s}}{1000\ \text{s}^{-1}}=1.5\ \text{m}$$

24.10 水下有一声源以 60 kHz 的频率将声传向水面．声速到达空气后波长为何值？在水面上方飞翔的小鸟听到的声源发出的声波频率为何值？假设在空气中 $v=330$ m/s．

解 ☞ 与题 24.9 同理，f 为常数，等于 60 kHz．波长 $=v/f=330/(6.0\times10^4)=5.5$ (mm)．

24.11 定义音调、响度、音质、分贝、混响时间、干涉、拍、多普勒效应、超音速、冲击波、马赫数．

解 ☞ 音调是指由基频决定的声音特性．频率高则音调高．

响度是指听觉判断的声音强弱．它由声音的强度和频率决定．

音质(或音色)由泛音数量及强度决定．

分贝(dB)是声强级 n 的单位．1 dB 等于对强度比 1.26∶1 取 log 后再乘以 10．n 的方程为 $n=10\log(I/I_0)$．其中 $I_0=10^{-12}$ W/m^2．

房间混响时间是指声源停止发声后，声级下降 60 dB 所需要的时间．也即为声强下降 10^6 倍所需的时间．

干涉是指两列(或两列以上)的波相互叠加，出现加强或减弱的现象．

拍是指两列强度相等，频率相近的声波干涉时发生的声强作周期性振动的现象．

多普勒效应是当声源和观察者有相对移动时，观察者接收到的声源频率改变的现象．

超音速是指大于声速的速度．

冲击波是指物体以超音速运动时的波动．

马赫数是指物体或波前速度与声速的比值．

24.12 同时收听两个封闭风琴管，每秒内基频间产生 5 拍．若较短的管长 1.1 m，求较长的管的长度 L．假设空气中声速 $v=340$ m/s．

解 ☞ 每根管为$\frac{1}{4}$波长(参见题 23.52)，因此

$$5\ \text{Hz}=\nu_1-\nu_2=\frac{340\ \text{m/s}}{4.4\ \text{m}}-\frac{340\ \text{m/s}}{4L}$$

解得，$L=1.18$ m．

24.13 同时听两根长度分别为 2.5 ft 和 2.4 ft 的开口风琴管．若声速为 1100 ft/s，每秒内基音间产生多少拍？

解 ☞ 每根管为$\frac{1}{2}$波长(参见题 23.51)，所以

$$\nu_1-\nu_2=\frac{1100\ \text{ft/s}}{4.8\ \text{ft}}-\frac{1100\ \text{ft/s}}{5.0\ \text{ft}}=9\ \text{Hz}$$

24.14 同时听两个音叉，每秒听见 4 拍．现在第二个音叉的一根叉尖上固定一段细线，两音叉又能被听到，但每秒听见 2 拍．若第一个音叉的频率为 180 Hz，求第二个音叉的初始频率．

解 ☞ 第二个音叉的频率必定高于第一个音叉，否则固定细线后，拍的数目将增加．因此，$\nu_2-180=4$，得 $\nu_2=184$ Hz．

24.15 钢琴的一些低音键有两根弦．若某键的一根弦调准的音为 100 Hz，当同时听两根弦时听到每秒有 1 拍，为使两根弦更加匹配，调音师应将未调准的弦的张力改变多少？(拍产生于基音之间)

解 ☞ 基频为 $\gamma=(\sqrt{F/\mu})/(2L)$，假设两根弦长度，材质，直径都相同，则 $\Delta\nu$ 只与张力差 ΔF 有关．根据上式，得到

$$\frac{d\nu}{dF}=\frac{1}{2L}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{F\mu}}=\frac{\nu}{2F}$$

当 $|\Delta\gamma| \ll \nu$ 时,有 $\Delta\gamma/\gamma = \frac{1}{2}(\Delta F/F)$,在此题中,$\nu = 100$ Hz,$|\Delta\nu| = 1$ Hz.所以,$|\Delta F|/F = 2|\Delta\nu|/\nu = 2(1/100) = 2\%$(若为校准的弦较松,则增加张力;若较紧,则减小张力.)

24.16 一列火车以 100 ft/s(68 mi/h)的速度朝观察者驶来,火车鸣叫的频率为 400 Hz,声速为 1100 ft/s.求观察者听到的鸣叫声的频率.

解 ☞ 利用多普勒效应公式

$$\frac{\nu_L}{v + v_L} = \frac{\nu_s}{v - v_s}$$

其中 v_L = 介质中收听者相对于声源的速度;v_s = 介质中声源相对于收听者的速度;v = 声波在介质中的速度.因为收听者不动,v_L 为零.

$$\frac{\nu_L}{1100} = \frac{400}{1100 - 100}, \quad \nu_L = \frac{400(1100)}{1000} = 440(\text{Hz})$$

24.17 一辆汽车以 90 ft/s(61 mi/h)的速度沿着与铁轨平行的公路行驶,汽车前方停有一辆火车.当火车鸣叫时,汽车司机听到的频率为 400 Hz,若声速为 1080 ft/s,火车鸣叫声的实际频率为何值?

解 ☞
$$\frac{\nu_L}{v + v_L} = \frac{\nu_s}{v - v_s}, \quad v_s = 0$$

于是
$$\frac{400}{1080 + 90} = \frac{\nu_s}{1080}, \quad \nu_s = \frac{400(1080)}{1170} = 369(\text{Hz})$$

24.18 一只鹰以 15 m/s 的速度垂直飞离一鸟类观察者并垂直飞到远处的悬崖上.此鹰发出频率为 800 Hz 的刺耳鸣叫.(a)求观察者听到的鸣叫声的频率,(b)求观察者听到的悬崖回声的频率.

解 ☞ (a)用 ν 代表鸣叫声的频率,$|v|$ 代表声速,$|v_s|$ 代表声源速度.因为鹰垂直飞离观察者,所以接收到的频率 ν' 为

$$\nu' = \nu\frac{|v|}{|v| + |v_s|}$$

将 $|v| = 340$ m/s,$|v_s| = 15$ m/s,$\nu = 800$ Hz 代入,得

$$\nu' = \frac{(800)(340)}{340 + 15} = 766(\text{Hz})$$

(b)射向悬崖的任何频率都将被不变地反射回来.因此,观察者接收到的回声的频率等于在悬崖上的观察者直接接收到的频率.所以,回声的频率 ν'' 为

$$\nu'' = \nu\frac{|v|}{|v| - |v_s|} = \frac{(800)(340)}{(340 - 15)} = 837(\text{Hz})$$

24.19 火车进站和离站时鸣叫.一个在站内的观察者听到火车进站时频率为 219 Hz,离站时频率为 184 Hz.已知声速为 340 m/s,求火车车速和鸣叫声的频率.

解 ☞ 只有声源在媒质中运动.令 $|v_T|$ 代表火车速度,ν_0 代表鸣叫声频率,则观察者接收到的频率为,火车进站时

$$\nu_a = \nu_0\frac{|v|}{|v| - |v_T|} = 219 \text{ Hz} \tag{1}$$

火车离站时,频率为

$$\nu_r = \nu_0\frac{|v|}{|v| + |v_T|} = 184 \text{ Hz} \tag{2}$$

将(1)式、(2)式相除,得

$$\frac{\nu_a}{\nu_r} = \frac{|v| + |v_T|}{|v| - |v_T|} \tag{3}$$

利用(3)式求出火车的速度

$$|v_T| = |v|\frac{\nu_a - \nu_r}{\nu_a + \nu_r} = 29.5 \text{ m/s} \tag{4}$$

由方程(4)和(1)得到

$$\nu_0=\nu_a\left(1-\frac{|v_T|}{|v|}\right)=\frac{2\nu_a\nu_r}{\nu_a+\nu_r}=200\ \text{Hz}$$

24.20 如图 24-1 所示，观察者 P 站在两平行铁轨之间，两列火车相向行驶过来．火车 A 的速度 $|v_A|=15$ m/s，并发出频率为 $\nu_0=200$ Hz 的鸣叫．火车 B 速度 $|v_B|=30$ m/s．若空气中声速为 340 m/s，空气中无风．(a)求观察者 P 接收到的火车A 发出鸣叫声的波长 λ_1 和频率 ν_1，(b)求火车 B 上的工程师听到的鸣叫声的频率 ν_2．

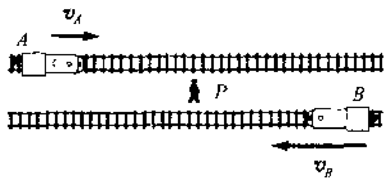


图 24-1

解 ☞ (a)此题属于声源移动，但介质和观察者静止的情况．因为声源以速度 $|v_A|$ 接近观察者，所以接收到的波长 λ_1 为

$$\lambda_1=\frac{|v|-|v_A|}{\nu_0}$$

其中 v 为声速．接收到的频率 ν_1 为

$$\nu_1=\nu_0\frac{|v|}{|v|-|v_A|}$$

代入 $|v_A|=15$ m/s，$\nu_0=200$ Hz，得到 $\lambda_1=1.625$ m，$\nu_1=209$ Hz．

(b)此题属于声源、观察者都运动的情况．普通多普勒效应仍适用．我们取图 24-1 中向右为正方向．介质速度 v_m 为零，观察者速度 $=-|v_B|$，声源速度 $v_s=|v_A|$．所以，火车 B 上工程师接收到的频率 ν_2 为

$$\nu_2=\nu_0\frac{|v|+|v_B|}{|v|-|v_B|}=200\ \frac{340+30}{340-15}=228(\text{Hz})$$

24.21 假设题 24.20 中，到达火车 B 的一些声波又被反射到观察者 P 和火车 A 处．(a)求观察者 P 听到的反射波的波长 λ_3 和频率 ν_3，(b)求火车 A 上的工程师听到的反射波的频率 ν_4．

解 ☞ (a)反射声波时，火车 B 为一频率为 ν_2(相对声源的测量值)的波源．当反射波到达观察者 P 时，P 接收到的波长 λ_3，频率 ν_3 为

$$\lambda_3=\frac{|v|-|v_B|}{\nu_2}=\frac{340-30}{228}=1.36(\text{m})$$

$$\nu_3=\nu_2\frac{|v|}{|v|-|v_B|}=\frac{(228)(340)}{340-30}=250(\text{Hz})$$

(b)因为波源与观察者相向运动，所以接收到的频率为

$$\nu_4=\nu_2\frac{|v|+|v_A|}{|v|-|v_B|}=\frac{(228)(340+15)}{340-30}=261(\text{Hz})$$

24.22 频率为 ν 的波源与一观察者均静止，中间相隔一段固定距离．但传播介质(在此介质中波的传播速度为 v)沿某个任意的方向以均匀速度 v_m 移动．求观察者接收到的频率 ν'，用物理方法解释你的结果．

解 ☞ 产生多普勒效应(适用于牛顿力学)的基础原因为，当且仅当不同波前从波源到观察者的时间不同时，接收频率与源频率不同．在此题中，介质以均匀稳定的速度经过波源和观察者，则对于所有波前，从波源到观察者的传播时间都相同，所以直接得出：$\nu'=\nu$．

24.23 男孩以 1.0 m/s 的速度背离墙走向前方一观察者，男孩保持与墙成直角．他边走边稳定地吹口哨．此时观察者每秒内听到 4 拍，若声速为 340 m/s，求口哨声的频率．

解 ☞ 从男孩传到观察者处的波产生多普勒效应，源频率为 ν，接收频率为 ν_1，满足

$$\nu_1=\nu\frac{|v|}{|v|-|v_s|}$$

此处 $|v|$ 为声速，$|v_s|$ 为男孩走近观察者的速度．同时，观察者也接收到从墙上反射来的声波．因为男孩远离墙运动，射到墙上的频率为

$$\nu_2 = \nu\left(\frac{|v|}{|v|+|v_s|}\right)$$

墙将此频率不变地反射回来,观察者听到拍的频率为

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \nu|v|\left(\frac{1}{|v|-|v_s|} - \frac{1}{|v|+|v_s|}\right) = \nu|v|\left(\frac{2|v_s|}{|v|^2-|v_s|^2}\right)$$

根据此式求出 ν,得到

$$\nu = \frac{\Delta\nu(|v|+|v_s|)(|v|-|v_s|)}{2|v||v_s|}$$

代入已知值 $\Delta\nu = 4.0$ Hz, $|v| = 340$ m/s, $|v_s| = 1.0$ m/s,我们得到

$$\nu = \frac{(4.0)(341)(339)}{2(340)(1.0)} = 680(\mathrm{Hz})$$

24.24 两汽车相向行驶,第一辆车的速度为 88 ft/s,第二辆车的速度为 66 ft/s.第一辆车的司机按下喇叭,频率为 400 Hz.(a)求第二辆车的司机听到的频率.(声速取为 $v = 1100$ ft/s.)(b)当两辆车相背运动后,第二辆车的司机听到的频率又为多少?

解 ☞ (a)根据多普勒效应,且 v_s 和 v_L 都为正,

$$\frac{\nu_L}{v+v_L} = \frac{\nu_s}{v-v_s},\quad \frac{\nu_L}{1100+66} = \frac{400}{1100-88}$$

$$\nu_L = \frac{400}{1012}1166 = 461(\mathrm{Hz})$$

(b) v_s 和 v_L 都为负,

$$\frac{\nu_L}{1100-66} = \frac{400}{1100-(-88)},\quad \nu_L = \frac{400}{1188}1034 = 348(\mathrm{Hz})$$

24.2 功率;强度;混响时间;冲击波

24.25 水下传播的声波方程为 $s = (3\times10^{-4})\sin(2000t - 1.38x)$ m.求声波导致的水分子的速度及加速度方程.证明:要产生这一运动需要一个遵从胡克定律的力.

证 ☞ 速度 $= \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 0.60\cos(2000t - 1.38x)$ m/s;加速度 $= \mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 = -1200\sin(2000t - 1.38x)$ m/s^2.即为胡克定律,$\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 = -$常数$\cdot s$.

24.26 声波的强度为垂直于传播方向的单位面积上波传递的功率.证明,频率为 f 沿某一方向传播的声波强度为 $I = 2\pi^2f^2\rho v s_0^2$,其中 ρ 为介质密度,v 为传播速度,s_0 为声波振幅.

证 ☞ 因为介质遵从胡克定律(题 24.25),将题 23.29 的推理应用到垂直于传播方向的截面积 a 上:通过 a 的平均能流 $P_{avg} = \frac{1}{2}(2\pi f)^2s_0^2(\rho a)v$,其中 $\rho a = \mu$,表示沿传播方向底面积为 a 的单位长度管状体积的质量.于是:$I = P_{avg}/a = 2\pi^2f^2\rho v s_0^2$,得证.

24.27 某一扩音器圆形开口的直径为 15 cm,若此扩音器沿着圆形开口均匀发出声音,设声强为 100 μW/m^2,此扩音器辐射功率为何值?

解 ☞ $P = IA = (100\mu\mathrm{W/m^2})\frac{\pi(0.15\ \mathrm{m})^2}{4} = 1.77\ \mu\mathrm{W}$.

24.28 一段交响乐的声级(声强级)为 70 dB,人正常说话时声级为 40 dB.每平方米面积内,交响乐的功率是人说话时的多少倍?

解 ☞ 根据题 24.11,声强级 $n = 10\log(I/I_0)$,或写为 $I = I_0 10^{n/10}$,其中 I 为强度.因此,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{(n_1-n_2)/10} = 10^{(70-40)/10} = 10^3 = 1000$$

24.29 强度为 1.2 W/m^2 的声音会使人难受,这一强度相当于多少 dB?

解 ☞

$$n = 10\log I/I_0 \qquad I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$$

$$n = 10\log\frac{1.2}{10^{-12}} = 10\log(1.2\times10^{12}) = 10(12.079) = 120.8(\mathrm{dB})$$

24.30 (a)60 dB 的声音强度为何值？(b)面积为 120 cm^2 的扩音器附近，声级为 60 dB，求此扩音器的输出功率．

解 ☞ (a)$60=10\log(I/10^{-12})$，解出 $I=1\ \mu W/m^2$．

(b)$P=(1\times10^{-6}\ W/m^2)(120\times10^{-4}\ m^2)=12\ nW$．

24.31 听力正常的人听见的 $10^{-6}\ W/m^2$ 的声音强度是 $10^{-9}\ W/m^2$ 的声音强度的几倍？

解 ☞ $10^{-6}\ W/m^2$ 相当于 60 dB，而 $10^{-9}\ W/m^2$ 相当于 30 dB．所以前者是后者强度的 2 倍．

24.32 假设一个人在房间内讲话时平均声级为 40 dB，若房间内有 20 个人在讲话，声级为何值？可以近似地假设每个人的声级都相同，都为 40 dB．

解 ☞ 令 $I=$一个人的声强，则

$$n_{20}=10\log(20I/I_0)=10\log20+10\log(I/I_0)=10(1+\log2)+40\approx53(dB)$$

24.33 摇滚乐队演奏时，离乐队中心处 20 m 处的平均声级为 105 dB，近似认为乐队的声音呈半球状辐射，求此乐队的输出功率．

解 ☞ 20 m 远处的声强为 $105\ dB=10\log(I/10^{-12})$，求出 $I=0.0316\ W/m^2$．因为半球面积为 $2\pi R^2=2\pi(20)^2=2510\ m^2$，$P=IA=79.4\ W$

24.34 若空气中产生了一列频率为 3000 Hz、振幅为 0.200 mm 的正弦声波，求此声波的声级．(设 $v=330\ m/s$，$\rho_{空气}=1.29\ kg/m^3$．)

解 ☞ 根据题 24.26，$I=2\pi^2f^2\rho vs_0^2=2\pi^2(3000)^2(1.29)(330)(2.0\times10^{-4})^2=(3.03\times10^3)(W/m^2)$，解出声级为 $10\log(I/I_0)=10\log(3\times10^5)=10(\log3+15)\approx155(dB)$．

24.35 60 dB、800Hz 的声音传播路径上空气运动的振幅为何值？假设 $\rho=1.29\ kg/m^3$，$v=330\ m/s$．

解 ☞ 根据题 24.26，$I=2\pi^2\rho vs_0^2f^2$，声强 $60\ dB=10\log(I/I_0)$，求得 $I=10^{-6}\ W/m^2$ 所以 $s_0=[10^{-6}/(2\pi^2)(1.29)(330)(800)^2]^{1/2}\ m=13.6\times10^{-9}\ m=13.6\ nm$．

24.36 求宽 10 m、长 20 m、高 3 m 的房间的混响时间．此房间天花板为吸声材料，墙壁为灰泥，地板为混凝土，房间内有 36 个人．[已知吸声系数：天花板 0.60，灰泥 0.03，混凝土 0.02，每人的吸声功率为 0.5．]

解 ☞ 先求出总吸声功率 A：

$$A=200(0.6)+200(0.02)+(30+30+60+60)(0.03)+36(0.5)(1)$$
$$=120+4+5.4+18=147.4$$

房间体积 $V=(3)(10)(20)=600(m^3)$，利用赛宾(Sabine)方程，$t_R=0.16(V/A)=0.16(600/147.4)=0.65(s)$．

24.37 图 24-2 中，S_1 和 S_2 为两相同的声源，发射的声波同时到达波峰(即声源同相位)．L_1-L_2为何值时，在 P 点能听到响亮的声音？

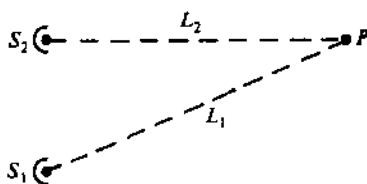


图 24-2

解 ☞ 若 $L_1=L_2$，则从两个声源发出的声波同时到达 P 点，两波峰同时在 P 点相遇．因此，在 P 点处两列波同相位，能听到响亮的声音．

若 $L_1=L_2+\lambda$，则从 S_1 发出的声波比 S_2 发出的声波滞后一波长到达 P 点．但波总是以波长为周期，因此，S_1 波的波峰仍和 S_2 波的波峰同时到达 P 点．在 P 点处两列波仍同相位，能听到响亮的声音．

一般地，当 $L_1-L_2=\pm n\lambda$，n 为整数时，在 P 点能听到响亮的声音．

24.38 S_1 和 S_2 为单一频率的两个等同声源，S_1 和 S_2 离 O 点等距离．当 S_1 单独播放时，声波到达 O 点振幅为 A．(a)若 S_1 和 S_2 同时播放，且两声源同相位，求此时 O 处的振

幅,(b)当两声源同时播放时,在 O 点处的能流密度是 S_1 单独播放时的多少倍?(c)两声源同时播放,声强增加多少分贝?

解 ☞ (a)若两声源同相位,且距离 O 点相等,则到达 O 点处两列声波同相位,因此 O 点处振幅为原来的2倍:$A'=2A$.

(b)用 $\langle S\rangle$ 代表 S_1 单独播放时的平均能流密度,用 $\langle S'\rangle$ 代表 S_1, S_2 同时播放时的平均能流密度.若两列波以相同方向到达 O 点,则有

$$\frac{\langle S'\rangle}{\langle S\rangle}=\left(\frac{A'}{A}\right)^2=4$$

(若两列波以不同方向到达 O 点,则比值 $\langle S'\rangle/\langle S\rangle<4$)

(c) S_1 单独播放,声强 $\alpha=10\log(\langle S\rangle/S_0)$;两声源同时播放,声强 $\alpha'=10\log(\langle S'\rangle/S_0)$.增加量为

$$\alpha'-\alpha=10\left(\log\frac{\langle S'\rangle}{S_0}-\log\frac{\langle S\rangle}{S_0}\right)=10\log\left(\frac{\langle S'\rangle}{S_0}\frac{S_0}{\langle S\rangle}\right)=10\log4\approx6(\mathrm{dB})$$

24.39 若介质中点声源的速度 $|v_s|$ 大于此介质中的声速 $|v|$. 证明:所有从声源发出的声波都相切于一个圆锥(马赫圆锥),此圆锥的顶点随声源运动,此声波的圆锥形包络面称为冲击波.

证 ☞ 图24-3(a)画出了静止介质中的六个波前,这些波由一个以速度 $|v_s|=2|v|$ 向右运动的声源发出,图中也标出了波前数及声源在各时刻的位置.

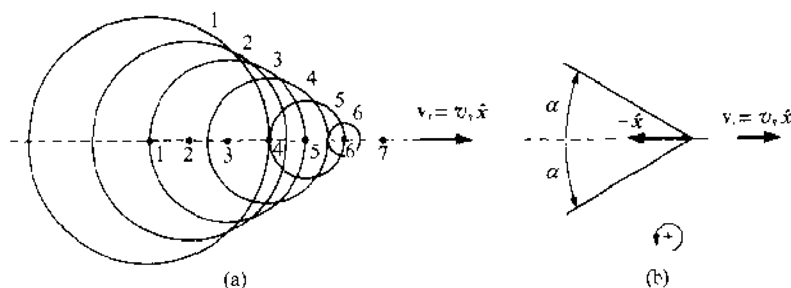


图 24-3

从图中可以看出,每个圆形波的中心离声源当前位置(即为位置7)的距离等于($|v_s|/|v|$)乘以此圆形波的半径.从位置7画各波前的切线,这些切线都与 $-\hat{x}$ 成马赫角 α,其中 $\sin\alpha=|v|/|v_s|$,切线如图24-3(b)所示.推广到经过声源路径的各个方向的平面,在所有平面情况都一致.在任意时刻,波前都相切于同一圆锥,此圆锥顶点位于当前声源位置处,轴线为声源运动路径,顶角 2α 满足 $\alpha=\arcsin(|v|/|v_s|)$.

第二十五章　库仑定律和电场

25.1　电场力与库仑定律

25.1　试描述库仑定律及相关的国际单位.

解　☞ 真空中有相距为 r 的两个点电荷 q 和 q', 若 q、q' 带同种电荷, 则它们相互排斥; 若带异种电荷, 则它们相互吸引. 由库仑定律得电荷间的作用力为 $F = k(qq'/r^2)$, 其中 k 为正常数. 当 F 为正时 r 有增大的趋势. 在国际单位制中, 电量的单位为库仑(C). 为避免数字过小, 在实际工作中常用微库($1\mu C = 10^{-6}C$)和纳库($1nC = 10^{-9}C$)作为电量的单位. 在另一种常用的单位制(高斯单位制)中, 库仑定律写成 $F = (qq')/r^2$, F 的单位是达因(dyn), r 的单位是厘米(cm), 电量的单位为静电单位(esu). 一库仑和一静电单位的转换关系是: $1C = 3\times10^9 esu$.

自然界中的基本最小电荷带电量的绝对值为 e, 其值为 $e = 1.60219\times10^{-19}C$. 其它电荷的带电量为 e 的整数倍. 一个电子所带的电量为 $-e$, 一个质子所带的电量为 $+e$.

在国际单位制中, 对于真空中的电荷而言, 库仑常数 k 有如下值:

$$k = 8.988\times10^9 N\cdot m^2/C^2 \approx 9\times10^9 N\cdot m^2/C^2$$

常将 k 写成 $1/(4\pi\varepsilon_0)$, 其中 ε_0 为真空介电常数, 其值为 $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2$. 因此, 对真空而言, 库仑定律可写成 $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$.

写成矢量形式, 令 $\boldsymbol{F}_2$ 表示电荷 q_1 对 q_2 的力, $\boldsymbol{r}$ 表示由 q_1 到 q_2 方向的位移矢量, $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量, 则库仑定律写成

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{kq_1q_2\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{kq_1q_2\boldsymbol{r}}{r^3}$$

25.2　把电荷放在各向同性的均匀介质中, 对库仑定律有何影响?

解　☞ 当把电荷放在介质而非真空中时, 介质材料中的极化电荷就会使电荷间产生的作用力减小. 如果材料具有相对介电常数 K, 则库仑定律中的 ε_0 须用 $\varepsilon = K\varepsilon_0$. 来代替, ε 称为材料的介电常数. 即 $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}$, $\varepsilon = K\varepsilon_0$. 真空中 $K = 1$; 空气的相对介电常数 $K = 1.0006$, 近似于 1.

25.3　什么是空间某点的电场强度?

解　☞ 空间某一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 即为带一个单位的正检验电荷在该点所受的电场力. E 的单位是牛顿/库仑(N/C)或者伏特/米(V/m)(见第 26 章).

我们利用库仑定律研究点电荷 q 产生的电场. 将一点电荷 $q' = +1$ 库仑放在距离电荷 q 为 r 的空间某点, q' 受到的电场力为 $\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}$ 即为点电荷 q 在距离为 r 处产生的电场强度.

25.4　带电量为 −1 C 的电荷含多少个电子? 这些电子的总质量是多少?

解　☞ 由 25.1 题知电子的带电量为 $-e$, 其中 $e = 1.6\times10^{-19}C$. 所以电量为 −1.0 C 的电荷, 含电子的个数为 $n = 1.0/(1.6\times10^{-19}) = 6.2\times10^{18}$ 个. 电子的总质量 $M = nm_e = (6.2\times10^{18})(9.11\times10^{-31}kg) = 5.6\times10^{-12}kg$.

25.5　有两个带电量均为 1 C 的电荷, 在空气中相距 1 km, 它们之间的作用力为多大?

解　☞ 根据 $F = (kq_1q_2)/r^2$, 其中 $k = 9.0\times10^9 N\cdot m^2/C^2$,

$q_1 = q_2 = 1C$, $r = 1km$, 则 $F = [(9.0\times10^9)\times1\times1]/1000^2 = 9.0(kN)$(约 2000 lbf)可以看出, 即使两电荷相距 1 km, 它们之间的排斥力也相当大. 这说明 C 是一个很大的电量单位.

25.6　试求两自由电子相距 1 Å(0.1 nm)(一个标准原子的大小)时的作用力.

解 ☞ F 为斥力.由 $F=(kq_1q_2)/r^2$, $q_1=q_2=1.6\times10^{-19}$C, $r=10^{-10}$m,可得 $F=[(9\times10^9)\cdot(1.6\times10^{-19})^2]/(1.0\times10^{-10})^2=2.3\times10^{-8}$(N)=23(nN).

25.7 一个重为 2.0 g 的铜球含有大约 2×10^{22}个原子,每个原子的原子核带电量为29 e,则需移走多少电子才能使铜球带电量为 +2 μC?

解 ☞ 铜球中的电子数目为 $29(2\times10^{22})=5.8\times10^{23}$.应移走电子的数目为$(2\times10^{-6}\text{C})/(1.6\times10^{-19}\text{C/每电子})=1.25\times10^{13}$,所占比率为 2.16×10^{-11}.

25.8 两个氩核相距 1 nm(10^{-9} m)时,它们之间的排斥力有多大?每个氩核带电量为 +18 e.

解 ☞ 由 $F=(kq^2)/r^2$, $q=18\times1.6\times10^{-19}$ C, $r=1.0\times10^{-9}$ m

$$F=[(9\times10^9)(28.8\times10^{-19})^2]/(1.0\times10^{-9})^2=75\text{ (nN)}$$

25.9 铀核的带电量是质子带电量的 92 倍.如用质子轰击铀核,当质子距核 1×10^{-11}m 时,质子受到的排斥力有多大?原子核的直径为 10^{-14} m 的数量级,因此铀核可看作点电荷.

解 ☞ $F=[(9\times10^9)(92\times1.6\times10^{-19})(1.6\times10^{-19})]/(1\times10^{-11})^2=2.1\times10^{-4}$(N)

25.10 两只带电量相等的小球在空中相距 3 cm,相互排斥力为 4×10^{-5}N.求每只球的带电量.

解 ☞ $F=(kq^2)/r^2$, $F=4\times10^{-5}$N, $r=0.03$ m.则

$$4\times10^{-5}=[(9\times10^9)q^2]/0.03^2,\ q^2=4\times10^{-18}\text{C}^2,\ q=\pm2\text{nC}$$

25.11 两个点电荷 Q_1、Q_2 相距 3 m,总电量为 20 μC.(a)如果两者相互排斥,且作用力大小为 0.075 N,则两电荷的带电量各为多少?(b)如果两者相互吸引,且作用力大小为 0.525 N,则两电荷带电量各为多少?

解 ☞ (a) $Q_1+Q_2=20$ μC,因作用力为斥力,$0.075=(9\times10^9)[(Q_1Q_2)/3^2]$,所以 $Q_1Q_2=75\times10^{-12}\text{C}^2=75\mu\text{C}^2$.消去 Q_2,则 $Q_1(20-Q_1)=75$ 或 $Q_1^2-20Q_1+75=0$,所以两电荷大小分别为 5 μC 和 15 μC.(b)作用力为引力,所以有一电荷带负电.受力方程为 $-0.525=(9\times10^9)[(Q_1Q_2)/3^2]$,即 $Q_1Q_2=-525\mu\text{C}^2$,消去 Q_2 得 $Q_1^2-20Q_1-525=0$,得两电荷带电量分别为 35 μC 和 −15 μC.

25.12 将一检验电荷 $Q=+2$ μC 置于电荷 $Q_1=+6\mu$C 与 $Q_2=+4\mu$C 连线的中点位置,Q_1、Q_2 相距 10 cm,求此检验电荷受到的作用力.

解 ☞ 运用库仑定律求出 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,并对它们矢量求和

$$F_1=k\frac{Q_1Q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(6\times10^{-6})(2\times10^{-6})}{0.05^2}=43.2(\text{N}),\quad \text{背向 } Q_1$$

$$F_2=k\frac{Q_2Q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(4\times10^{-6})(2\times10^{-6})}{0.052}=28.8\ (\text{N}),\quad \text{指向 } Q_1$$

$$F=F_1-F_2=14.4\text{N},\quad \text{背向 } Q_1$$

25.13 如图 25-1 所示,三个带电量为 +20 μC 的电荷两两相距 2 m 放在同一直线上,求最右端电荷受到的力.

解 ☞ $F=F_1+F_2$, $F_1=\dfrac{kQ_1Q_3}{r^2}=\dfrac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})^2}{4^2}=0.225$ (N)

$$F_2=\frac{kQ_2Q_3}{r^2}=\frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})^2}{2^2}=0.9\ (\text{N}),$$

$$F=F_1+F_2=1.125\ (\text{N}),\text{向右}$$

25.14 在 x 轴上依次排放着三个点电荷:+2 μC 在 $x=0$ 处,−3 μC 在 $x=40$ cm 处,−5 μC 在 $x=120$ cm 处.求作用在 −3 μC 电荷上的力.

解 ☞ 图 25-2 是三个电荷的排放示意图:$q_1=2$ μC, $q_2=-3$ μC, $q_3=-5$ μC.作用在 q_2 上的力是两个力的矢量和,q_1 对 q_2 的引力(指向 q_1)以及 q_3 对 q_2 的斥力(也指向 q_1).它们都在同一条直线上,利用代数知识,两力之和为

$$F = F_1 + F_2 = \frac{-k\mid q_1q_2}{(0.40)^2} + \frac{-k\mid q_3q_2}{(0.80)^2}$$
$$= -9\times10^9\left[\frac{(2\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{(0.40)^2} + \frac{(5\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{(0.80)^2}\right]$$
$= -0.55$ (N)，大小为 0.55 N，方向向左.

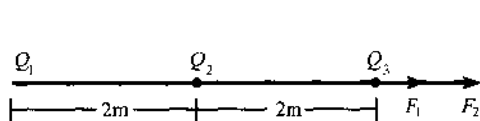


图 25-1

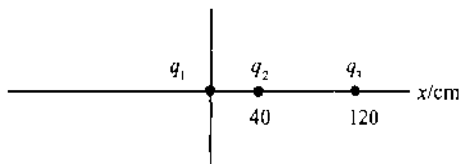


图 25-2

25.15　在 25.14 题中求作用在 $-5\ \mu$C 电荷上的力.

解　☞ q_3 受到 q_1 向左的引力和 q_2 向右的斥力

$$F = F_1 + F_2 = k\left[\frac{-\mid q_1q_3\mid}{(1.20m)^2} + \frac{\mid q_2q_3\mid}{(0.80m)^2}\right]$$
$$= 9\times10^9\left[-\frac{(2\times10^{-6})(5\times10^{-6})}{1.20^2} + \frac{(3\times10^{-6})(5\times10^{-6})}{0.80^2}\right]$$
$= 0.15$ (N)，大小为 0.15 N，方向向右.

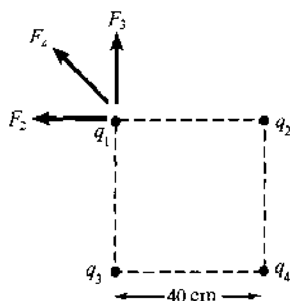


图 25-3

25.16　四个电荷带电量均为 $+3\ \mu$C，放置在边长为 40 cm 的正方形的四角. 求作用在某一电荷上的力.

解　☞ 如图 25-3 所示，计算作用在 q_1 上的力，在图中 F_2、F_3、F_4，分别代表 q_2、q_3、q_4 对 q_1 的作用力. 由对称性知 $F_2 = F_3 = [(9\times10^9)(3\times10^{-6})^2]/0.40^2$，$F_2 = F_3 = 0.51$ N. 如图所示，这两力沿着正方形两条边的方向，矢量和沿着 q_4 到 q_1 的对角线方向，且大小为 $F_2\cos45° + F_3\cos45° = [2(0.51)]/\sqrt{2} = 0.72$ (N). 另一力 F_4 也沿着对角线的方向，$F_4 = [(9\times10^9)(3\times10^{-6})^2]/(0.40\sqrt{2})^2 = 0.25$(N). 最终三力的合力方向沿着对角线方向向外，大小为 0.97 N.

25.17　四个带电量大小约为 $3\ \mu$C 的点电荷放置在边长为 40 cm 的正方形的四个角上. 有一对角线上的两电荷带正电，另一对角线上的两电荷带负电. 求带负电的电荷上受到的作用力.

解　☞ 该题(如图 25-4 所示)与 25.16 题类似，只是 $q_1 = q_4 = -3\ \mu$C. 我们仍计算 q_1 受到的力. F_2 和 F_3 与 25.16 题中的力大小相等，但方向相反，如图所示，F_2 和 F_3 的矢量和为 0.72 N，且沿对角线指向内侧. F_4 与上题一样仍为 0.25 N，现三力之和为 0.72 N − 0.25 N = 0.47 N，方向沿对角线向内(指向 q_4).

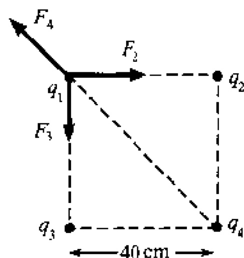


图 25-4

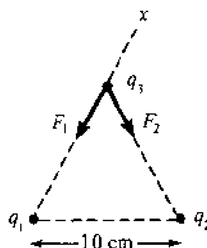


图 25-5

25.18　带电量分别为 $+2\ \mu$C、$+3\ \mu$C、$-8\ \mu$C 的三个电荷被放置在边长为 10 cm 的三角形的

三个角上.计算另两个电荷对带电量为 $-8\ \mu C$ 的电荷的作用力大小.

解 ☞ 该题如图 25-5 所示，$q_1=2\ \mu C$，$q_2=3\ \mu C$，$q_3=-8\ \mu C$. 为明确起见，设从 q_1 指向 q_3 的方向为 x 轴方向，最终作用在 q_3 上的力是 F_1 和 F_2 的矢量和. F_1、F_2 分别是 q_1、q_2 对 q_3 的作用力，如图所示它们都是引力，大小分别是 $F_1=[(9\times10^9)(2\times10^{-6}C)(8\times10^{-6}C)]/(0.10\ m)^2=14.4\ N$，$F_2=[(9\times10^9)(3\times10^{-6})(8\times10^{-6})]/(0.10)^2=21.6\ (N)$. 由 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，$F_x=F_{1x}+F_{2x}=-14.4-21.6\cos60^\circ=-25.2\ (N)$. $F_y=F_{1y}+F_{2y}=0+21.6\sin60^\circ=18.7\ (N)$. $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{(25.2)^2+(18.7)^2}=31.4\ (N)$.

25.19 根据图 25-6，求另两个电荷对带电量为 $+4\ \mu C$ 的电荷的作用力.

解 ☞ 在图 25-6 中标出电荷产生电场力的大小，由图可知斜边 $=5/(\sin30^\circ)=10$ cm，底为 8.66 cm. 则 $\boldsymbol{F}_3=\{-(9\times10^9)[(3\times4\times10^{-12})/0.087^2]\}\boldsymbol{i}=(-14.3)\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{F}_2=(9\times10^9)[(2\times4\times10^{-12})/0.10^2]=7.2$，沿 -30° 方向. $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_2=(-14.3+7.2\cos30^\circ)\boldsymbol{i}-(7.2\sin30^\circ)\boldsymbol{j}=-8.1\boldsymbol{i}-3.6\boldsymbol{j}$ (N)，即大小为 8.9 N，沿 204°方向.

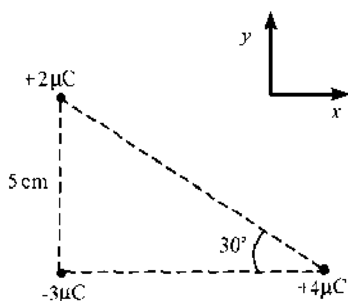


图 25-6

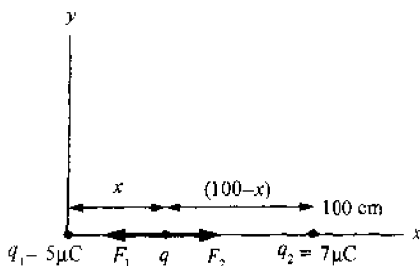


图 25-7

25.20 在 $x=0$ 处放置一电荷，带电量为 $+5\ \mu C$，在 $x=100$ cm 处也放置一电荷，带电量为 $+7\ \mu C$. 则在何处放置第三个电荷，可使之受到的合力为零?

解 ☞ 设有一检验电荷 q 放在 x 处，如图 25-7 所示. 如果 q 带负电，则 q_1、q_2 就对其产生方向相反的引力；如果 q 带正电，q_1、q_2 就对其产生方向相反的斥力. 在任一情况下 q 受到的力 $F_1=F_2$，即 $(kqq_1)/x^2=(kqq_2)/(1.0-x)^2$，其中距离的单位为 m. 消去 k 和 q，有 $q_1/x^2=q_2/(1.0-x)^2$.（与预料中一样，结果与 q 无关）. 将数据代入上式化简为 $5(1-x)^2=7x^2$，即 $2x^2+10x-5=0$. 解得 $x=(-10\pm\sqrt{100+40})m/4=\{0.46\ m,\ -5.46\ m\}$. 因为 q 必须位于 q_1 与 q_2 之间，故结果为 46 cm.（在 $x=-5.46$ m 处，两力的大小、方向均相同.）

25.21 讨论题 25.20 中平衡的实质.

解 ☞ 如果 q 带正电荷，当其在 $x=46$ cm 沿 x 轴发生微小偏移，就会由于受到回复力恢复到平衡位置. 但当 q 在平行于 y 方向有一偏移，就会产生一个力使 q 加速离开平衡位置. 如果 q 带负电荷就会有如下相反的结果：在 x 轴上发生偏移时就不会受到回复力. 在这两种情况下，平衡均不稳定.（这说明了这样一个定理：静电场中的稳定平衡不存在.）

25.22 两个大小相同的小金属球分别带电 $+3$ nC 和 -12 nC，它们相距 3 cm.(a)计算两者的引力，(b)当把两球接触后并分开 30 cm，再次计算两者间的作用力.

解 ☞ (a)开始时两带电小球间的引力大小为 $F=[(9\times10^9)(3\times10^{-9})(12\times10^{-9})]/0.03^2=3.6\times10^{-4}(N)$. (b)因为两金属球大小相同，当两球接触，电荷就会重新形成一个新的平衡分布，使两球的带电量相同. 因为总电荷为 -9 nC，故每球的带电量为 -4.5 nC. 当两球相距 3 cm，两者之间形成斥力，力的大小 $F=[(9\times10^9)(4.5\times10^{-9})(4.5\times10^{-9})]/0.03^2=2.0\times10^{-4}(N)$.

25.23 如图 25-8 所示，两球的质量均为 0.20 g. 当用 50 cm 长的绳子系住小球，小球与竖直方向成 37°角. 如果两球带电量相同，则每球的电量为多少?

解 ☞ 因为系统处于静止，我们可以研究左边小球的平衡条件. 标出作用在小球上的三个力：重

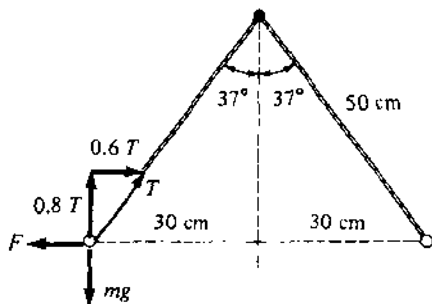


图 25-8

力 mg，绳的拉力 T 以及另一球对它的斥力 F. 根据平衡条件：$\sum F_x=0$，则 $F-0.6T=0$ 和 $\sum F_y=0$，即 $0.8T-(0.2\times10^{-3}\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)=0$，得 $T=2.45\times10^{-3}\text{N}$. 则 $F=1.47\times10^{-3}\text{N}$，这个力是根据库仑定律得到的. 代入库仑定律：$1.47\times10^{-3}=(9\times10^9)\dfrac{q^2}{0.60^2}$，把所有单位化成国际单位制，得到 $q\approx2.4\times10^{-7}\text{C}=0.24\mu\text{C}$.

25.24 在玻尔模型中取氢原子的半径为 $r=5.29\times10^{-11}\text{m}$，试求作用在电子上力的大小，它的向心加速度及轨道速度.

解 ☞ 由库仑定律：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2}=(8.99\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.60\times10^{-19}\text{C})^2}{(5.29\times10^{-11}\text{m})^2}=82.3\text{ nN}.$$

$$a=\frac{F}{m}=\frac{82.3\times10^{-9}\text{N}}{9.11\times10^{-31}\text{kg}}=9.03\times10^{22}\text{m/s}^2$$

轨道速度由向心加速度得出 $a=v^2/r$，则 $v=(ar)^{\frac{1}{2}}=(9.03\times10^{22}\text{m/s}^2\times5.29\times10^{-11}\text{m})^{\frac{1}{2}}=2.19\times10^6\text{m/s}$. 因为此时轨道速度小于光速的百分之一，故可用牛顿第二定律的非相对论形式 $a=F/m$.

25.25 两个相距为 b 的正点电荷，电量之和为 Q，则带电量分别为多少时两者之间库仑力最大?

解 ☞ 设两电荷电量分别为 q_1、q_2，则 $F\propto q_1q_2$. 由于 $0\leqslant(q_1-q_2)^2=q_1^2+q_2^2-2q_1q_2$，两边同时加上 $4q_1q_2$，有 $4q_1q_2\leqslant(q_1+q_2)^2$，则 $q_1q_2\leqslant(Q/2)^2$，这说明当 $q_1=q_2=Q/2$ 时力最大.

25.2 电场；电荷的连续分布；电场中带电粒子的运动

25.26 一带电量为 $+6\ \mu\text{C}$ 的电荷，在空间某点受到沿 x 正方向的力 2 mN. (a)放入该电荷之前该点的电场强度为多少? (b)移去 $+6\mu\text{C}$ 的电荷而放入 $-2\mu\text{C}$ 的电荷，求此时该电荷受到的力.

解 ☞ 假定产生电场的电荷稳定，不受外界电荷的影响. (a)由 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$，得出 $\boldsymbol{E}$ 也沿 x 正方向，大小为 $E=\dfrac{F}{q}=(2\times10^{-3}\text{N})/(6\times10^{-6}C)=333\text{N/C}$. (b) $\boldsymbol{F}'=q'\boldsymbol{E}$，因 q' 带负电，F' 沿着 x 轴负方向，大小为 $F'=(2\times10^{-6}\text{C})(333\text{N/C})=0.67\text{mN}$.

25.27 计算带电量为 2 nc 的电荷在距其 0.1 m 处产生的电场.

解 ☞ 电场强度的大小为 $E=\dfrac{kq}{r^2}=\dfrac{(9\times10^9)(2\times10^{-9})}{0.1^2}=1800(\text{N/C})$.

25.28 一点电荷带电量为 $-30\ \mu\text{C}$，放在坐标系的原点. 求 x 轴上 $x=5$ m 处的电场强度.

解 ☞ 对于点电荷 $\boldsymbol{E}=(kq\hat{\boldsymbol{r}})/r^2$，把 $q=-3\times10^{-5}\text{C}$ 的电荷放在原点，沿 x 轴在 $x=5$ m 处，$\hat{\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{x}}$. 则 $\boldsymbol{E}=\{(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)[(-3\times10^{-5}\text{c})/(5\text{m})^2]\}\hat{\boldsymbol{x}}=(10.8\text{kN/C})(-\hat{\boldsymbol{x}})$

25.29 一带电量为 5.0 μC 的点电荷放置在 $x=20$ cm，$y=30$ cm 处. 求它们产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$(a)在原点处，(b)在 $x=1.0\text{m}$，$y=1.0\text{m}$ 处.

解 ☞ 如图 25-9(a)所示，$r_a=0.36$，$\theta_a=\arctan1.5=56.3°$，因此，$E=[(9\times10^9)(5\times10^{-6})]/r_a^2$ 方向沿 $(180°+56.3°)$，即 0.346MN/C 方向沿 236.3°. 如图 25-9(b)所示，$r_b=1.06\text{m}$，$\theta_b=\arctan(0.70/0.80)$；因此 $E=40\text{KN/C}$，方向沿 41.2°.

25.30 一带电量为 $-3\ \mu\text{C}$ 的点电荷放在点 $(0,2)$m 处，另一带电量为 $+2\ \mu\text{C}$ 的电荷放在点 $(2,0)$m 处，(a)求原点处的电场强度，(b)一质子在原点处所受的电场力有多大?

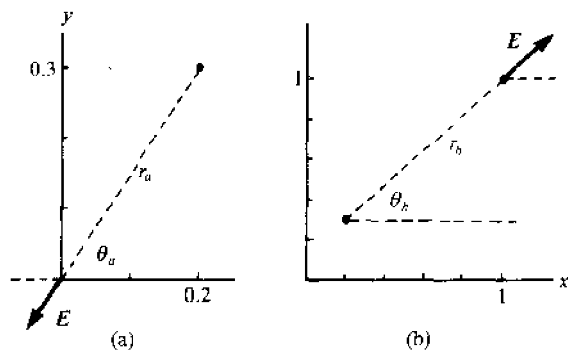


图 25-9

解 ☞ (a)带电量 $-3\ \mu C$ 的电荷产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_3=\{[(9\times10^9)(3\times10^{-6})]/4\}\boldsymbol{j}=6.75\boldsymbol{j}$kN/C, 带电量 $2\ \mu C$ 的电荷产生的电场强度 $\boldsymbol{E}_2=\{-(9\times10^9)(2\times10^{-6})]/4\}\boldsymbol{i}=-4.5\boldsymbol{i}$kN/C.所以 $\boldsymbol{E}=-4.5\boldsymbol{i}+6.75\boldsymbol{j}=8.1$(kN/C), $\theta=124°$. (b) $\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}=(1.6\times10^{-19})(8.1\times10^3)=1.30\times10^{-15}$(N), $\theta=124°$.

25.31 求在图 25-10(a)中的电荷在 P 点产生的电场.

解 ☞ 这些电荷产生的电场遵从叠加规律.每个电荷产生的电场如图中所示,对每个电荷运用 $E=(kq)/r^2$,得到 $E_2=72$kN/C, $E_8=288$kN/C, $E_{12}=432$kN/C 因此求出 P 点的电场 $E_x=-360$kN/C, $E_y=288$kN/C[见图 25-10(b)].由此可得 $E=461$kN/C, $\theta=141°$.

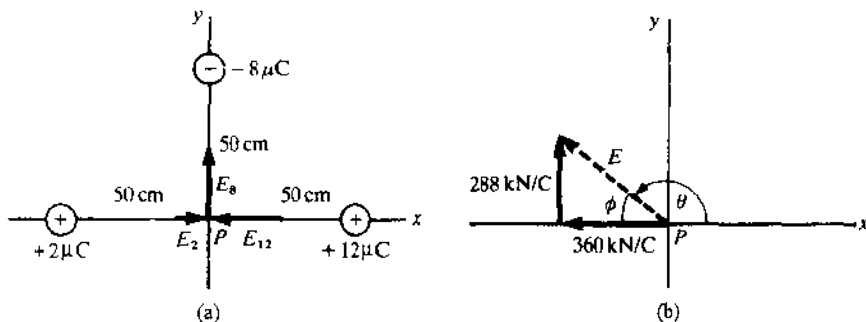


图 25-10

25.32 四个带电量均相等(4 μC)的电荷放在一正方形的四个角,正方形边长为 20 cm(如图 25-11 所示),求正方形中心的电场强度.设所有电荷均带正电.

解 ☞ $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4$,其中 $\boldsymbol{E}_i=(kq_i\hat{\boldsymbol{r}}_i)/r_i^2$, $i=1,2,3,4$. ($r_i=10\sqrt{2}$cm, $i=1、2、3、4$), $q_1=q_2=q_3=q_4=4\mu C$,且在中心处 $\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{E}_4$, $\boldsymbol{E}_2=-\boldsymbol{E}_3$,故 $\boldsymbol{E}=0$.

25.33 若 25.32 题中电荷沿正方形的周长两两异号,再次求中心处的电场强度.

解 ☞ $q_1=q_4=4\ \mu C$, $q_2=q_3=-4\ \mu C$,则中心位置处仍有 $\boldsymbol{E}_1=-\boldsymbol{E}_4$, $\boldsymbol{E}_2=-\boldsymbol{E}_3$,因此 $\boldsymbol{E}=0$.

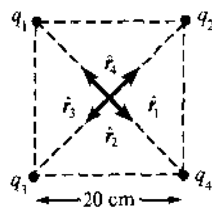


图 25-11

25.34 若 25.32 题中的电荷符号依次为 $+4\mu C$, $+4\mu C$, $-4\mu C$, $-4\mu C$,求中心位置处的电场 E.

解 ☞ $q_1=q_2=4\mu C$, $q_3=q_4=-4\mu C$,则 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_4$,大小相同均沿着 $\hat{\boldsymbol{r}}_1$.同理 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_3$,沿着 $\hat{\boldsymbol{r}}_2$ 方向.由 $E_i=(k|q_i|)/r_i^2$ 求电场强度的大小,得 $E_1=E_2=E_3=E_4=[(9\times10^9)(4\times10^{-6})]/(0.1\times\sqrt{2})^2=1.80$(MN/C).故 $\boldsymbol{E}=(3.60\text{MN/C})\hat{\boldsymbol{r}}_1+(3.60\text{MN/C})\hat{\boldsymbol{r}}_2$.由图

表可知,中心电场强度大小为(3.60)cos45° + (3.60)cos45° = 5.1MN/C,方向竖直向下.

25.35 如图 25-12 所示,在正方形的三个角上放置三个电荷,求在 A 点的电场强度(大小、方向).

解 ☞ 画出三个电荷在 A 点产生的电场的矢量图.即可求出矢量和 E_t.

$$E = \frac{kQ}{r^2} = \frac{(9\times10^9)(4\times10^{-6})}{0.20^2} = 0.9(\text{MN/C})$$

$$E^+ = \sqrt{2}E = 1.27\text{MN/C}, E^- = \frac{(9\times10^9)(-4\times10^{-6})}{0.283^2} = -0.45(\text{MN/C})$$

$E_t = E^+ + E^- = 0.82$MN/C,方向背离负电荷.

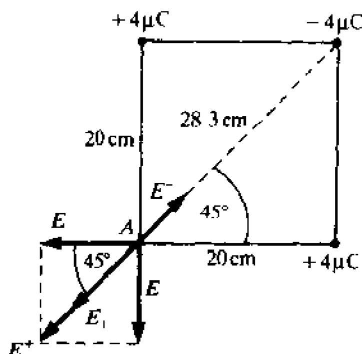


图 25-12

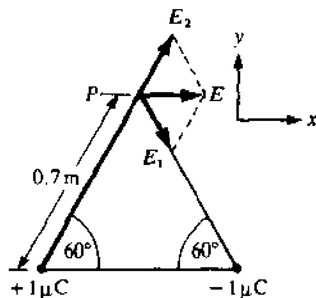


图 25-13

25.36 带电量分别为 $+1\mu$C 与 -1μC 的两个电荷放置在等边三角形底边的两个角上,边长为 0.7 m,求三角形顶点处的电场强度.

解 ☞ 在图 25-13 中作出矢量图,建立电场强度的方程.由 $E = \left|\frac{kq}{r^2}\right|$ 得

$$E_1 = \left|\frac{(9\times10^9)(-10^{-6})}{0.7^2}\right| = +18.4(\text{kN/C})$$

$$E_2 = \left|\frac{(9\times10^9)(-10^{-6})}{0.7^2}\right| = 18.4(\text{kN/C})$$

$$E_x = E_1\cos60° + E_2\cos60°, \quad E_y = E_1\sin60° - E_2\sin60° = 0$$

$E_x = (18.4)(0.5) + (18.4)(0.5) = 18.4$(kN/C),方向向右.

25.37 (a)三个点电荷分别放置在等腰三角形的顶点,如图 25-14 所示.求三角形底边中点 P 的电场强度 $\mathscr{E}$.(b)若将一点电荷 $q = -4.00\mu$C 放到 P 点,求作用在此电荷上的作用力.

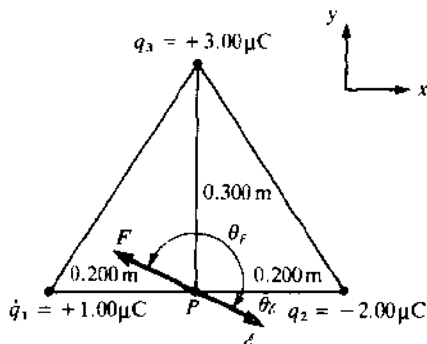


图 25-14

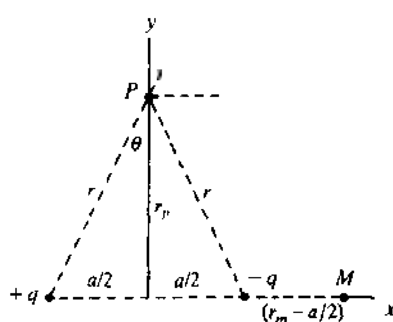


图 25-15

解 ☞ (a)以矢量形式 $\mathscr{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3\right)$,由图 25-14 可知:$r_1 = (0.200\text{ m})\hat{x}$, $r_2 = (0.200\text{m})(-\hat{x})$, $r_3 = (0.300\text{m})(-\hat{y})$,则

$\mathscr{E}=(8.99\times10^9\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\left[\frac{1.00\times10^{-6}\mathrm{c}}{(0.200\mathrm{m})^2}(+\hat{x})+\frac{-2.00\times10^{-6}\mathrm{c}}{(0.200\mathrm{m})^2}(-\hat{x})-\frac{3.00\times10^{-6}\mathrm{c}}{(0.300\mathrm{m})^2}\hat{y}\right]$

$=(8.99\times10^9)(75\hat{x}-33.3\hat{y})\mu\mathrm{N/C}=0.74\mathrm{MN/C},\theta_{\mathscr{E}}=-23.9°$

(b) $F=|q|\mathscr{E}=(4.00\times10^{-6}\mathrm{c})(0.74\times10^6\mathrm{N/C})=2.96\mathrm{N}$

因为 q 带负电,故 F 的方向与$\mathscr{E}$的方向相反.

25.38 如图 25-15 所示,电偶极子由带等量异号的两电荷(电量大小为 q)组成,两电荷间距为 a.(a)证明:若 $r_P\gg a$,则 P 点的电场为$[(1/(4\pi\varepsilon_0)](qa)/r_p^3\boldsymbol{i}$;(b)证明:若 $r_m\gg a$,则 M 点的电场为 $-[(1/2\pi\varepsilon_0)(qa/r_m^3)]\boldsymbol{i}$.

证 ☞ (a)在 P 点,电场垂直方向的分量抵消,只剩下 x 方向的分量;$E_p=[(2q)/(4\pi\varepsilon_0r^2)]\sin\theta$,替换 $\sin\theta$ 和 r^2, $E_p=\left[2q\left(\frac{a}{2}\right)\right]\Big/\left\{4\pi\varepsilon_0\left[r_p^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}\right\}$. 如果 $r_p\gg\frac{a}{2}$,则 $a/2$ 可以略去,即得所证结果.(b)由于点 M 距离 $-q$ 电荷更近,得到 E_m 沿 $-x$ 方向. $E_m=[q/(4\pi\varepsilon_0)]\left[1/\left(r_m-\frac{a}{2}\right)^2-1/\left(r_m+\frac{a}{2}\right)^2\right]=[q/(4\pi\varepsilon_0r_m^2)]\left[1/\left(1-\frac{a}{2r_m}\right)^2-1/\left(1+\frac{a}{2r_m}\right)^2\right]$若 $r_m\gg\frac{a}{2}$,则$(1-a/2r_m)^{-2}\approx1+a/r_m$,$(1+a/2r_m)^{-2}\approx1-a/r_m$,代入上式即得所证结果.

25.39[c] 计算如图 25-16 中带均匀电荷的半圆弧在 P 点产生的电场.

解 ☞ 设电荷线密度为 λ,圆弧的半径为 a. 把弧分成若干小段,每段长为 Δs_i,则每段含有的点电荷为 $\lambda\Delta s_i$,对应产生的电场根据库仑定律有:$\Delta E_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\Delta s_i}{a^2}$,弧上的每一小段将会在不同方向产生 $\Delta\boldsymbol{E}_i$,必须对所有 ΔE_i 求和才能确定 P 点的场强.

首先,可以确定 P 点 E_x 为零,这是因为在图 25-16 中的 ΔE_{ix} 可被弧左侧对应的部分消去.因此,计算 E 只需求出 P 点的 E_y. 由 $-\Delta E_{iy}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon a^2}\Delta s_i\cos\theta$,负号表示沿 y 轴负方向.

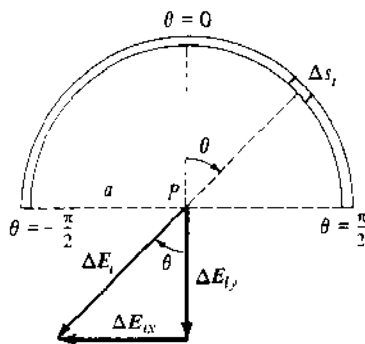


图 25-16

若对整个弧求和,用积分代替求和,就有 $-E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0a}\int\cos\theta\mathrm{d}s$ 式中两个变量 θ 和 s 可以利用角与弧长的关系 $\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\theta$,使变量为 θ,则

$$-E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0a}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0a}.$$

25.40 若题 25.39 中电荷的分布密度 λ 是一个变量 $\lambda=\lambda_0\sin\theta$, θ 即为图 25-16 所示,求 P 点的电场.

解 ☞ 由于电荷的分布关于 y 轴反对称,P 点电场 $E_y=0$. 对于 x 方向的某一小段

$$-\Delta E_{ix}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0a^2}\Delta s_i\sin\theta,\ -E_x=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0a^2}a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0a}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0a}$$

25.41 一根细长杆弯成一半径为 b 的圆,电荷均匀分布其上.求圆心处的电场.

解 ☞ 由对称性知中心电场强度为 0.

25.42[c] 一根杆位于 x 轴上,一端位于原点,另一端在 x 轴上无穷远处.杆上电荷分布为 λC/m,根据库仑定律求 x 轴上 $x=-a$ 处的电场.

解 ☞ 由该点的位置 $\boldsymbol{E}=E(-\boldsymbol{i})$,其中

$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{a+x}\right]_0^{\infty}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0a}$$

25.43[c] 由题 25.42 中所给条件，求 y 轴上 $y=b$ 处的 E_x 和 E_y.

解 ☞ 由图 25-17 $dE=\lambda dx/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, $dE_y=dE\cos\theta$, $dE_x=dE\sin\theta$, 且 $x=b\tan\theta$, 则 $dx=b\sec^2\theta d\theta$, $r=b/\cos\theta=b\sec\theta$. 则 $dE_y=|\lambda b\sec^2\theta d\theta/(4\pi\varepsilon_0 b^2\sec^2\theta)|\cos\theta$, $E_y=[\lambda/(4\pi\varepsilon_0 b)]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\lambda/(4\pi\varepsilon_0 b)$, 方向向上. 同理 $E_x=[\lambda/(4\pi\varepsilon_0 b)]\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=\lambda/(4\pi\varepsilon_0 b)$, 方向向左. 如果杆在两个方向均可无限伸展，答案应改为 $E_x=0$, $E_y=\lambda/(2\pi\varepsilon_0 b)$.

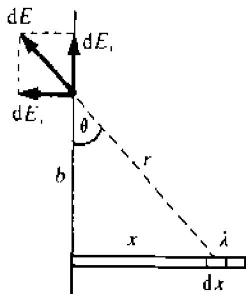


图 25-17

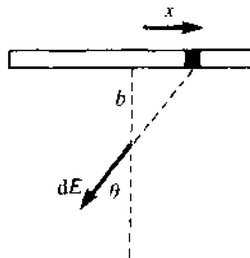


图 25-18

25.44[c] 一长为 L 的杆单位长度所带的均匀电荷为 λ. 求其在垂直平分线上且距杆为 b 处的电场. 证明当 $b/L\ll 1$ 时结果与杆为无限长的情况相同.

解 ☞ 由图 25-18 可知，由对称性 $E_x=0$, 而 $dE_y=[1/(4\pi\varepsilon_0)]\lambda\cos\theta dx/(x^2+b^2)=[\lambda b/(4\pi\varepsilon_0)]dx/(x^2+b^2)^{3/2}$, 从 $-L/2\leqslant x\leqslant L/2$ 积分，得到 $\frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$. 与题 25.43 类似，令 $x=b\tan\theta$, $dx=b\sec^2\theta d\theta$, 则 $b/\cos\theta=(x^2+b^2)^{1/2}$, 则 $E_y=\frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{b\sec^2\theta d\theta}{b^3\sec^3\theta d\theta}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}\sin\theta_0$ 其中 $b\tan\theta_0=L/2$, $\sin\theta_0=[1+4(b/L)^2]^{-\frac{1}{2}}$, 当 $b/L\to 0$, $\sin\theta_0\to 1$, $E_y\to\lambda/(2\pi\varepsilon_0 b)$, 与题 25.43 结果一致.

25.45 计算质子在电场强度为 500 N/C 处的加速度，这加速度是重力加速度的多少倍？

解 ☞ $F=qE=(1.6\times10^{-19}\text{C})(500\text{N/C})=8.0\times10^{-17}\text{N}$. $a=F/m=\frac{8.0\times10^{-17}\text{N}}{1.67\times10^{-27}\text{kg}}=4.8\times10^{10}\text{m/s}^2$, $a/g=(4.8\times10^{10})/9.8=4.9\times10^9$.

25.46 一重 0.6 g 的小球带电量为 8 μC, 被绳子系住放在大小为 30 N/C, 方向向下的电场中. 求当球带(a)正电荷，(b)负电荷时绳子的拉力.

解 ☞ 设球在三个力的作用下保持平衡，绳子的拉力 T, 球受到的向下的重力 $w=mg=5.9\times10^{-3}$N, 还有库仑力 F_c. 若小球带正电荷，库仑力向下，如图 25-19 所示；若小球带负电，库仑力向上. (a) $F_c=qE=(8\times10^{-6}\text{C})(300\text{N/C})=2.4\times10^{-3}\text{N}$, 方向向下. 由 $T-w-F_c=0$ 得 $T=5.9\times10^{-3}\text{N}+2.4\times10^{-3}\text{N}=8.3\times10^{-3}\text{N}$. (b) $F_c=|(-8\times10^{-6}\text{C})|(300\text{N/C})=2.4\times10^{-3}\text{N}$, 方向向上. 由 $T+F_c-w=0$, 得 $T=w-F_c=3.5\times10^{-3}\text{N}$.

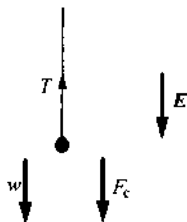


图 25-19

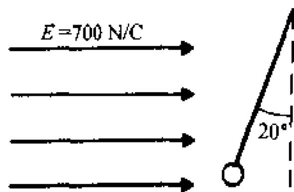


图 25-20

25.47 如图 25-20 所示，重为 0.6 g 的小球被系于绳的末端，放于水平电场强度为700 N/C的电场中，在如图所示位置上静止. 求球上所带电荷的大小及种类.

解 ☞ 球受到的重力 $w=mg=(0.60\times10^{-3}\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)=5.9\text{mN}$, F_t 为电场对电荷 q 的库仑力,方向向左,所以 q 为负电荷.由平衡方程 $T\cos20°=w=5.9\text{mN}$, $T\sin30°=F_t$,解之有 $T=6.3\text{mN}$ 及 $F_t=2.1\text{mN}$.再由 $F_t=|q|E$, $q=(2.1\times10^{-3}\text{N})/(700\text{N/C})=3.1\mu\text{C}$,因此 $q=-3.1\mu\text{C}$.

25.48 一个电子($q=-e$, $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$)以初速度 $3\times10^6\text{m/s}$ 沿 $+x$ 轴方向射出,由于电场力的作用,电子走了 45 cm 后停下,求电场的大小及方向.

解 ☞ 分析得力和加速度方向沿 x 轴负方向.因为若在 y 方向有一分力,则 $t>0$ 时该方向的速度分量不断增加,且永远不会为零.且 x 方向的分量使球的初速度不断减小.对于一维运动,$v_x^2=v_{0x}^2+2a_xx$,已知 $v_{0x}=3\times10^6\text{m/s}$, $v_x=0$, $x=0.45\text{m}$,则 $a_x=-(3\times10^6)^2/(2\times0.45)=-1.0\times10^{13}$ (m/s).产生该加速度的力 $F_x=ma_x=(9.1\times10^{-31}\text{kg})(-1.0\times10^{13}\text{m/s}^2)=-9.1\times10^{-18}\text{N}$. F_x 是电场作用在电子上的电场力,由 $F_x=qE_x$, $E_x=(-9.1\times10^{-18}\text{N})/(-1.6\times10^{-19}\text{C})=57\text{N/C}$.因为 $F_y=0$,所以电场强度 $E=57\text{N/C}$,沿 x 正方向.(重力与电场力相比可以忽略不计.)

25.49 一粒子质量为 m,带电量为 $-e$,以速度 v 水平射入一竖直向下的匀强电场 E.求(a)水平和垂直方向的加速度 a_x、a_y,(b)经时间 t 后,粒子在水平、垂直方向走过的距离,(c)运动的轨道方程.

解 ☞ (a)由于电场方向向下,故没有水平方向的力,$a_x=0$.因为 $F_y=qE_y$,q 带负电,故 F_y 方向向上,$a_y=F_y/m=(eE)/m$,E 为电场的大小,$e=1.6\times10^{-19}\text{C}$.(b)$x=v_{0x}t=vt$(设 $t=0$ 时,$x=y=0$)$y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2=[(eE)/2m]t^2$.(c)消去 t,由 b 中两式得 $y=\frac{1}{2}a_y\left(\frac{x}{v}\right)^2=[(eE)/(2mv^2)]x^2$——与预料的抛物线一致.

25.50 如图 25-21 所示,一电子以 10^6 m/s的速度射入带电的平行板之间,如果两极板间的电场为 $E=1\text{kN/C}$,则电子会打在上板的何处?(设在真空中)

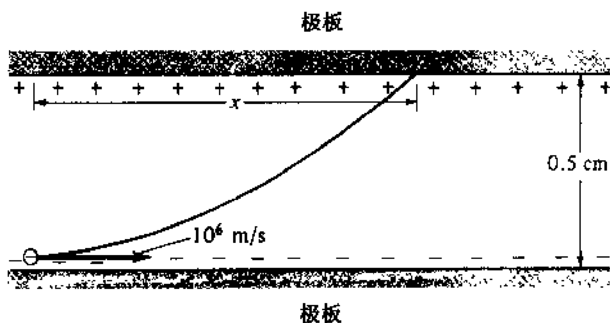


图 25-21

解 ☞ 这是一个抛射体问题,粒子轨迹如图所示.设向上为正方向,利用 $e=1.6\times10^{-9}\text{C}$, $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$, $E=10^3\text{N/C}$,在竖直方向上 $v_{0y}=0$, $a=\frac{eE}{m}=1.76\times10^{14}\text{m/s}^2$, $y=0.5\times10^{-2}\text{m}$ 要求击中板所需的时间运用 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$,求出 $t=7.5\times10^{-9}\text{s}$.在水平方向上 $v_{0x}=v_x=\overline{v}_x=10^6\text{m/s}$, $t=7.5\times10^{-9}\text{s}$,运用 $x=\overline{v}_xt$,得 $x=7.5\times10^{-3}\text{m}=0.75\text{cm}$. x 即为电子击中极板时走过的水平距离.

25.51 一油滴带 6 个电子所带的电量,质量为 $1.6\times10^{-12}\text{g}$,在空气中下落,最终以某一速度匀速运动,则需多大的垂直电场才能使油滴以相同的速度向上运动?

解 ☞ 油滴达到最终速度时受空气的摩擦力等于 $-mg$,要使它以相同的速度向上运动,必须克服向下的重力和空气的摩擦力,就需要一个向上的力大小为 2 mg.每个电子带 $1.60\times10^{-19}\text{C}$ 的负电荷,$F=Eq=2mg$, $E(6\times1.60\times10^{-19})=2(1.6\times10^{-15})(9.8)$, $E=\frac{2\times10^{-15}}{6\times10^{-19}}\times9.8=32.7$ (kN/C).

25.3　电通量和高斯定理

25.52　在坐标纸上作出两个电荷的电场线和等势线，两电荷的电量、位置分别为 $q_1=+1\text{C}, x=0, z=0, q_2=-4\text{C}, x=0, z=5$（单位：cm）

解　☞ 因为两电荷的电场线和等势线关于 z 轴对称，故只需计算出 xz 坐标一侧的部分，结果如图 25-22 所示.

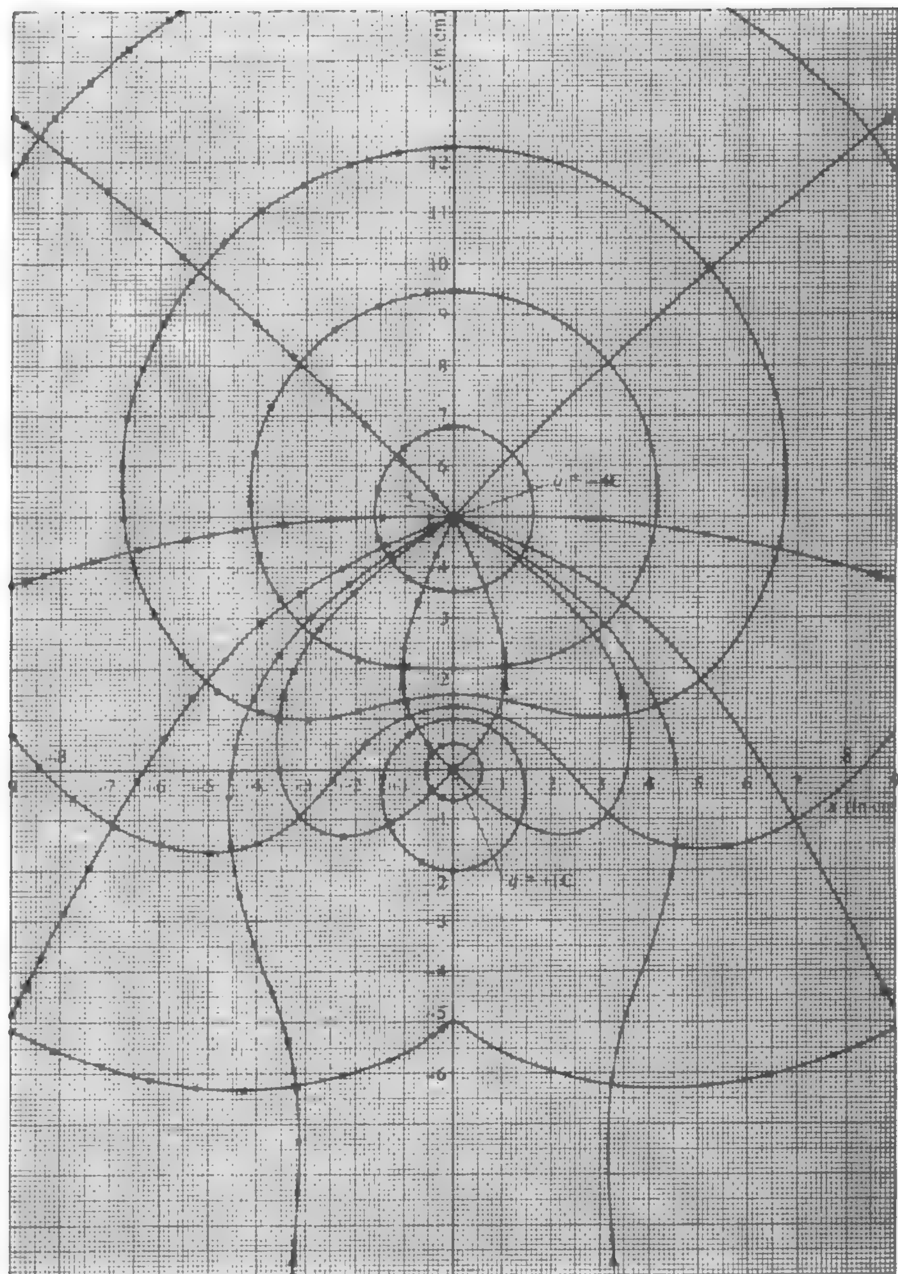


图 25-22

25.53　什么是电通量？它与电场线有何关系？

解　☞ 如图 25-23 所示，Q 为带电体系中所有正负电荷的代数和. 虚线表示完全包含电荷 Q 的闭合面 S，E 为 Q 在 S 面 P 点产生的电场，$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS$ 表示 P 点的矢量面积元. 通过面积元 dS 的电通量为 $d\psi=E_{\perp}dS$，$E_{\perp}$ 是电场强度 E 垂直于面积元 dS 的分量. 写成矢量形式

$$d\phi = \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}(\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) \tag{1}$$

对于电场线(如图 25-23 中带箭头的曲线所示),线上每一点处的电场 $\boldsymbol{E}$ 与该点相切,因电场线根数与 E 的强弱成正比,$d\phi$ 可理解为穿过 dS 的电场线的根数.所以穿过单位垂直面的电场线根数等于空间该点的场强.(这些线可以连续地按规则画出,始于正电荷,终止于负电荷.)

流过面积 S 的电通量可以由对(1)的积分得出

$$\phi = \int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}(\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) \tag{2}$$

因此,流过 S 面的通量为表面上所有 $E_\perp dS$ 的和,也就是穿过 S 面的电场线的总的根数.

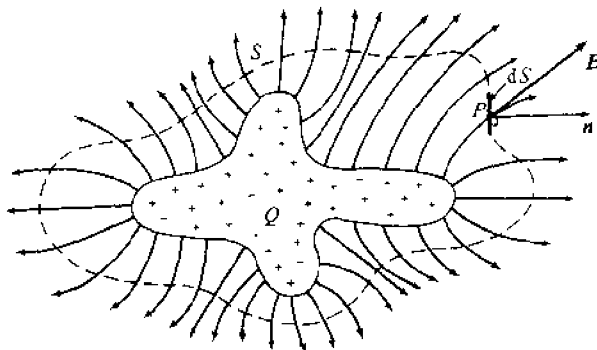


图 25-23

25.54 空间某一区域的电场为 $\boldsymbol{E}=200\boldsymbol{i}$,则通过面积 A 的电通量为多少? A 分别为(a)xy 面,(b)xz 面,(c)yz 面.

解 ☞ 如图 25-24 所示,(a)$\Phi=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}=200A(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})=0$,(b)$\Phi=200A(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})=0$,(c)$\Phi=200A(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})=200A$.

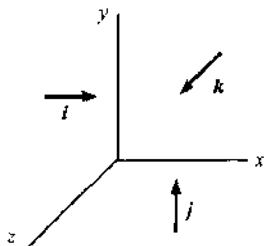


图 25-24

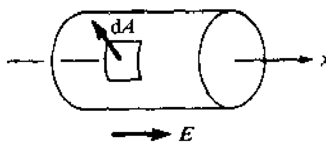


图 25-25

25.55 长为 L 的圆柱体半径为 b,以 x 轴为对称轴.电场为 $\boldsymbol{E}=200\boldsymbol{i}$,求通过(a)圆柱体的左底面,(b)右底面,(c)圆柱体的侧面,(d)圆柱体的全面积的电通量.

解 ☞ 由图 25-25 知(a)$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}=(200\boldsymbol{i})(-\pi b^2\boldsymbol{i})=-200\pi b^2$,(b)$(200\boldsymbol{i})\cdot(\pi b^2\boldsymbol{i})=200\pi b^2$.(c)因为 A 垂直于 $\boldsymbol{i}$,故 $\Phi=0$,(d)a、b、c 之和为 0.

25.56 如图 25-26 所示,均匀电场中放一立方盒子,求从盒子中流出的电通量.

解 ☞ 因为电场线掠过盒子的四个面,通过它们的电通量为 0.通过顶面的电通量 $\Phi_{顶}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}_t=EA_t$,因为 $\cos\theta=\cos 0°=1$.通过底面的电通量 $\Phi_{底}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}_b=EA_b\cos 180°=-EA_b$,负号表示电场线从底面进入,而不是穿出.因为 $A_t=A_b$,流过盒子的总电通量 $\Phi_{总}=EA_t-EA_b=0$.

25.57 用题 25.53 中的电通量表示高斯定理.

解 ☞ 高斯定理表述为:若 S 为一闭合曲面,Q 为该面所包围的所有电荷的电量的代数和,则穿过面 S 的电通量为 Q/ε_0.因此

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

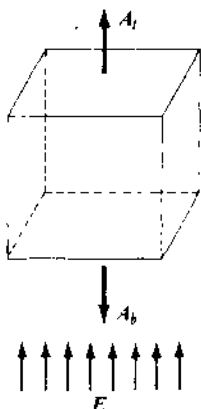


图 25-26

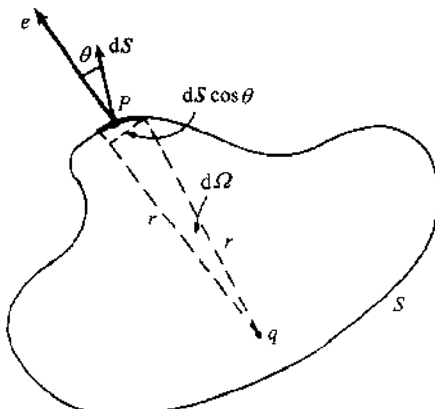


图 25-27

25.58 从库仑定律推出高斯定理.

解 ☞ 通过叠加定理,先考虑任一放在闭合曲面 S 内任意位置的点电荷 q. q 的电场由库仑定律确定 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}$,通过 dS 的电通量 $\mathrm{d}\psi=\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}\cdot\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}S\cos\theta}{r^2}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathrm{d}\Omega$,其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是 dS 在 q 处所张开的元立体角(见图 25-27).整个闭合曲面 S 在 q 处所张的立体角为 4π,则 $\psi=\int_S \mathrm{d}\psi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \mathrm{d}\Omega=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot 4\pi=\frac{q}{\epsilon_0}$,这就是高斯定理.

相反,库仑定律也可由高斯定理导出,(见题 25.59)因此这两个定理是等价的.

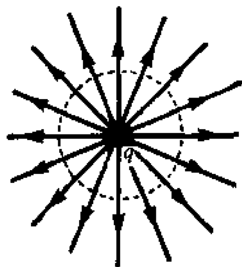


图 25-28

25.59 把高斯定理应用到一恰当的表面,推导库仑定律.

解 ☞ 假定空间一孤立点电荷 q_1,如图 25-28 所示,画出电场线表示电场的球对称性,画出以 q 为中心,r 为半径的高斯球面.因为球面上的场强 E_r 处处大小相等,方向呈放射状指向外,电通量 $\psi=E_rA$,A 为球面的面积,于是得到高斯定理:$\psi=E_rA=4\pi r^2E_r=q/\epsilon_0$. $E_r=[1/(4\pi\epsilon_0)](q/r^2)$,方向呈发散状,这就是库仑定律.

电通量 ψ 不依赖于球面的半径 r.这是因为库仑定律存在 $1/r^2$ 因子,而面积 A 与 r^2 成正比.而且,对于包含 q 的任意形状的表面,ψ 都一样.这是因为穿过闭合曲面的电场线根数都一样(见题 25.53),这些是高斯定理的核心.

25.60 运用高斯定理证明:均分分布于球面的电荷 Q 在球面外产生的电场等效于把一点电荷 Q 放在球心时在球外产生的电场.

证 ☞ 在图 25-29 中,半径为 a 的球,在外部作一同心的半径为 $r>a$ 的高斯球面.由对称性,E 在高斯面上处处大小相等且与面垂直.因此 $\frac{Q}{\epsilon_0}=\psi=E(4\pi r^2)$,得 $E=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,这与放在球心处的点电荷 Q 产生的电场一致.

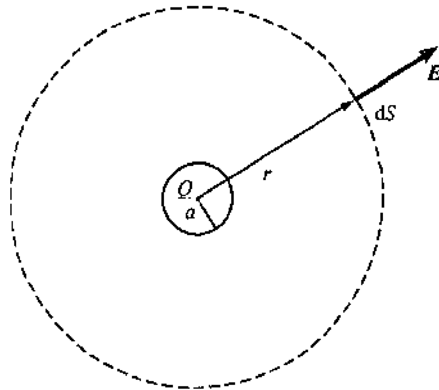


图 25-29

25.61 如图 25-30 所示,一任意形状的金属导体带有一定的电荷.运用高斯定理证明电荷在平衡时必分布于金属导体的表面.

解 ☞ 首先假设在金属体内有一高斯面闭合一部分电荷.如图 25-30 所示,da 为高斯面的单位元.因为导体内无电荷的运动,电荷达到平衡分

布，所以导体内部不产生电场．因为若假设产生电场，导体内就会有电荷的运动，这就与电荷处于静止状态相违背．所以高斯面内每一处 $\mathcal{E}=0$．所以 $\oint \mathcal{E}\cdot d\boldsymbol{a}=\frac{q}{\varepsilon_0}=0$，即 $q=0$，q 为高斯面内总电荷．这一结论在不论取金属体内哪一部分时均成立，故金属体内无电荷．

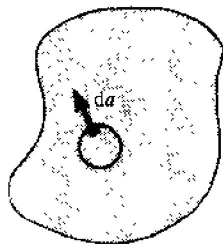


图 25-30

25.62 如图 25-31(a)所示有一金属球壳均匀带电量 Q，求图中 A、B 两点的电场．

解 ☞ 由题 25.60 知 $E_A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A^2}$．要求 B 点的电场，必须先取通过该点的高斯面．为利用球的高斯面，取如图 25-31(b)所示的高斯球．球内无电荷，$\boldsymbol{E}$ 呈辐射状，且 $|\boldsymbol{E}|=E_B$．所以 $\psi=E_B(4\pi r_B^2)=0$，$E_B=0$．

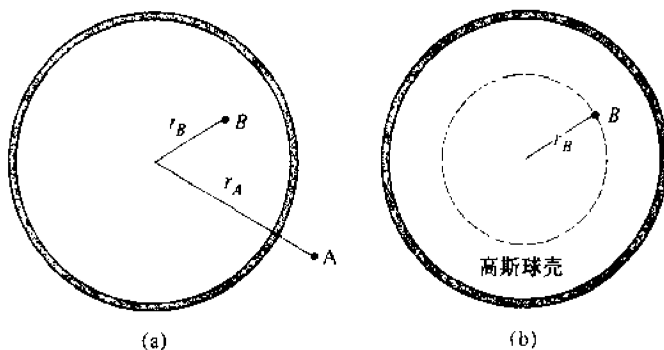


图 25-31

25.63 如图 25-32 所示，一带电量为 $+Q$ 的小球放置在一不带电的金属球腔的中心，运用高斯定理求小球与腔壁之间的点 P_1，金属球壳内的点 P_2 以及大球外点 P_3 的电场 E．

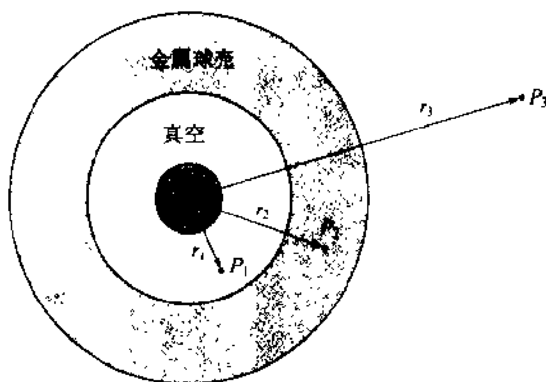


图 25-32

解 ☞ 对于包含电荷 $+Q$、半径为 r_1 的高斯面，$\psi=\frac{Q}{\varepsilon_0}=4\pi r_1^2E_1$，$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$．用同样的方法，分别以 r_2、r_3 为半径作球形高斯面．因为以 r_2 为半径的球面在导体内部，故 $E_2=0$．故高斯面所含的总电量为 0，空心球内壁分布着均匀负电荷，电量为 $-Q$．在以 r_3 为半径的高斯面上，由对称性以及整个空心球壳不带电，得到 $\psi=Q/\varepsilon_0=4\pi r_3^2E_3$，$E_3=Q/(4\pi\varepsilon_0 r_3^2)$．在空心球壳的外壁产生了均匀的正电荷，带电量为 $+Q$，这可以从电荷守恒定律或从 E_3 的结果得出．(由 25.61 题得电荷平衡时导体内部不存在静电荷．)

25.64 如图 25-33 所示的平行板电容器，两极板分别带电 $+Q$ 和 $-Q$．每个极板的面积为 $A=600\text{cm}^2$．极板间的匀强电场 $E=300\text{kV/m}$，而板外的电场为 0(不考虑边缘效应)．求 Q．

解 ☞ 作如图 25-33 所示的高斯面，设 E 与极板内表面垂直，得 $\frac{Q}{\varepsilon_0}=\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=EA$（板外没有电通量，极板间电通量为 EA）则

$$Q=\varepsilon_0 EA=(8.854\times10^{-12})(300\times10^{3})(600\times10^{-4})$$
$$=1.59\times10^{-7}(\mathrm{C})=0.159\ (\mu\mathrm{C})$$

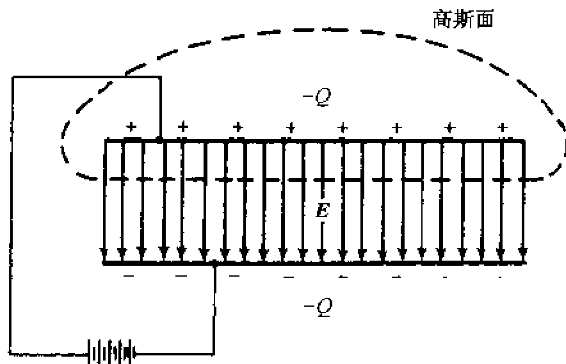


图 25-33

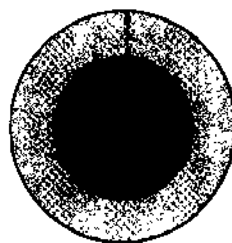


图 25-34

25.65 一半径为 a 的绝缘球均匀带电，电荷密度为 ρ. 求 $r\leqslant a$ 时电荷产生的电场.

解 ☞ 如图 25-34 所示作一半径为 r 的高斯面，应用高斯定理：

$$\psi=\frac{q_{内}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho V_{内}}{\varepsilon_0}$$

而 $V_{内}=\frac{4}{3}\pi r^3$，故 $\psi=\frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0}$. 由球对称性，$E$ 在高斯面处为常数且呈放射状. 上式写成 $\psi=EA=\frac{4\pi r^3\rho}{3\varepsilon_0}$，$A$ 为高斯面的表面积 $4\pi r^2$，代入上式有 $E=\frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$. 电场完全取决于半径 r 内的电荷.

25.66 如图 25-35(a)所示，左侧的金属板带电荷，面密度为 $+\sigma$. 右侧的金属板带电荷面密度为 -2σ. 求中间金属板两侧的电荷面密度. 中间的极板接地，故无需呈电中性. 设极板非常大.

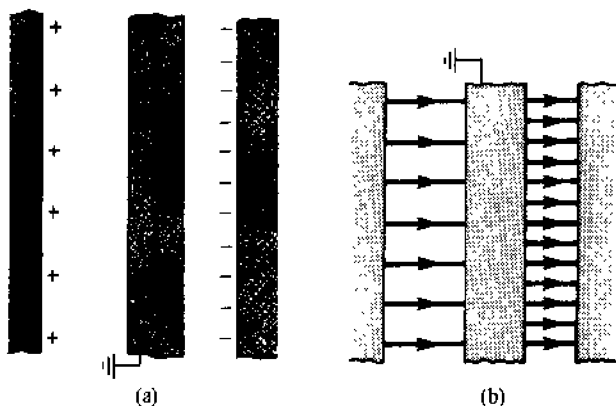


图 25-35

解 ☞ 可通过图 25-35(b)中的电场线来解决这一问题. 从左极板出发的电场线终止于中间极板的左侧面，故电荷面密度为 $-\sigma$. 又因为终止于右侧极板的电场线起始于中间极板的右侧面，这两个面上的电荷密度必大小相等，方向相反. 因此，中间极板的右侧面电荷面密度为 $+2\sigma$.

25.67 一圆柱体电容器由两个同心的圆柱状金属筒组成，如图 25-36 所示. 若内部的圆柱筒带电荷的线密度为 λ，求两圆柱筒间的电场 E. 设两圆柱筒间的距离远小于圆柱筒的

长度.

解 ☞ 因两圆柱体很长,故电场从轴向外发散.要求两圆柱间 P 点的电场,作如图 25-36 所示的圆柱状高斯面.当 $a<r<b$,因两底无电场线流出,故这两部分的电通量和为 0.又因为 E 呈发散状且大小恒定,故 $0+0+E\cdot A_{侧}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$.高斯面内电荷为 λL,侧面积为 $2\pi rL$,所以 $E(2\pi rL)=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda L$ 即 $E=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}$.

25.68 一细长直导线带电荷线密度为 λ_1,这根导线位于一长金属圆柱筒的轴线上,筒带电荷的线密度为 λ_2.内侧半径为 b,外侧半径为 c,求以下三部分的电场:$r<b$,$b<r<c$,$r>c$.圆柱筒内外表面所带电荷的线密度各为多少?

解 ☞ 作长为 L 的圆柱形高斯面,两底无电场线流过.在各种情况下,$2\pi rLE=$(高斯面所含的电荷)$/\varepsilon_0$.对于 $r<b$,封闭电荷为 λL,则 $E=\lambda_1/(2\pi\varepsilon_0 r)$.对于 $b<r<c$,因在金属内部,$E=0$.当 $r>c$,封闭电荷$(\lambda_1+\lambda_2)L$,故 $E=(\lambda_1+\lambda_2)/(2\pi\varepsilon_0 L)$.圆柱内表面所带电荷为 $-\lambda_1$.因 λ_1 产生的电场必须被抵消(由 $b<r<c$ 时的高斯定理得).这使得外表面的电荷线密度为 $\lambda_2-(-\lambda_1)=\lambda_2+\lambda_1$.

25.69 两根长直导线电荷线密度分别为 λ_1、λ_2.两线轴间的距离为 b,求一根导线上的电荷对另一根导线上单位长度作用力的大小.

解 ☞ 线 1 对线 2 产生的电场 $E=\lambda_1/2\pi\varepsilon_0 b$(由 25.68 题得),对线 2 单位长度产生的力为 $E\lambda_2$,故 $F/L=(\lambda_1\lambda_2)/(2\pi\varepsilon_0 b)$.

25.70 一半径为 b 的长圆柱体均匀分布着密度为 ρC/V 的电荷,求体电荷产生的电场(a)圆柱体外,(b)圆柱体内,(c)哪里电场最强?(d)哪里电场最弱?

解 ☞ 利用长为 L 的圆柱形高斯面,电场线从侧面穿出(不从底面穿过),因此 $2\pi rLE=$(闭合电荷)$/\varepsilon_0$.如果 $r>b$,闭合电荷为 $\pi b^2L\rho$,因此 $E=(b^2\rho)/(2\varepsilon_0 r)$.$r<b$,闭合电荷为 $\pi r^2L\rho$,因此 $E=(r\rho)/(2\varepsilon_0)$.从上述结果可知,圆柱体表面上 E 最大,轴上的 E 最小.该题与 25.65 题情况相似.

25.71 一金属块悬于一根丝线上,带正电荷(电荷分布不均匀).在金属块表面上某一点电场强度 $E=600$kV/m,计算该点的电荷面密度.

解 ☞ 运用高斯定理,选择一非常小的高斯面,高斯面有一半在导体表面下(见图 25-37).因为 E 在电荷平衡时与金属表面垂直,从高斯面一面通过的电场线为 $E\Delta A$,通过另两个面的电场线为 0,所以 $E.\Delta A=\frac{\sigma\Delta A}{\varepsilon_0}$ 即 $\sigma=\varepsilon_0 E=(8.854\times10^{-12}\times600\times10^3)=5.313(\mu\text{C/m}^2)$.

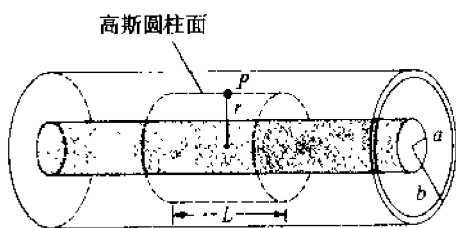


图 25-36

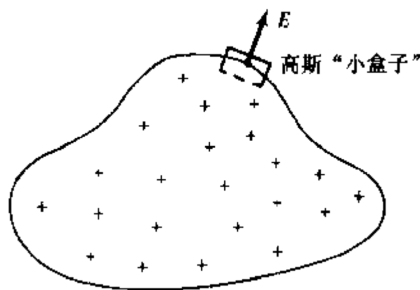


图 25-37

25.72 空气的电场强度约等于 3.0×10^6N/C.这意味着若电场超过这个值,就会产生电火花.则要使一半径为 0.50 cm 的金属球在空气中不产生电火花,最多能带多少电荷?

解 ☞ 在球外,球表面的所有电荷可以看成置于中心,由电荷 Q 得到 $E=[1/(4\pi\varepsilon_0)](Q/r^2)$.由于 $r=5.0\times10^{-3}$m,$E=3.0\times10^6$N/C,得 $Q=8.34$nC.

第二十六章　电势及电容

26.1　点电荷和电荷分布产生的电势

26.1　一带电体系产生的电场中，电荷 q 的电势能是多少？

解　☞ P 点的电势能＝电场力把一物体(此处为电荷 q)从参考点移到 P 点所做功的负值(或克服电场力做的功).势能仅对保守力有意义.库仑力和重力有相同的基本形式,是保守力.但库仑力可以是引力也可以是斥力.如果电场仅由一电荷 q_1 产生,把 $r=\infty$ 处的势能作为参考点,则 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}=[(kqq_1)/r_1^2]\hat{r}_1$($\hat{r}_1$ 从 q_1 指向 q),与重力类比,则电势能 $U=(kqq_1)/r_1$.(若 q、q_1 为异号电荷,F 为引力,U 为负值,这与重力相同).因为合力做的功等于各分力做功的和,则对带电体系 q_1、q_2、$\cdots q_n$ 产生的电场 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}=\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{kqq_i}{r_i^2}\hat{r}_i$,势能 $U=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{kqq_i}{r_i}$.

26.2　(a)空间某点的电势(常称绝对电势)指什么？(b)电势与电场有何关系？

解　☞ (a)取无穷远处为零电势能点,则电势(绝对电势)是单位正电荷的电势能.电势的单位是伏特(V),1V＝1J/C.(b)在26.1题表达式中,定义电势 $V=U/q$.然后通过对电势能的定义,若单位正电荷位置有一微小变化 Δs,则会有电势变化

$$\Delta V=-E_s\Delta s \tag{1}$$

而在平行于各坐标轴的方向上,由(1)有

$$E_x=-\frac{\Delta V}{\Delta x},\quad E_y=-\frac{\Delta V}{\Delta y},\quad E_z=-\frac{\Delta V}{\Delta z} \tag{2}$$

反之由(2)也可导出(1).由(1)可推出单位间的关系为1V/m＝1N/C.

26.3[c]　用积分表示电势能和电势.

解　☞ 稳定电荷分布对检验电荷 q' 的电场力 F 是保守力,所以检验电荷具有电势能 U.以无穷远处为参考点,检验电荷在 $B(x,y,z)$ 处的绝对电势能为

$$U(x,y,z)=-\int_{\infty}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{\infty}^{(x,y,z)}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z\ \text{(J)}$$

沿任意路径积分.

相反,若电势能看成是位置的函数,电场力沿任意方向 $\mathrm{d}s$ 的分量为 $F_s=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}$ 故 $\boldsymbol{F}$ 在X、Y、Z轴上的分量分别写成 $F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$,$F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}$,$F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$.写成矢量形式

$$\boldsymbol{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\text{(N)}$$

若只有电场力 $\boldsymbol{F}$ 作用在点电荷上,由能量守恒有 $\Delta K+\Delta U=0$,其中 K 为点电荷的动能.

单位检验电荷的电势能称为电势 ϕ 或电压V.因为 $\phi=U/q'$,$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}/q'$,$\phi$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间与U和 $\boldsymbol{F}$ 之间有同样的关系:

$$\phi(x,y,z)=-\int_{\infty}^{(x,y,z)}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{\infty}^{(x,y,z)}E_x\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}y+E_z\mathrm{d}z\ \text{(V)}$$

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\text{(V/m)}$$

26.4　什么是空间两点间的电势差？

解　☞ 从 A 点到 B 点的电势差是把单位正电荷从 A 运到 B 克服电场力做的功.因此从 A 到 B 的电势差为 $V_B-V_A\equiv V$.它的单位是电势的单位,焦耳/库仑＝伏特.电势差也常称为电压或"电压降".

因为功是标量,所以电势差也是标量.和功一样,电势差可正可负.

把电荷 q 从 A 移到 B 点,克服电场力做功为 W,$W=q(V_B-B_A)=qV$.

26.5 写出点电荷产生电势的表达式.

解 ☞ 若场源为一位于原点的点电荷 q(如图 26-1),在 $P'(x',y',z')$处的电场为

$$\boldsymbol{E}'=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\boldsymbol{r}'.$$

我们选择积分路径为从无穷远到 $P(x,y,z)$,再到电荷 q.沿着这条路径

$$ds=-dr',\quad E_s=-E'=-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

故

$$\phi=-\int_\infty^P E_s ds=-\int_\infty^P \frac{q dr'}{4\pi\epsilon_0 r'^2}=-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

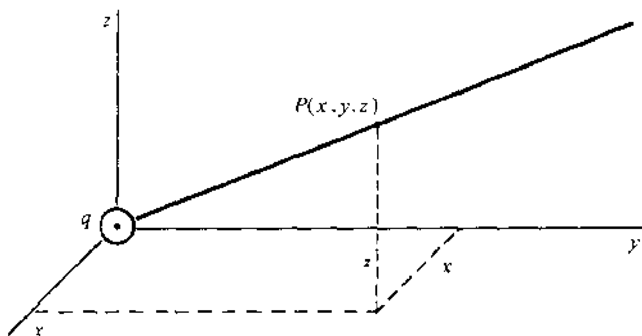


图 26-1

26.6 什么是等势面?

解 ☞ 具有相等电势的平面(二维曲线)叫等势面(线).在笛卡儿坐标中,等势面由方程 $\phi(x,y,z)=c$ 表示,每一个常数 c 代表一个等势面.在等势面上,ϕ、E 间有如下几何关系:电场线与等势线处处垂直.因为当电荷在等势面上作一任意元位移 $d\boldsymbol{s}$,$d\phi=\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=0$;故 $\boldsymbol{E}$ 与 $d\boldsymbol{s}$ 垂直.

处于静电平衡的导体(无移动电荷),其外表面为等势面.(实际上,因为导体内电场为 0,整个导体为等势体).

26.7 定义电子伏特.

解 ☞ 让一个带 $+e$(库仑)的粒子电位升高 1V,电场力对它作的功为 1 电子伏特(eV).所以,1eV $=(1.602\times10^{-19}\text{C})(1\text{V})=1.602\times10^{-19}$J.类似地,功或能量(eV)$=\frac{\text{功(J)}}{e}$.

26.8 如图 26-1 所示,$q=40\mu$C,$x=0.5$ m,$y=0.8$m,$z=0.6$m,求 P 点的电势?

解 ☞ $r=(0.5^2+0.8^2+0.6^2)^{\frac{1}{2}}=1.118$(m).故 $\phi=k\frac{q}{r}=(9\times10^9)\frac{40\times10^{-6}}{1.118}=3.22\times10^5(V)=$ 322(kV).

26.9 在 26.8 题中,若 P 点放一电荷 $q_1=9\mu$C,求它的电势能.

解 ☞ $U=q_1\phi=(9\times10^{-6})(3.22\times10^5)=2.9$(J)

26.10 一点电荷 $q_1=+2\mu$C 置于坐标原点,另一电荷 $q_2=-3\mu$C放在 x 轴上,$x=100$cm,则 x 轴上哪个(哪些)点的绝对电势为 0?

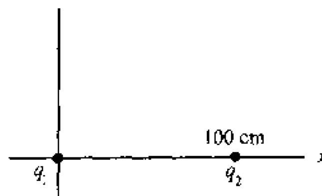


图 26-2

解 ☞ 两电荷位置如图 26-2 所示,x 轴上 x 点处的电势为

$$V(x)=k\left(\frac{q_1}{|x|}+\frac{q_2}{|x-1|}\right)$$

由 $V=0$ 得 $\frac{2}{|x|}-\frac{3}{|x-1|}=0$ 即 $2|x-1|=3|x|$

分三种情况:$x>1$,$0<x<1$,$x<0$ 进行讨论:

当 $x>1$:$2(x-1)=3x\Rightarrow x=-2$(与假设矛盾,舍去)

若 $0<x<1$：$2(1-x)=3x \Rightarrow x=0.4\text{m}$ 或 $x=40\text{cm}$

若 $x<0$：$2(1-x)=-3x \Rightarrow x=-2\text{m}$ 或 $x=-200\text{cm}$

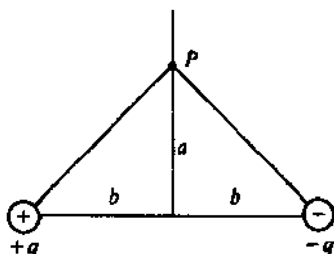


图 26-3

26.11 求空气中与电荷 50nC 距离为 3cm 处的绝对电势.

解 ☞ 空气介电常数为 1.0, 故 $V=[1/(4\pi\varepsilon_0)]\cdot(q/r)=(9\times10^9)(5\times10^{-8})/0.03=15(\text{kV})$.

26.12 证明图 26-3 中 P 点的绝对电势为 0.

证 ☞ $\phi_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$

[电位是标量,可以代数相加;而电场是矢量叠加,前者比后者简单得多.]

26.13 求带电量为 65 nC、半径为 25 cm 的金属球的绝对电势.

解 ☞ 金属球面是等势面,由对称性知电荷均匀分布在表面上.电势与电荷在球心处时一致:

$$V=[(9\times10^9)(65\times10^{-9})]/0.25=+2340\ (\text{V}).$$

26.14 一半径为 10 cm 的空心球带电量为 5 nC,若球绝缘,求距球心 50 cm 处的电势.

解 ☞ 由题 26.13 得 $V=(kQ)/r=[(9\times10^9)(5\times10^{-9})]/0.50=90(\text{V})$.

26.15 两电荷的带电量分别为 $+2\mu\text{C}$、$+5\mu\text{C}$,相距为 6 m,求两电荷中点处的电势.

解 ☞ 由图 26-4 所示:

$$V=\frac{kq_1}{r_1}+\frac{kq_2}{r_2}=\frac{(9\times10^9)(2\times10^{-6})}{3}+\frac{(9\times10^9)(5\times10^{-6})}{3}=21(\text{kV}).$$

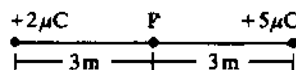


图 26-4

26.16 三个电荷带电量均为 +6nC,且分别置于等边三角形的三个角上,三角形边长为 12 cm(如图 26-5 所示),求三角形底边中点处的电势.

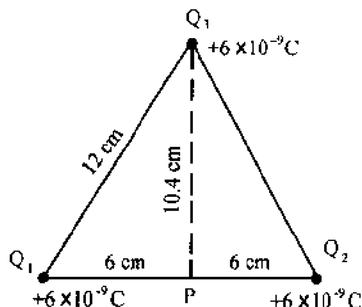


图 26-5

解 ☞ $V_P=(9\times10^9)\times\left(\frac{6\times10^{-9}}{0.06}+\frac{6\times10^{-9}}{0.06}+\frac{6\times10}{0.104}\right)=2320(\text{V})$

26.17 如图 26-6 所示,三个电荷分别位于正方形的三个角上,求 A 点的电势.

解 ☞ $V_A=(9\times10^9)\left(\frac{4\times10^{-9}}{0.20}+\frac{-4\times10^{-9}}{0.283}+\frac{4\times10^{-9}}{0.20}\right)=233(\text{V})$

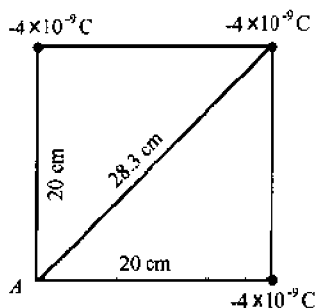


图 26-6

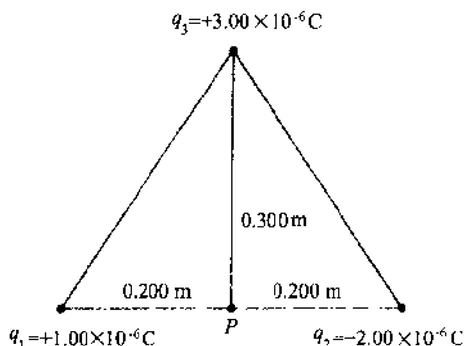


图 26-7

26.18 图 26-7 表示一个三角形上的三个点电荷，求电荷在三角形底边中点 P 上的电势.

解 ☞ $V=(8.99\times10^{9})\left(\frac{1.00\times10^{-6}\text{C}}{0.200\text{m}}+\frac{-2.00\times10^{-6}\text{C}}{0.200\text{m}}+\frac{+3.00\times10^{-6}\text{C}}{0.300\text{m}}\right)=45.0\text{kV}$

26.19 一半径为 30cm 的金属球带正电荷 2μC，求球心、球上以及距球心 1m 处的电势.

解 ☞ 由 26.6 可知球面与球内任一点的电势相等，在球心和球面上 $V=\frac{kQ}{R}=\frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-6})}{0.30}=60(\text{kV})$. 对于球外一点，所有电荷可看成集中在球心处，故距球心 1 m 处的电势为 $V=\frac{kQ}{r}=\frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-6})}{1}=18(\text{kV})$.

26.20 两金属球的半径分别为 a、b 且相距很远，两球用导线相连. 总电量为 Q. (a)两球各带电多少? (b)它们的绝对电势是多少?

解 ☞ (a)因为两球由导线相连，故它们的电势相等. 由题 26.13 $V_a=(kQ_a)/a=V_b=(kQ_b)/b$，又 $Q=Q_a+Q_b$；解这两个方程得 $Q_a=(aQ)/(a+b)$，$Q_b=(bQ)/(a+b)$.

(b)代入 V_a、V_b 求得 $V=V_a=V_b=(kQ)/(a+b)$.

26.21 计算长为 $2a$ 的均匀带电的细长杆产生的电势.

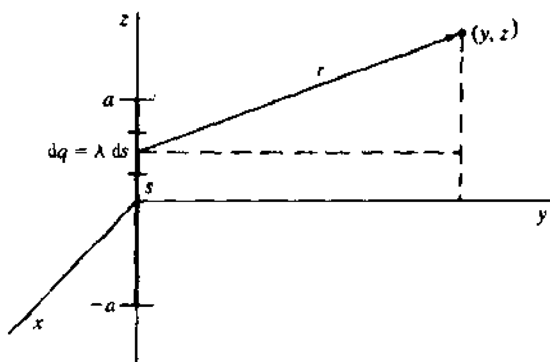


图 26-8

解 ☞ 把杆沿 z 轴放置，如图 26-8 所示. 由轴对称性，只要计算 yz 面内任一点(y,z)的电势. 由电荷元 $dq=\lambda ds$ 产生的电势

$$d\phi=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0[y^2-(z-s)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

故

$$\phi(y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda ds}{[y^2+(z-s)^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{[s^2-2zs+z^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{[y^2+(z-a)^2]^{\frac{1}{2}}-(z-a)}{[y^2+(z+a)^2]^{\frac{1}{2}}-(z+a)}$$

点 $P(x,y,z)$的电势只需用 x^2+y^2 代替上式中的 y^2.

26.22 题 26-21 中，令 $\lambda=q/2a$，证明当 $a\to0$ 即得到位于原点的点电荷 q 产生的电势.

证 ☞ $\phi(y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{1}{[y^2+(z-s)^2]^{\frac{1}{2}}}ds\right\}$

大括号内表示当 $-a<s<a$ 时 $[y^2+(z-s)^2]^{-\frac{1}{2}}$的值. 所以当 $a\to0$，$\{\}\to[y^2+(z-0)^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}$，所以 $\phi(y,z)\to q/(4\pi\varepsilon_0 r)$. (该结果也可从 ϕ 的对数形式得出.)

26.23 如图 26-9 所示，写出在 xy 面内的点$P(x,y)$处的电势 $\phi(x,y)$的表达式.

解 ☞ 因为 $r_1=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，$r_2=[(l-x)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$，

$$\phi(x,y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{q_2}{(x^2+y^2+l^2-2xl)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

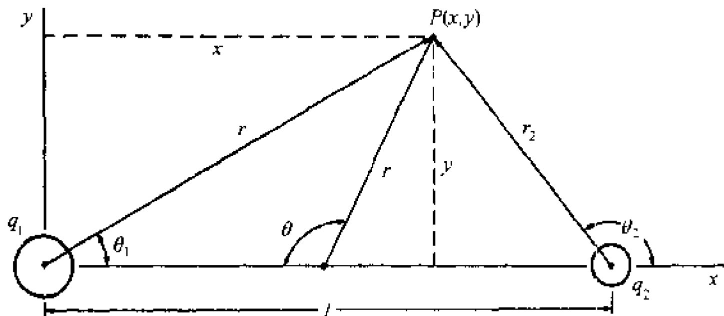


图 26-9

26.24 若在图 26-9 中，$q_1=+|q|$，$q_2=-|q|$，则 q_1、q_2 构成一对电偶极子(电偶极矩 $\mu\equiv|q|l$)，求电偶极子在 P 点的电势．P 与偶极子中点之距 r 远大于 l．

解 ☞ 由余弦定理：$r_1^2=r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl\cos\theta$，$r_2^2=r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+rl\cos\theta$，所以 $r_2^2-r_1^2=2rl\cos\theta$．所以

$$\phi=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1r_2(r_2+r_1)}=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl\cos\theta}{r_1r_2(r_1+r_2)}$$

因为 $r\gg l$，故 $r_1r_2\approx r^2$ 且 $r_1+r_2\approx 2r$，则

$$\phi=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl\cos\theta}{2r^3}=\frac{\mu\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

当 $l\to 0$，$|q|\to\infty$，使得 μ 保持不变，则两个电荷形成电单极子，此时上述近似表达式更加确切．

26.2 电势函数与相关电场

26.25 一圆盘的表面电荷密度为 $\sigma(\mathrm{C/m^2})$，证明盘轴线上任一点的电场仅与 σ 及点对圆盘所张的角 α 有关．

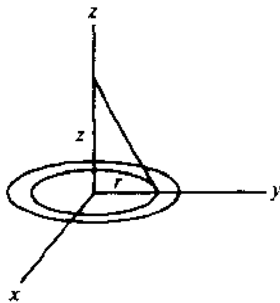


图 26-10

证 ☞ 设半径为 R，以原点为圆心的圆盘在 xy 面上(如图 26-10 所示)．先计算 Z 轴上的电势 $V(z)$，再计算电场．设圆盘由一系列同心圆环组成，每个环产生的电势 $dV=\frac{\sigma 2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{1/2}}$，对其从 $r=0$ 到 $r=R$ 积分，

$$V(z)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(R^2+z^2)^{1/2}-|z|] \tag{1}$$

因为 $|z|/(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\cos(\alpha/2)$，提取 $|z|$，则 $V(z)=\frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\cos(\alpha/2)}-1\right]$ 因为对称性，电场与 z 轴平行，利用(1)式，$\boldsymbol{E}(z)=E_z(z)\boldsymbol{k}$，

$$E_z(z)=-V'(z)=\begin{cases}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right], & z>0\\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1+\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right], & z<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right), & z>0\\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right), & z<0\end{cases}$$

26.26 若题 26.25 中的圆盘上带电量为 q，则当 $R/|z|\to 0$ 时(在 z 轴上无穷远处) z 轴上的电势可看成原点的点电荷产生的．

解 ☞ 由题 26.25 中的(1)式，$V(z)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}-|z|]$，因为 $\sigma=q/(\pi R^2)$，$(R^2+z^2)^{1/2}=|z|(1+R^2/z^2)^{1/2}\approx|z|[1+\frac{1}{2}(R^2/r^2)]$，当 $R/|z|\ll1$，$V(z)=\frac{q|z|}{2\pi\varepsilon_0R^2}\left(\frac{R^2}{2z^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|z|}$.(一般来说，任何有限分布的电荷作用在无穷远处时可以看成是一个点电荷.)

26.27 若空间一点 $P(-2\text{m},4\text{m},6\text{m})$处的电势为 $V=80x^2+60y^2$，求该点电场的三个分量.

解 ☞ $E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-160x=320\ \text{V/m}$，$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-480\text{V/m}$，同理 $E_z=0$.

26.28 电荷的分布形成电场.设 E 是一个二维物理量，x 方向的分量$E_x=A[(x-l)(x^2+y^2+l^2-2xl)^{-3/2}-x(x^2+y^2)^{-3/2}]$，其中 A、l 为常数，求 E_y.

解 ☞ 因 $E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$，$\phi$ 可以从下式得出：

$$\phi(x,y)=-\int_{\infty}^{x}E_x\mathrm{d}x=-A\left[\int_{\infty}^{x}\frac{(x-l)\mathrm{d}x}{[(x-l)^2+y^2]^{3/2}}-\int_{\infty}^{x}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

由 $x\mathrm{d}x=[\mathrm{d}(x^2)]/2$，$(x-1)\mathrm{d}x=[\mathrm{d}(u^2)]/2$，其中 $u=x-l$，于是 $\phi(x,y)=A[(x^2+y^2+l^2-2xl)^{-\frac{1}{2}}-(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}]$，则 $E_y=A[y(x^2+y^2+l^2-2xl)^{-3/2}-y(x^2+y^2)^{-3/2}]$.

26.29 一带电直导线产生的电场 $E=-5000/r\ \text{Vm}^{-1}$，方向为辐射状向内.则导线上带的是什么符号的电荷？若 $r_B=60\text{cm}$，$r_A=30\text{cm}$，求 V_B-V_A，A、B 哪点电势高？

解 ☞ 由电场的方向指向导线知电荷为负.从 A 到 B 方向与电场线方向相反，故 B 点的电势比 A 点高.故

$$V_B-V_A=-\int_{0.3}^{0.6}\frac{-5000}{r}dr=5000\ln^2=3470(\text{V})$$

26.30 一大房间内有一细线悬住直径为 30 cm 的金属球，若球表面的电场等于空气的击穿强度 3MVm^{-1}，球的绝对电势为多大？

解 ☞ 球面外的电场 $E=3\times10^6\text{Vm}^{-1}$，这是由均匀带电球所带的电量 Q 产生的.因 $E=(kQ)/r^2$，表面的电势 $V=(kQ)/r$，故 $V=Er=(3\times10^6)(0.15)=4.5\times10^5(\text{V})$.金属中无电场，故整个金属球 $V=450\text{kV}$.

26.31 平行板电容器中离带负电底板距离为 y 的 P 点电势 $V(y)-V(0)=ky$.其中$V(0)$为下极板的电势，$V(y)$为下极板上方 y 处的电势.求平行板间的电场.

解 ☞ 因为零势面可以任取，设 $V(0)=0$，从而使问题简化.故 $V(y)=ky$，利用题 26.3 的结果，有

$$E_x=-\frac{\partial}{\partial x}(ky)=0,\quad E_y=-\frac{\partial}{\partial y}(ky)=-k,\quad E_z=-\frac{\partial}{\partial z}(ky)=0$$

所以极板间电场方向向下(沿 y 轴负方向)，且大小为一常数 k.

26.32 如图 26-11 所示平行金属板相距 0.5cm，与一电压为 90V 的电池相连，求两者之间的电场及极板上的电荷密度.



图 26-11

解 ☞ 已知 $V_B-V_A=90\text{V}$ 及两板间 E 为常数，由 $V_B-V_A=Ed$，$90\text{V}=E(5\times10^{-3}\text{m})$解得 $E=18\text{kV/m}$.由题 25.71 知，正极板上的电荷密度为 $\sigma=\varepsilon_0E=(8.85\times10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(18000\text{N/C})=159\text{nC/m}^2$，同理，负极板上电荷密度为 -159nC/m^2.

26.33 平行板间的电势差为 150V，若极板间的电场为5000V/m，则两极板相距多远？

解 ☞ E 为常数，故 $E=\frac{V}{d}$，$5000=\frac{150}{d}$，得 $d=0.03\ \text{m}=3\ \text{cm}$.

26.34 一电子的电量大小为 $1.6\times10^{-19}\text{C}$.一油滴重为 $3.2\times10^{-13}\text{N}$，在密立根油滴装置的两极板间电场为 $5\times10^5\text{V/m}$，油滴在极板间保持平衡，则油滴的带电量为多少？(以电子

电量为单位.)

解 ☞ $E=5\times10^5\text{V/m}=5\times10^5\text{N/C}$,由平衡方程 $F=Eq=mg$,得

$$5\times10^5 q=3.2\times10^{-13}\text{C},\quad q=6.4\times10^{-19}\text{C},\quad \frac{q}{e}=\frac{6.4\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}}=4$$

26.35 在密立根实验中,一油滴带 4 个电子的电荷,质量为 1.8×10^{-12}g,它在两平行且相距为 1.8cm 的极板间保持静止,则带电极板间的电压为多少?

解 ☞ $E=V/d$ 因向上的电场力等于向下的重力,$F=Eq$,$\frac{V}{d}q=mg$,$\frac{V(4\times1.60\times10^{-19})}{0.018}=(1.8\times10^{-15})(9.8)$,故 $V=496(\text{V})$.

26.36 两块平行带电金属板(相距为 3.00 mm)间的电势差为 12 V.(a)两板间电场为多大?(b)将它们与电池断开,并分开至相距 5.00 mm 远,则分开后的电场和电势差分别为多大?

解 ☞ (a)从 $V=Ed$,$E=12.0/3.00\times10^{-3}=4000\text{V/m}$.(b)因移去电池后电荷保持不变,故 E 不变($E=\sigma/\varepsilon_0$),电势差 $=4000(5.00\times10^{-3})=20(\text{V})$.

26.37 两块平面金属板平行放置并被分开距离 D,左板朝右的一侧带电荷密度为 $+\sigma$,(a)求两极板间的场强,(b)求电势差,(c)在两极板之间插入另一块金属板,不改变原板的电荷,金属板厚度 $d<D$,则它与左板间的电场为多大?(d)求另一间隙的电场,(e)现在外侧两极板间的电势差是多少?

解 ☞ (c)、(d)、(e)三种情况如图 26-12 所示.(a)运用高斯定理,$E=\sigma/\varepsilon_0$,(b)$E=$常数,因此 $V=ED=(\sigma D)/\varepsilon_0$,(c)因电荷不变 $E=\sigma/\varepsilon_0$,(d)在插入板的右侧产生的电荷密度为 $+\sigma$,故间隙间的 E 仍为 σ/ε_0,(e)因插入的金属板是等势体(也可看成金属板内电场为零)故两极板间的电势差由(b)中的$(\sigma D)/\varepsilon_0$ 减小为$[\sigma(D-d)]/\varepsilon_0$.

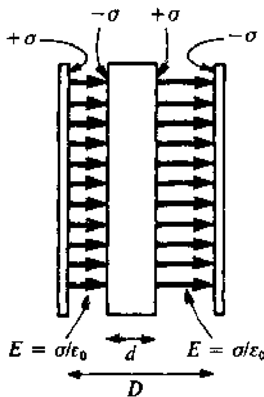


图 26-12

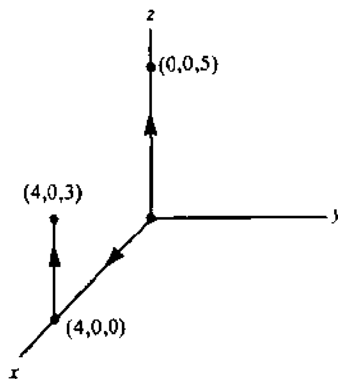


图 26-13

26.38 一对平行金属板相距 10 cm,它们之间的电压为 28 V,一质量为 0.60 g 的小球悬于上板,若球的带电量为 28 μC,绳的张力有多大?求出两种可能的结果.

解 ☞ 利用平衡条件:所有力的和为零.对物体而言,拉力向上,重力向下,而电场力 qE 可向上也可向下.

$$mg=(6.0\times10^{-4})(9.8)=5.88(\text{mN})$$
$$qE=(qV)/d=[(20\mu\text{C})(28\text{V})]/(0.10m)=5.60\text{mN}$$

故 $T=mg\pm qE=11.5\text{mN}$ 或 0.28mN.

26.39 某一区域的电场为 $\boldsymbol{E}=5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ kV/m.若 A 为原点,B 为(a)(0,0,5)m,(b)(4,0,3)m,求电势差 V_B-V_A.

解 ☞ 因为电场是保守场,可通过平行于坐标轴的直线路径计算(如图 26-13 所示).(a)因电场在 z 方向无分量,故在这一方向上移动一单位正电荷不作功,故原点与(0,0,5)间的电势差为 0.(b)

沿着路径从原点到(4,0,0)到(4,0,3),移动单位正电荷克服电场力做功(电势差)为 $-E_x(4-0)-E_z(3-0)=$ 20kV.

26.40 由题 36.39 中的电场,求两点 $A=(0,5,-1)$与 $B=(-3,2,2)$m 间的电势差 V_B-V_A.若 $A=(0,5,-1)$,$B=(3,2,2)$m 呢?

解 ☞ 取路径从(0,5,-1)到(-3,5,-1)到(-3,2,-1)到(-3,2,2),可得 $V_B-V_A=-(5000)(-3-0)-(-3000)(2-5)-(0)[2-(-1)]=6$(kV).第二种情况下 x 方向改成 $-(5000)(3-0)$,故答案为 -24kV.

26.41 空间某一区域,电场沿 y 方向,大小为 4000V/m,求坐标原点与下列各点间的电势差.(a)$x=0,y=20$cm,$z=0$,(b)$x=0,y=-30$cm,$z=0$,(c)$x=0,y=0,z=15$ cm.

解 ☞ 每种情况下,只有沿 y 轴方向移动时电场力做功 $V-V_0=-E_y(y)$.

(a)$V-V_0=-(4000\text{V/m})(0.20\text{m})=-800$V,(b)$V-V_0=-(4000\text{V/m})(-0.30\text{m})=1200$V,(c)$V-V_0=-(4000\text{V/m})(0)=0$V.

26.42 利用 $\Delta V=-E_s\Delta s$,求图 26-14 中 V_{AB}、V_{BC}和 V_{CA}.运用这些结果,证明把电荷 q 从 A 移到 B 到 C 再到 A 需要做的功为零.

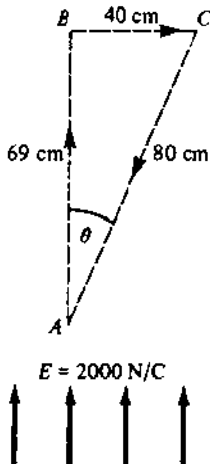


图 26-14

证 ☞ $V_{AB}=V_B-V_A=-E\Delta y=-2000(0.69)=-1380$(V);因 E_s 为 0(E 沿竖直方向,Δs 为水平方向)$V_{BC}=V_C-V_B=0$;$V_{CA}=-(-2000\cos\theta)(0.08)=2000(0.69)=1380$(V),沿着 C 到 A 的方向 $E_s<0$.需做的总功为 $q(V_{AB}+V_{CA})=q(-1380+1380)=0$.

26.43 证明在无电荷的空间区域电势没有最大值(或最小值).

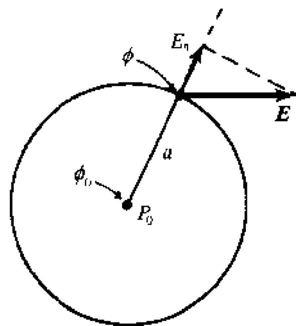


图 26-15

证 ☞ 用反证法,设如图 26-15 中 P_0 点有电势最小值为 ϕ_0,(如图 26-15 所示).我们用一极小半径为 a 的高斯球闭合 P_0,满足(i)球在无电荷的空间内,(ii)球面上每一点 $\phi\geqslant\phi_0$.运用高斯定理得到

$$0=\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S E_n dS \tag{1}$$

其中 E_n 为球面电场的径向分量.但由电势的定义

$$E_n=-\frac{d\phi}{dn} \tag{2}$$

为电势在径向上的分量.现尽可能减小 a,且满足上述条件(i)、(ii),同时让(2)式在任意需要的精度内近似等于差商,则

$$E_n=-\frac{d\phi}{dn}=-\frac{\phi-\phi_0}{a} \tag{3}$$

于是(1)变为

$$0=\int_S(\phi-\phi_0)dS \tag{4}$$

但(4)不可能成立:S 上每一点 $\phi-\phi_0$ 为非负,故对整个 S 积分必为正.这一矛盾说明原命题正确.该命题意义重大:因为稳定平衡只能在电势能的最小值处达到.静电场的电荷不可能达到稳定平衡,不稳定的平衡(如题 25.21)不需能量有最大值,只需有一鞍点.

26.3 能量;移动电荷问题

26.44 把 2μC 的电荷从 R 点移到 S 需 50μJ 的功,则两点间的电势差为多少?

解 ☞ $V_S - V_R = W/q = (5\times10^{-5})/2\times10^{-6} = 25(\text{V})$.因把正电荷从 R 移到 S 需外力做功,故点 S 的电势高.

26.45 氢原子中电子与质子间的距离为 $r = 5.29\times10^{-11}\text{m}$,后者为原子的核,计算原子的电势能.

解 ☞ 因质子的质量比电子大得多,故把电子从无穷远处移到固定质子电场中的点 r 处所作的功叫做电势能.质子在 r 处的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r} = (8.99\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{1.60\times10^{-19}\text{C}}{5.29\times10^{-11}\text{m}}\right) = 27.2\text{V}.$$

所以 $U = -eV = -27.2\text{eV}$.库仑力为引力,以无穷远处势能为零,则原子势能为负值.

26.46 计算如图 26-16 中所示排列电荷的电势能 U.

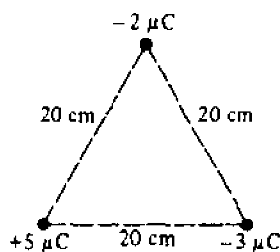


图 26-16

解 ☞ 把三个电荷依次从∞处移至图中位置.移动第一个电荷(设为 $-5\mu\text{C}$)时电场力不作功,把 $-2\mu\text{C}$ 的电荷从无穷远处移到现在位置需做功 $[(-2\mu\text{C})(5\mu\text{C})(9\times10^9)]/0.20 = -0.45\text{J}$.这两个电荷在第三个电荷处产生的电势为 $V = [(9\times10^9)/0.20](5\mu\text{C}-2\mu\text{C}) = +1.35\times10^5\text{V}$.则移动 $-3\mu\text{C}$ 电荷需做功 -0.405J.做功之和为 -0.855J.

注意,上述结果正是三对电荷单独存在时的势能之和,但并不等于 $q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3$,这里 V_1、V_2、V_3 是每一点处另两点的电荷产生的电势之和.上式是总能量的两倍.

26.47 由 26.46 题,有下式 $U = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + \cdots + q_nV_n)$,$U$ 是 $n\geqslant2$ 个点电荷任意放置时的电势能.证明这一等式成立.

证 ☞ 用 $V_i(j)$ 表示源电荷 q_j 在 q_i 所在位置处的电势,叠加得

$$V_i = V_i(1) + V_i(2) + \cdots + V_i(i-1) + V_i(i+1) + \cdots + V_i(n) \qquad (1)$$

$i = 1,2,\cdots,n$.假设电荷按 $1,2,\cdots,n$ 的顺序分别从无穷远处移到所在位置,需电场力作功

$$U = 0 + q_2V_2(1) + q_3[V_3(1) + V_3(2)] + \cdots + q_n[V_n(1) + V_n(2) + \cdots + V_n(n-1)] \qquad (2)$$

现按 $n, n-1,\cdots,1$ 的顺序分别移入电荷.需作的功为

$$U = 0 + q_{n-1}V_{n-1}(n) + q_{n-2}[V_{n-2}(n) + V_{n-2}(n-1)] + \cdots + q_1[V_1(n) + V_1(n-1) + \cdots + V_1(2)] \qquad (3)$$

把(2)式与(3)式相加除以 2,并代入(1)简化 q_i 的系数,即得到所证结果.

对于某一区域 R 连续分布的电荷,式子显然可以写成

$$U = \frac{1}{2}\int_R V\text{d}q = \frac{1}{2}\int_R V\rho\text{d}v \qquad (4)$$

其中 ρ 为电荷体密度,$\text{d}v = \text{d}x\text{d}y\text{d}z$ 是体积元.

26.48 求孤立的半径为 R、带电量为 Q 的导体球的电势能.

解 ☞ 由于球面 s 是等势面,且 $V = Q/(4\pi\varepsilon_0R)$,由 26.47 题的式(4)可得

$$U = \frac{1}{2}V\int_s \text{d}q = \frac{1}{2}VQ = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0R}$$

还可以假设电荷是从无穷远处分别以小电荷元 $\text{d}q$ 移来,若已移来电荷 q,则移下一个 $\text{d}q$ 需做功 $\text{d}U = V(q)\text{d}q = (q/4\pi\varepsilon_0R)\text{d}q$,对 $q=0$ 到 $q=Q$ 积分,则 $U = Q^2/8\pi\varepsilon_0R$,与前面结果相同.

26.49 如图 26-17 所示,原点处有一带电量 $Q = 40\mu\text{C}$ 且均匀分布的球.$r_1 = 0.5\text{ m}$,$r_2 = 1.2\text{ m}$.(a)求 Q 在 P_1、P_2 产生的电势,以 P_2 为参考点时 P_1 的电势为多少?(b)带电量 $q = 8\mu\text{C}$ 的小球放在 P_1 点,它的电势能为多大?取∞处为零电势能点.(c)设小球自由地从 P_1 移动到 P_2 点,则小球的动能变化为多少?

解 ☞ (a)$\phi_1 = (9\times10^9)\left(\frac{40\times10^{-6}}{0.5}\right) = 720(\text{kV})$,$\phi_2 = (9\times10^9)\left(\frac{40\times10^{-6}}{1.2}\right) = 300(\text{kV})$ P_1 相对

于 P_2 的电势为 P_1 的绝对电势减去 P_2 的绝对电势,把这种相对电势写成 ϕ_{12}或 V_{12},则 $\phi_{12}=\phi_1-\phi_2=720-300=420(\text{kV})$.(b) $U_1=q\phi_1-(8\times10^{-6})(720\times10^3)=5.76$ J.(c) $K_1-K_2=U_1-U_2=q(\phi_1-\phi_2)-q\phi_{12}=(8\times10^{-6})(420\times10^2)=3.36(\text{J})$.

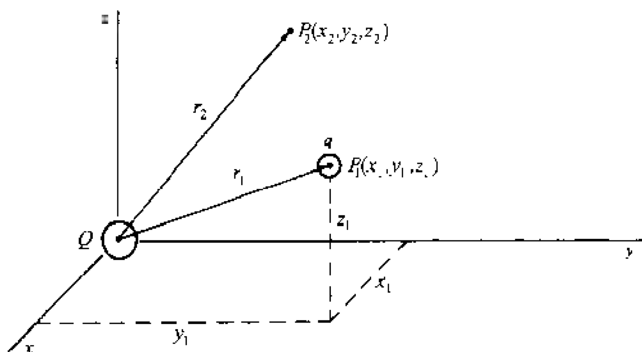


图 26-17

26.50 如图 26-18 所示,线 A、B 间的电势差 $V_{AB}\equiv V_A-V_B$,用电压表测得为 6000V.一重为 0.150kg 的小球带电量为 $q=+500\mu\text{C}$,从靠近线 A 处自由释放运动到B.(a) V_{AB} 依赖两线间的距离吗?(b)电场力对球作了多少功?(c)球将以多大的速度 u 到达 B?(d)求 A、B 间的平均电场$\boldsymbol{E}$.

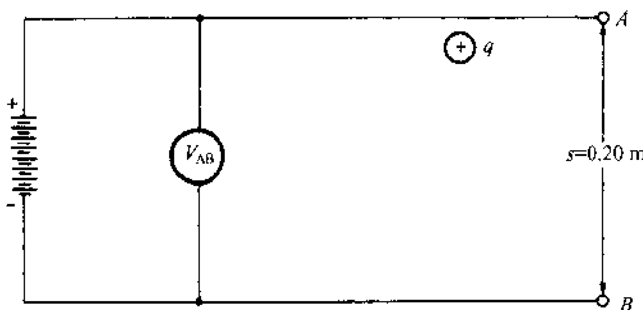


图 26-18

解 ☞ (a)不,(b) $W_E=U_A-U_B=qV_{AB}=(500\times10^{-6})(6000)=3.00\text{J}$,(c) $W_T=W_E+W_G=\frac{1}{2}mu^2$, $W_G=mgh=(0.150)(9.8)(0.2)=0.29\text{J}$

故 $\frac{1}{2}mu^2=3.29\text{J}$, $u=\sqrt{\frac{6.58}{0.15}}=6.6(\text{m/s})$, $\overline{E}=\frac{V_{AB}}{S}=\frac{6000}{0.20}=30(\text{kV/m})$.

26.51 一电子枪发射电子($q=-e$, $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$)到相距 4 mm 的真空金属板上.板电势比枪电势低 5.0V,则电子在离开枪时的速度应达到多大才能到达极板?

解 ☞ 因板电势比枪电势低 5 V,电荷 $q=-e$ 带负电,电子作减速运动.要使电子到达板应使其获得的电势能为 $eV=(1.6\times10^{-19}\text{C})(5\text{V})=8.0\times10^{-19}\text{J}$.故开始时至少应有这么大的动能提供所需的电势能.$KE=\frac{1}{2}mv^2=8.0\times10^{-19}\text{J}$,则 $v\geqslant\left[\frac{16.0\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}\right]^{\frac{1}{2}}\text{m/s}=1330\text{km/s}$.

26.52 两质子在相距 2.0×10^{-14}m 处释放,求它们相距 5.0×10^{-14}m 时的速度.(质子质量 $=1.67\times10^{-27}$kg.)

解 ☞ 由能量守恒定律:减少的电势能 = 增加的动能或 $(U_e)_1-(U_e)_2=K_2-K_1$,因为动能开始时为 0,两质子具有相同的动能

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2.0\times10^{-14}\text{m}}-\frac{1}{5.0\times10^{-14}\text{m}}\right)=2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)-0$$

代入已知 m、e 的值,得到 $v=2034\text{km/s}$.

26.53 电视电子管中的电子射线是在电势差为20kV作用下从静止作加速运动的电子.则电子的能量有多大? 它们的速度有多大? 本题近似计算中忽略相对论效应.

解 ☞ 电子能量:$eV=20\text{keV}=(20000)(1.6\times10^{-19})\text{J}=3.2\times10^{-15}\text{J}$.为求得速度,由 $3.2\times10^{-15}\text{J}=\frac{1}{2}(9.1\times10^{-31}\text{kg})v^2$,解之得 $v=8.4\times10^7\text{m/s}$. $v=28\%\,vc$,所以忽略相对论效应显得粗糙,但仍是合理的.

26.54 质子($q=e$, $m=1.67\times10^{-27}\text{kg}$),经过1 MV的电势差从静止开始加速,求最终速度.

解 ☞ 质子经过 $1.0\times10^6\text{V}$ 的电势差做加速运动.减少的电势能 $=qV=(1.6\times10^{-19}\text{C})(1.0\times10^6\text{V})=1.6\times10^{-13}\text{J}$,必与获得的动能 $=\frac{1}{2}mv^2$ 相等,或 $\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\text{kg})v^2=1.6\times10^{-13}\text{J}$.解之得 $v=14\times10^6\text{m/s}$.

26.55 两金属板与一电压为1.50V的电池相连.把一个 $+5\mu\text{C}$ 的电荷(a)从负极板移到正极板,(b)从正极板移到负极板,所需作的功各为多少?

解 ☞ (a)把电荷移到电势高的极板上必须克服电场力做功. $W=$ 电势能的增加 $=qV=(5\times10^{-6}\text{C})(1.5\text{V})=7.5\mu\text{J}$.

(b)随着电势的降低,电场力做正功.外力做负功抵消这部分能量,使电荷无动能,故外力做功为 $-7.5\mu\text{J}$.

26.56 题26.55中极板置于真空中.一电子($q=-e$, $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$)从负极释放,自由落至正极板,则打到极板之前的速度有多大?

解 ☞ 电子从负极向正极作加速运动,电势能的减少 = 增加的动能.所以 $\frac{1}{2}mv^2=(1.6\times10^{-19}\text{C})(1.5\text{V})=2.4\times10^{-19}\text{J}$

$$v=\left[\frac{4.8\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}\right]^{\frac{1}{2}}\text{m/s}=730\text{km/s}$$

26.57 汽枪的铅弹(重为2g)速度为150ft/s.通过多大的电势差铅弹能达到这样的速度? 设带电量为 $1\ \mu\text{C}$.

解 ☞ 动能 $=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(2\times10^{-3}\text{kg})(150\text{ft/s})^2(0.305\text{m/ft})^2=2.09\text{J}$.这应与 qV 相等.故 $(1.0\times10^{-6}\text{C})V=2.09\text{J}$, $V=2.09\text{MV}$.

26.58 一质子($q=e$)从距一带电量为80 e的重核(汞核)10^{-14} m的 P 点自由释放,当质子远离核时动能为多大? 速度为多大?

解 ☞ 质子被带正电的核排斥并快速运动到无穷远.因此,从 P 点到无穷远处的电势差即为 P 点的绝对电势.

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{80\times1.6\times10^{-19}}{10^{-14}}=12\times10^6\text{V}$$

在电势减小的过程中,质子会获得一动能 $K=12\text{MeV}$.这一过程中,我们假定核几乎保持静止(类似于26.45题).于是有 $\frac{1}{2}mv^2=(12\times10^6\text{eV})(1.602\times10^{-19}\text{J/eV})$ 利用质子质量 $1.67\times10^{-27}\text{kg}$,求出质子的速度为 $v=4.8\times10^7\text{m/s}$.

26.59 镭原子核带电量为 $+88\ e$,半径为0.007 pm.则质子必须以多大的速度射向原子才能达到 $r=0.01$ pm处? 电子内径 r_e 约为50 pm.

解 ☞ 电子单独产生的电势约为一常数且等于$(-88\ e)/r_e$, r_e 为电子之内径.核产生的电势为 $(+88e)/r$, $r\ll r_e$.

所以无穷远处与 $r=0.01$ pm处电势差约为 $q=88$ e的电荷在该半径处的绝对电势: $V=(9\times10^9)$

$\cdot\frac{88(1.60\times10^{-19})}{10^{-14}}=12.7(\mathrm{mV})$. 对于质子,无穷远处的动能 = 在 r 处的电势能 $\frac{1}{2}mv^2=qV$ 因 $m=1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$, $q=1.60\times10^{-19}\mathrm{C}$, $V=12.7\times10^6\mathrm{V}$, 解方程得 $v=4.9\times10^7\mathrm{m/s}$.

26.60 如图 26-19 所示,两极板电势差为 100 V. 若系统放在真空中,则从 B 板释放的质子到达 A 板前速度为多大?

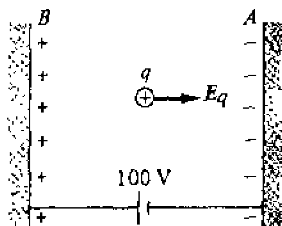


图 26-19

解 ☞ 质子的质量为 1.67×10^{-27} kg, 带电量为 1.60×10^{-19}C. 当质子从 B 板运动到 A 板,电势能减少 $q(V_B-V_A)$, 其中 $V_B-V_A=100\mathrm{V}$. 这些电势能转化为质子在 A 板时的动能,由能量守恒定律:

减少的电势能 = 增加的动能 即 $q(V_B-V_A)=\frac{1}{2}mv^2$, 把数值代入求出 $v=140\mathrm{km/s}$.

26.61 用 5 节电池给手电筒的灯泡供电,产生的电势差为 7.5 V. 则要让 60C 的电荷穿过灯丝,电池应做多少功?(损失多少化学能).

解 ☞ $W=Vq=7.5\times(60)=450\ (\mathrm{J})$

26.62 一质子经电势差为 0.9 MV 的范德格拉夫起电机由静止开始加速,加速后质子的动能为多少?

解 ☞ 质子的动能等于在电势差作用下质子移动所做的功. $W=Vq=(9\times10^5)(1.6\times10^{-19})=1.44\times10^{-13}(\mathrm{J})$.

26.63 在氢原子的玻尔模型中,电子绕核在 $r=0.053\mathrm{nm}$ 的轨道上运动. (a)电子在该轨道上移动有多快? (b)电子需获得多大能量才能摆脱原子核的束缚?

解 ☞ 电子要在轨道上作圆周运动,必受到一向心力的作用. 这就是它与核之间的库仑引力. (假设核保持静止,且核的质量为电子的 1840 倍)则有

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ee}{r^2} \tag{1}$$

式中 m 为电子质量($9.1\times10^{-31}\mathrm{kg}$), e 是电子与核上电荷的大小,为 1.6×10^{-19}C. 代入数值解出 v 得 $v\approx2.2\times10^6\mathrm{m/s}$. 则由能量守恒定律,使电子摆脱束缚的能量(电离能 ϕ)为

$$\phi=\Delta PE+\Delta KE=[0-(-e)V]+\left[0-\frac{1}{2}mv^2\right]$$

$$=e\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ee}{r}\right)=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}=2.15\times10^{-18}\mathrm{J}.$$

26.4 电容和电场能

26.64 什么是电容器? 如何表示电容的大小?

解 ☞ 电容器是由两个带等量异号电荷的导体之间插入绝缘材料或电介质形成的. 电容器的电容定义如下:

电容 $C=\frac{\text{电荷 } q \text{ 的大小}}{\text{两导体间的电势差}}$, q 单位是库仑(C), V 单位是伏(V)特, C 单位为法拉(F). 与法拉相关的单位还有

$1\mu\mathrm{F}=1$ 微法 $=10^{-6}\mathrm{F}$, $1\mathrm{pF}=1$ 皮法 $=10^{-12}\mathrm{F}$

26.65 求由两块平行导体板组成的平行板电容器的电容. 每板的面积为 A, 两板的距离为 d, 设 d 比两板的尺寸小得多.

解 ☞ 设一板上带电荷为 q, 另一板上带电荷为 $-q$. 两板间电场为常数, 且与极板垂直. 利用题 25.71 中 $V=Ed=\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)d=[(d/\varepsilon_0A)]q$, 所以 $C=q/V=(\varepsilon_0A)/d$. 这里忽略了极板边缘效应对 E 的影响.

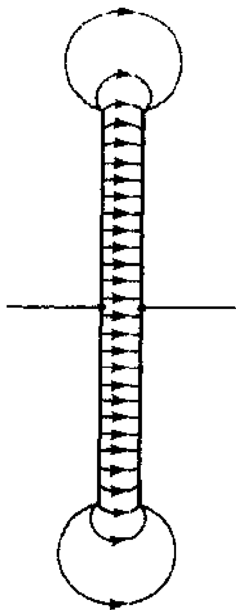


图 26-20

26.66 求带电量为 q 的电容器所具有的能量.

解 ☞ 相对于带负电的导体(假设置于无穷远处),带正电的导体电势为 $V=q/C$. 由 26.47 题中(4)式得

$$U=\frac{1}{2}\frac{q}{C}\int dq=\frac{q^2}{2C}$$

26.67 一平行板电容器圆板的半径为 $r=10.0$cm,两板相距 $d=1.00$ mm. 当两板的电势差为 $V=100$ V 时,极板上带多少电荷? 讨论计算的精确度.

解 ☞ 由 26.65 题.

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$=\frac{(8.85\times10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.14\times10^{-12}m^2)}{1.00\times10^{-3}\text{m}}$$

$$=2.8\times10^{-10}\text{F}=280\text{pF} \quad (1)$$

将上述结果引用到任意平板电容器是不妥当的,因为(1)忽略了电容器极板的边缘效应. 图 26-20 表示了在半径范围为 Δr 与板间距离可比较时的区域产生的影响. 故 $\Delta r/r\approx d/r=10^{-3}\text{m}/10^{-1}\text{m}=1\%$ 表示了方程精确度的量度.

电容器极板上存贮电量大小为 $|q|$, $|q|=CV=(2.8\times10^{-10}\text{F})(1.00\times10^2\text{V})=28\text{nC}$.

26.68 一球形电容器由一半径为 b 的金属球作为一极板,另一同心的金属球壳作为另一极板. 球壳的内半径为 a,证明电容为 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{a-b}$.

证 ☞ 利用球的对称性并联系参数 E,设内极板上带电量为 Q,则

$$E=Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2),\Delta V=[Q/(4\pi\varepsilon_0)]\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

由定义得

$$C=Q/\Delta V=4\pi\varepsilon_0/\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=4\pi\varepsilon_0 ab/(a-b)$$

26.69 利用 26.68 题结论,证明若球面间隔与它们的半径相比很小,则电容与平行板电容器相同. $C=(\varepsilon_0 A)/d$.

证 ☞ 球面面积 $4\pi a^2\approx4\pi ab$,则 $C=\varepsilon_0 A/(a-b)$. 因 $a-b=d$,则得到证明.

26.70 半径分别为 30 cm 和 31 cm 的同心球形成的电容器电势差为 500 V,则存贮的电量为多少? 设空气中 $K=1$.

解 ☞ 同心球的电容

$$C=\frac{Kab}{(9\times10^9)(a-b)}=\frac{(0.30)(0.31)}{(9\times10^9)(0.31-0.30)}$$

$$=1.033\times10^{-9}(\text{F})=1.033\ (\text{nF})$$

$$Q=CV=(1.033\times10^{-9})(500)=517(\text{nC})$$

26.71 一绝缘杆上的金属球带电量为 6 nC,电势比周围物体高 200 V. 则由小球与周围物体构成电容器的电容为多大?

解 ☞ $C=q/V=\dfrac{6\times10^{-9}\text{C}}{200\text{V}}=30\text{pF}$

26.72 一电容器带电 9.6 nC,两端电势差为 120V,计算电容及电容器存贮的能量.

解 ☞ $C=Q/V=(9.6\times10^{-9}\text{C})/(120\text{V})=8.0\times10^{-11}\text{F}=80\text{pF}$. 对于能量可以用三个相等的

式子求得 $E=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$. 利用中间的式子，$E=\frac{1}{2}(9.6\times10^{-9}\mathrm{C})(120\mathrm{V})=5.76\times10^{-7}\mathrm{J}=576\mathrm{nJ}$.

26.73 一电容器电容为 20μF，带电量为 600μC. 求电容器两端的电势差.

解 ☞ $Q=CV, 600\times10^{-6}=20\times10^{-6}V, V=30\mathrm{V}$

26.74 一电容器电容为 300pF，电压为 1kV，则带多少电荷？

解 ☞ $q=CV=(300\times10^{-12}\mathrm{F})(1000\mathrm{V})=3\times10^{-7}\mathrm{C}=0.3\ \mu\mathrm{C}$

26.75 50 μC 的电荷贮存于一电容为 2μF 的电容器上，求存贮的能量.

解 ☞ $W=Q^2/2C=\frac{(50\times10^{-6})^2}{2(2\times10^{-6})}=625(\mu\mathrm{J})$

26.76 计算一个 60pF 的电容器上的能量.(a)当带 2kV 的电势差，(b)当每个极板上带电为 30nC.

解 ☞ (a)$E=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\times(60\times10^{-12}\mathrm{F})(2000\mathrm{V})^2=1.2\times10^{-4}\mathrm{J}$

(b)$E=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{(30\times10^{-9}\mathrm{C})^2}{60\times10^{-12}\mathrm{F}}=7.5\times10^{-6}\mathrm{J}$

26.77 求电容为 5 μF 的电容器电势差为 500V 时所带的能量.

解 ☞ $W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(5\times10^{-6})(500)^2=0.625(\mathrm{J})$

26.78 若电容为 4μF 的电容器电势差为 1000V，求贮存的能量.

解 ☞ $W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(4\times10^{-6})(1000)^2=2(\mathrm{J})$

26.79 一电容为 1.2μF 的电容器，带电压为 3 kV，求所贮存的能量.

解 ☞ $\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(1.2\times10^{-6})(3000)^2=5.4(\mathrm{J})$

26.80 一任意形状的电容器放于空气中($K=1$)，两极板间电容为 C. 则当极板间绝缘介质介电系数为 K 时，电容为多少？

解 ☞ 设一导体上带电量为 $+Q$，另一导体上带电量为 $-Q$. 电荷在导体间加上绝缘介质时不会改变. 导体间的电场会发生改变. 因在介质和导体接触面产生极化电荷，实际电荷产生的电场由于介电常数 K 而减小，电势差同样也会减少. 若 V 为无介质时的电势差，V' 为有介质时的电势差，则 $V'=V/K$，则 $C'=Q/V'=KQ/V=KC$.

26.81 空气中电容器极板间的电容为 8μF. 当极板间插入介电常数为 6.0 的介质时电容为多大？

解 ☞ 有介质时电容 = K 倍空气中的电容 = (6.0)(8μF) = 48μF

26.82 一平行板电容器由两极板构成，每个板面积为 200 cm²，两板在空中相距 0.4 cm，(a)计算电容，(b)若电容器与 500V 的电源相连，求电容器上的电荷，贮存的能量以及板间的电场强度 E，(c)若极板间充满 $K=2.60$ 的液体，则从 500V 的电源上有多少电荷流到电容器上.

解 ☞ (a)对于平行板电容器 $C=(\epsilon_0A)/d=[(8.85\times10^{-12})(0.02)]/(0.004)=44(\mathrm{pF})$

(b)$q=CV=(4.4\times10^{-11}\mathrm{F})(500\mathrm{V})=22\mathrm{nC}$，能量 $=\frac{1}{2}qV=\frac{1}{2}(2.2\times10^{-8}\mathrm{C})(500\mathrm{V})=5.5(\mu\mathrm{J})$

$$E=\frac{V}{d}=\frac{500\mathrm{V}}{4\times10^{-3}\mathrm{m}}=125\mathrm{kV/m}$$

(c)现在电容为以前的 2.6 倍，故 $q'=(2.60)(22)=57$ nC 所以 $q'-q=35$ nC 要移动到电容器上.

26.83 两块面积均为 100 cm² 的平行导体板相距 5 mm，且带等量异号的电荷，大小为 0.20 μC. 两极板间介质的介电常数 $K=5$，求(a)系统的电容，(b)两板的电势差.

解 ☞ (a)$C=\frac{KA}{k4\pi d}=\frac{5(0.01)}{(9\times10^9)(4\pi)(0.005)}=88\times10^{-12}(\mathrm{F})=88(\mathrm{pF})$

(b)$Q=CU, 0.2\times10^{-6}=88\times10^{-12}V, V=2270\mathrm{V}$

26.84 一电容器电容为 5 μF,金属板间为空气,电容器与 30 V 的电池相连.使电容器带电后,移走电池.(a)计算电容器上的电荷,(b)用 $K=2.1$ 的油取代空气,求新的电容和极板间新的电势差.

解 ☞ (a)$Q=CV=5\times10^{-6}(30)=150(\mu C)$,(b)电容器电荷不变,电容增加 K 倍.$C'=KC=10.5\mu F$,$V'=V/K=14.3$ V

26.85 平行板电容器极板面积为 A,带电量为 Q,(a)求一板上电荷对另一板的作用力,(b)求把平行板从几乎靠近移到相距 d 时所做的功,(c)把功与 26.66 题中电容器存贮的能量比较.(设 Q 保持不变)

解 ☞ (a)因每个极板对板间的电场影响一样,每个极板产生的电场为 $\sigma/2\varepsilon_0$,对另一个极板的作用力为$(\sigma/2\varepsilon_2)\sigma A$,故 $F=(\sigma^2A)/2\varepsilon_0$,(b)需做的功 $Fd=[(\sigma^2A)/(2\varepsilon_0)]d$.(c)因 $Q^2=(\sigma A)^2$,且电容为$(\varepsilon_0A)/d$,故 $Fd=Q^2/2C$,即为电容器存贮的能量.

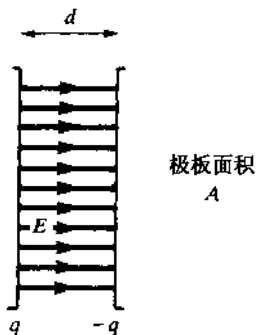


图 26-21

26.86 证明平行板电容器的电场可认为是电场中每点能量密度 $\rho_e=(\varepsilon_0E^2)/2$.

证 ☞ 情况如图 26-21 所示,由题 26.66,$U=\frac{1}{2}qV$,$V=Ed$,$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0A}$,故

$$U=\frac{1}{2}(\varepsilon_0AE)(Ed)=\frac{\varepsilon_0E^2\tau}{2}$$

其中 $\tau=Ad$ 为极板间的体积,$\rho_e=U/\tau=(\varepsilon_0E^2)/2$

虽然这一式子是由平行板间的恒定电场得出的,但结果对任意电荷分布的静电能同样成立.

26.87 计算题 26.67 中的平行板电容器的电场、电场能密度、存贮的能量.

解 ☞ $E=V/d=\frac{100\text{V}}{1.00\times10^{-3}\text{m}}=100$ kV/m

$$\rho_e=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}=\frac{(8.85\times10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(10^5\text{N/C})^2}{2}=0.044\ \text{J/m}^3$$

$$U=\rho_e\pi r^2d=(4.4\times10^{-2}\text{J/m}^3)\pi(0.1\text{m})^2(0.001\text{m})=1.4\ \mu\text{J}$$

26.88 计算如图 26-22 所示的球形电容器的电场能量密度及总能量的表达式.内外球分别带电荷 $+|q|$ 和 $-|q|$.

解 ☞ 由高斯定理:

$$E=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0r^2}\ (r_1\leqslant r\leqslant r_2),\text{则}\ \rho_e=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0r^4}$$

由图 26-22 中的体积元:

$$U=\iiint\rho_e\mathrm{d}v=\int_{r_1}^{r_2}\rho_e(4\pi r^2)\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}n}{r^2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

为检验是否正确,利用 $U=q^2/(2C)$,得

$$C=\frac{1}{2}\frac{q^2}{U}=\frac{1}{2}\frac{8\pi\varepsilon_0}{(1/r_1)-(1/r_2)}=\frac{4\pi\varepsilon_0r_1r_2}{r_2-r_1}$$

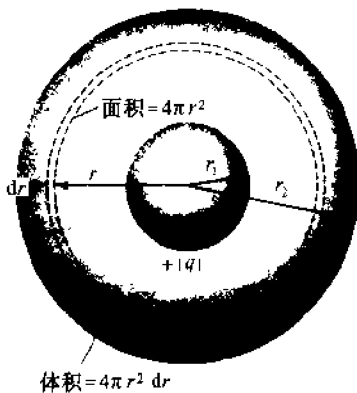


图 26-22

与 26.68 题结果一致.当 $r_2\rightarrow\infty$,$U\rightarrow q^2(8\pi\varepsilon_0r_1)$(与 26.48 题第一问一致),$C\rightarrow4\pi\varepsilon_0r_1$,即为一半径为 r_1 的孤立球的电容.

26.89 静电能密度单位为 J/m^3,与压强的单位 Pa 相同,这仅仅是偶然吗?

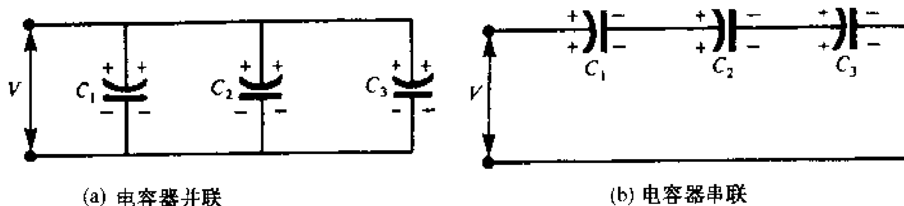
解 ☞ 不是偶然.事实上,由题 26.85 题知平行板电容的能量密度为 $\rho_e=\frac{Fd}{Ad}=\frac{F}{A}=$ 每个板上的压强.

26.5 电容器的联接

26.90 证明并联电容为各电容之和，串联电容的倒数为各电容倒数之和.

证 ☞ 如图 26-23(a)为三个电容并联.我们找一个电容 C_{eq} 与三个电容的作用相当.若两端的电压为 V，则 $q_1 = C_1V$；$q_2 = C_2V$；$q_3 = C_3V$.所带的总电荷为 $q = q_1 + q_2 + q_3$.故 $q = C_{eq}V = C_1V_0 + C_2V + C_3V$，所以 $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$.

对于串联的电容，如图 26-23(b)所示，有 $q_1 = q_2 = q_3$.电压分别为 $V_1 = q_1/C_1$，$V_2 = q_2/C_2$，$V_3 = q_3/C_3$.所有电容器总电压为 $V = V_1 + V_2 + V_3 = q/C_{eq}$，又 $q_1 = q_2 = q_3$，所以 $q/C_{eq} = q/C_1 + q/C_2 + q/C_3$，消去 q，得到 $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3$.



(a) 电容器并联　　(b) 电容器串联

图 26-23

26.91 如图 26-24 所示的平行板电容器并联接于 120V 的电源间.求出等效电容和各电容上的电荷.

解 ☞ 对于并联电容 $C_{eq} = C_1 + C_2 = 6\text{pF} + 2\text{pF} = 8\ \text{pF}$

每个电容器上有 120 V 的电势差，故 $q_1 = C_1V_1 = (2\text{pF})(120\text{V}) = 240\text{pC}$，$q_2 = C_2V_2 = (6pF)(120\text{V}) = 720PC$，共带电荷 $q_1 + q_2 = 960$ pC.也可由 $q = C_{eq}V = (8\text{pF})(120\text{V}) = 960\text{pC}$ 得到.

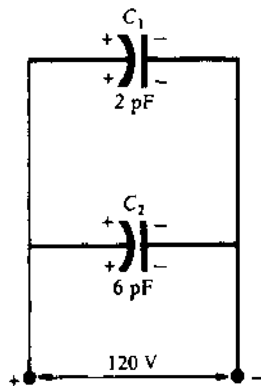


图 26-24

26.92 求一个 12μF 的电容器与两个 6 μC 的电容器并联后的电容.

解 ☞ $C = C_1 + C_2 + C_3 = 12 + 6 + 6 = 24(\mu\text{F})$

26.93 如图 26-25 所示两个电容器串联，两端电压为 1000V，求(a)等效电容 C_{eq}，(b)每个电容器上所带的电量，(c)每一电容器两端的电压，(d)电容器所存贮的能量.

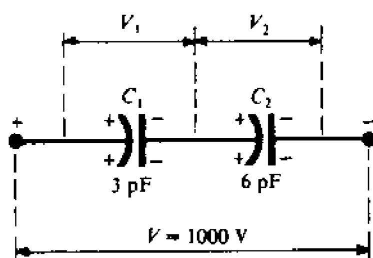


图 26-25

解 ☞ (a)因为 $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3\text{pF}} + \frac{1}{6\text{pF}} = \frac{1}{2\text{pF}}$ 所以 $C_{eq} = 2\text{pF}$.(b)串联组合中，每个电容带相等量的电荷，也是等效电容所带的电荷.利用(a)中结果得 $q_1 = q_2 = q = C_{eq}V = (2\times10^{-12}\text{pF})(1000\text{V}) = 2\text{nC}$.(c) $V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{2\times10^{-9}\text{C}}{3\times10^{-12}\text{F}} = 667\text{V}$，$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{2\times10^{-9}\text{C}}{6\times10^{-12}\text{F}} = 333\text{V}$.(d) C_1 所带能量 $= \frac{1}{2}q_1V_1 = \frac{1}{2}(2\times10^{-9}\text{C})(667\ \text{V}) = 6.7\times10^{-7}$ J.C_2 所带能量 $= \frac{1}{2}q_2V_2 = \frac{1}{2}(2\times10^{-9}\text{C})(333\text{V}) = 3.3\times10^{-7}$J，所带总能量 $= (6.7+3.3)\times10^{-7}\text{J} = 10\times10^{-7}$J，最后一个结果也可由 $\frac{1}{2}qV$ 或 $\frac{1}{2}C_{eq}V^2$ 求得.

26.94 若电容为 6 μF 的电容器与电容为 12 μF 的电容器串联，求等效电容

解 ☞ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$，故 $C = 4\ \mu$F

26.95 求电容分别为 1 μF、2μF、6μF 的三个电容器串联后的总电容.

解 ☞ $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{10}{6}$,故 $C=0.6\mu F$.

26.96 若需要 $C=0.25\mu F$ 的电容,但存储室只有 $C=1.00\mu F$ 的电容器,你只能推迟你的实验吗?

解 ☞ 不 只需把四个已有的电容串联即可得到所需电容.

26.97 三个电容(2μF, 3μF, 4μF)串联在 6V 的电池上,当电子不再移动,3μF 电容器上的带电量为多少? 4μF 的电容器两端电势差为多大?

解 ☞ 三个电容器串联的等效电容为$\frac{12}{13}=0.92(\mu F)$. 每个串联电容器上带等量的电荷,也等于等效电容上所带的电荷. $Q_{eq}=C_{eq}V=0.92(6)=5.5(\mu C)$,电容 4μf 两端的电压 $V=Q/C=5.5/4=1.38(V)$.

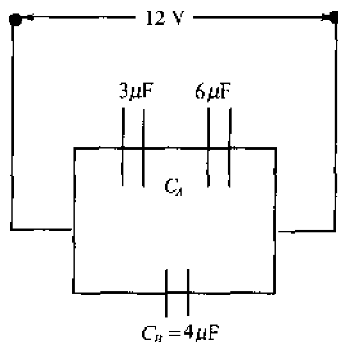


图 26-26

26.98 三个电容器联接如图 26-26 所示,若两端电势差为 12 V,整个电容有多大?

解 ☞ 对于串联的两个电容器$\frac{1}{C_A}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$故上分支的电容为 $C_A=2\mu F$,两并联电容的总电容为 $C=C_A+C_B=2+4=6(\mu F)$(系统的电容).

26.99 求题 26.98 中每个电容器上的电荷.

解 ☞ 对 C 和 C_B 分别用 $Q=CV$,得 $Q=CV=6\times10^{-6}(12)=72\ (\mu C)$(系统带电量)、$Q_B=C_BV=(4\times10^{-6})(12)=48(\mu C)$(4μF 电容上的电量). 系统的总电量为上分支电量与下分支电量之和;故 $Q_A=Q-Q_B=24\mu C$. 3μF 和 6μF 两电容器串联,故带等量的电荷.

26.100 由 26.98 题及 26.99 题求每个电容器的电压.

解 ☞ 4μF 电容器上的电势差即为所加电压 12 V. 对 3μF 的电容器运用 $Q=CV$, $Q_A=(3\times10^{-6})V_3$ 或 $2.4\times10^{-5}=(3\times10^{-6})V_3$, $V_3=8V$. 对 6μF 的电容器运用 $Q=CV$, $Q_A=(6\times10^{-6})V_6$或 $2.4\times10^{-5}=(6\times10^{-6})V_6$, $V_6=4V$. 后两个电容器电压之和等于两端电压 8V + 4V = 12V.

26.101 在图 26-27 的电路中,求总电容.

解 ☞ 先求并联电容器的总电容 C_p, $C_p=C_2+C_3=6+4=10(\mu F)$. C_p 与 C_1 串联, $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_p}+\frac{1}{C_1}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$, $C=3.33\mu F$.

26.102 求 26.101 题中每个电容器两端的电势差.

解 ☞ 先求整个系统所带的总电荷 Q. $Q=CV=3.33\times10^{-6}(1000)=3.33\times10^{-3}(C)$于是 $V_1=Q/C_1=\frac{3.33\times10^{-3}}{5\times10^{-6}}=0.667\times10^3=667(V)$, $V_2=V_3=V-V_1=1000-667=333(V)$我们可以用两并联电容器的总电容 C_p 检验$V_2=V_3=Q/C_p=\frac{3.33\times10^{-3}}{10\times10^{-6}}=333(V)$

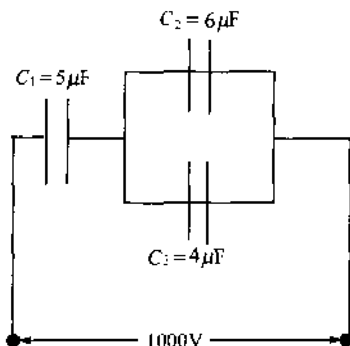


图 26-27

26.103 求图 26-28 中电容器组合的等效电容.

解 ☞ 7μF、5μF 两并联电容器的等效电容为 12 μF，再与 2 μF、3μF 两电容器串联．故 $1/C=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$，得 $C=1.09\mu$F．

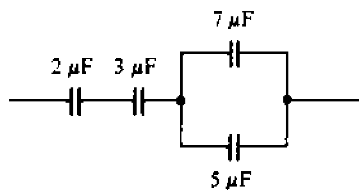


图 26-28

26.104 两并联电容器分别为 2 μF，4μF，再与 3μF 的电容器串联．电容器组连在 12 V 的电池上，求电容器组的等效电容和 2 μF 电容器上的电势差．

解 ☞ 如图 26-29 所示，得到 $C_{eq}=2.0\mu$F．等效电容的电量为 $Q=CV=2(12)=24(\mu\text{C})$．这也是 6 μF 的等效电容上的带电量．故两端（2μF 电容器两端）电压为 $Q/C=24/6=4(\text{V})$．

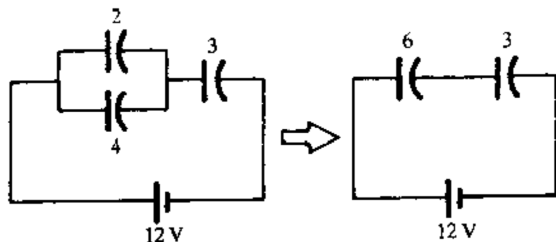


图 26-29

26.105 求图 26-30 中组合电路的等效电容．并求出 4μF 电容器上的电量．

解 ☞ 如图 26-31 所示，$C_{eq}=5.4\mu$F．4μF 的电容器上带电量与 2.4 μF 的电容器上电量相等．因 2.4 μF 电容两端电压为 10 V，故 $Q=CV=2.4(10)=24\ (\mu\text{C})$．

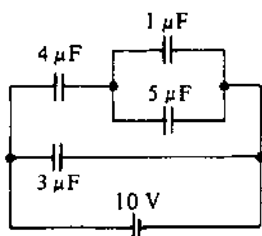


图 26-30

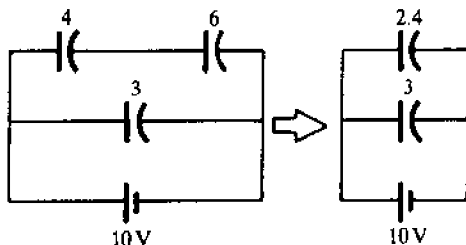


图 26-31

26.106 电容为 3 μF、4μF 的两个电容器分别与 6V 的电池相接．与电池断开后把一电容器的负极与另一电容器的正极相接，求最终每个电容器的带电量．

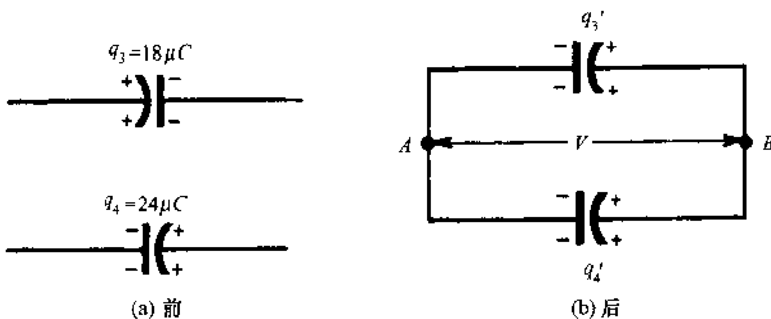


图 26-32

解 ☞ 如图 26-32 所示，在两电容器连接之前，各自的带电量为 $q_3=CV=(3\times10^{-6}\text{F})(6\text{V})=18\mu\text{C}$ $q_4=CV=(4\times10^{-6}\text{F})(6\text{V})=24\mu\text{C}$ 由图中可知，当两电容器连接之后会中和掉部分电荷．

它们的最终电荷为 $q'_3 + q'_4 = q_4 \quad q_3 = 6\mu C$. 又两电容的电势差相等，故由 $V = q/C$ 得 $\frac{q'_3}{3\times10^{-6}\mathrm{F}} = \frac{q'_4}{4\times10^{-6}\mathrm{F}}$ 则 $q'_3 = 0.75q'_4$ 代入前一等式有 $0.75q'_4 + q'_4 = 6\mu$, C $q'_4 = 3.43\mu C$ 则 $q'_3 = 0.75\ q'_4 = 2.57\mu C$.

26.107 两电容器的电容分别为 $C_1 = 3\mu F$, $C_2 = 6\mu F$. 它们串联并由一电压 $V = 10V$ 的电池使之带电. 当与电池断开、直接连接两电容器，求最终各电容器的带电量.

解 ☞ 因两电容器串联，故原来带有等量电荷. 当直接连接两电容器，每个电容器由于中和而带电量为 0.

26.108 在题 26.107 中，若移走电池后，并不直接连接电容器，而是如图 26-33 所示那样连接，求最终每个电容器上的电量.

解 ☞ 原来每个极板带电量为 $Q = C_{eq}V = 20\mu C$. 当如图连接后，$Q_1 + Q_2 = 2Q = 40\mu C$. 又 $V_1 = V_2$, 故 $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$, 解这两个方程同时得到两电容器中 6 μF 电容上带电量为 26.7 μC、3 μF 电容上带电量为 13.3 μC.

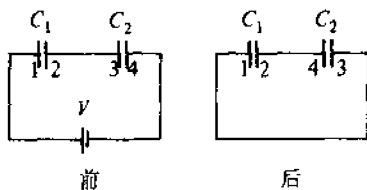


图 26-33

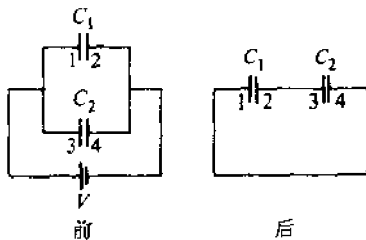


图 26-34

26.109 电容分别为 $C_1 = 4\ \mu F$, $C_2 = 6\ \mu F$ 的两电容器如图 26-34 所示接在 $V = 12\ V$ 的电池上，然后断开并重新如图所示连接. 求每个电容上的最终所带的电荷.

解 ☞ 开始时 $Q_1 = 48\ \mu C$, $Q_2 = 72\ \mu C$. 故 $Q'_1 + Q'_2 = 72 - 48 = 24\ (\mu C)$. 并且 $V'_1 = V'_2$ 得 $Q'_1/C_1 = Q'_2/C_2$, 解之得带电量分别为 9.6 μC 和 14.4 μC.

第二十七章 简单电路

27.1 欧姆定律;电流;电阻

27.1 说明电阻和电阻率的关系.

解 ☞ 一根长为 L 横截面积为 A 的导线的电阻 R 为

$$R = \rho\left(\frac{L}{A}\right)$$

其中 ρ 为常数,称为电阻率.ρ 是导线材料的特征系数.当 L 单位为 m,A 单位为 m^2,ρ 的单位为 $\Omega\cdot m$.

27.2 导体的电阻如何随温度变化?

解 ☞ 若一根导线在温度 T_0 时电阻为 R_0,则它在温度 T 时电阻 R 满足 $R = R_0 + \alpha R_0(T - T_0)$,其中 α 为该导线材料电阻的温度系数.通常 α 是随温度变化而改变的,所以只有在温度变化很小时才能应用线性关系.α 的单位是 K^{-1} 或者℃$^{-1}$.

电阻率随温度的变化具有相似的关系.如果 ρ_0、ρ 分别是温度为 T_0、T 时的电阻率,则 $\rho = \rho_0 + \alpha\rho_0(T - T_0)$.

表 27-1 列出了一些导体在 $T_0 = 20$℃ 时的电阻率和电阻的温度系数.

表 27-1 20℃时的电阻率(ρ)和温度系数(α)

材料	$\rho/\Omega\cdot m$	α/℃$^{-1}$
银	1.6×10^{-8}	3.8×10^{-3}
铜	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
铝	2.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
钨	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
铁	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
石墨(碳)	3500×10^{-8}	-0.5×10^{-3}

27.3 电流强度和电流密度的关系如何?

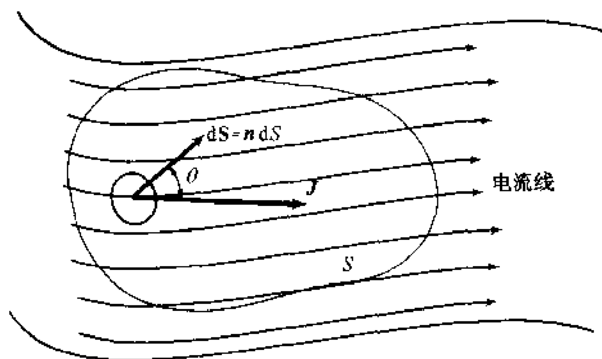


图 27-1

解 ☞ 通过一给定区域(导体内部)电荷流动的速率称为通过该区域的电流强度.

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (A)$$

导体内某一点的电流密度 J 是一矢量,矢量的方向是该点电荷移动的方向,大小等于通过该点单位

垂直截面的电流强度.所以,通过元面积 dS 的电流强度在沿着电流的方向上由 $dI = \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = JdA$ 给出(如图 27-1),其中 $dA = dS\cos\theta$ 是 dS 在垂直于电流方向上的分量.通过表面 S 的所有电流强度为 $I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S JdA$

27.4 从欧姆定律的标准形式 $V = IR$ 出发,求一有电流通过的导体中电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系.

解 ☞ 我们考虑一横截面积为 A 长为 L 的导体.电阻为 $R = \rho(L/A)$,其中 ρ 为电阻率.电流强度可以写成 $I = JA$,电阻两端的电势差与平均电场的关系为 $V = EL$.于是 $V = IR$ 就写成 $EL = JA[\rho(L/A)]$,或 $E = \rho J$.通常用电导率 σ 来代替电阻率,$\sigma \equiv \frac{1}{\rho}$.于是有 $J = \sigma E$.这一结果可以推广到任一导体,写成矢量形式为 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$.

27.5 每秒有多少个电子通过一段电流强度为 0.7 A 的导线?

解 ☞ $I = 0.7$A 也即 0.7 C/s.除以每个电子所带电量的大小 $e = 1.6\times10^{-19}$C,就得到每秒通过的电子数目 $= 0.7/(1.6\times10^{-19}) = 4.4\times10^{18}$.

27.6 一导线通用 7.5 A 的电流持续了 45 s.这段时间(a)多少电量,(b)多少电子通过这根导线?

解 ☞ (a)$q = It = (7.5\text{A})(45\text{s}) = 337.5$ C (b)电子数 N 可由

$$N = \frac{q}{e} = \frac{337.5\text{C}}{1.6\times10^{-19}\text{C}} = 2.1\times10^{21}$$

得出,其中 $e = 1.6\times10^{-19}$C 是每个电子的带电量.

27.7 若 45 分钟内有 0.6mol 电子通过一根导线,求(a)流过导线的电量,(b)电流强度的大小.

解 ☞ (a)0.6mol 电子的数目为 $N = (0.6\text{mol})(6.02\times10^{23}$个/mol$) = 3.6\times10^{23}$个.

$$q = Ne = (3.6\times10^{23})(1.6\times10^{-19}\text{C}) = 5.78\times10^4\text{C}$$

(b)$t = (45\text{min})(60\text{s/min}) = 2.7\times10^3$s

$$I = \frac{q}{t} = \frac{5.78\times10^4\text{C}}{2.7\times10^3\text{s}} = 21.4\text{A}$$

27.8 电视机中的电子枪发出一束电子,形成的电流为 10 μA.则每秒有多少电子打到电视屏上?每分钟打到屏上的电量为多少?

解 ☞ 设 n_e = 每秒打到屏上的电子数.$n_e = I/e = (1.0\times10^{-5}\text{C/s})/(1.6\times10^{-19}\text{C}) = 6.3\times10^{13}$ s^{-1}.打到屏上的电量为 $|Q| = IT = (10\mu\text{C/s})(60\text{s}) = 600\mu$C.因为带电粒子为电子,实际电量为 $Q = -600\mu$C.

27.9 在玻尔模型中,氢原子中的电子在半径为 5.3×10^{-11}m 的轨道上以 2.2×10^6 m/s的速度运动,求此轨道上运行的频率 f 和电流强度 I.

解 ☞

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.2\times10^6\text{m/s}}{2\pi(5.3\times10^{-11}\text{m})} = 6.6\times10^{15}\text{r/s}$$

电子每绕轨道一次,就使闭合电路上带电量 e.在闭合电路中每秒通过其中一点的电量为 $I = ef = (1.6\times10^{-19}\text{C})(6.6\times10^{15}\text{s}^{-1}) = 1.06$mA 注意因电子带负电,电流方向与电子移动的方向相反.

27.10 一根铜导线在 1 cm 长度上有 2×10^{21}个自由电子.设电子沿导线的移动速度为 0.05 cm/s.则每秒有多少电子通过导线的一横截面积?导线中的电流强度有多大?

解 ☞ 每秒电子数 = (电子数/长度)(速度) = $(2\times10^{21})(0.05) = 1\times10^{20}\text{s}^{-1}$.

$$I = Q/t = (1\times10^{20})(1.6\times10^{-19}) = 16\text{A}$$

27.11 烤面包器中一个 8Ω 的电阻两端加上 120V 的电压时通过的电流强度为多大?

解 ☞ 运用欧姆定律:$V = IR$, $120\text{V} = I(8\Omega)$, $I = 15$A.

27.12 要让 3A 的电流流过 28Ω 的电阻,需要多大的电势差?

解 ☞ $V = IR = (3\text{A})(28\Omega) = 84\text{V}$

27.13 若一电阻为 5Ω 的导线每分钟通过的电荷为 720C,求其两端的电势差.

解 ☞ 先求电流,$I = Q/t$,$I = 720\text{C}/60\text{s} = 12\text{A}$. 再运用欧姆定律,$V = IR$,$V = (12\text{A})(5\Omega) = 60\text{V}$.

27.14 一根铜棒通有电流 1200A,长 24cm,电压为 1.2mV.则棒上每米电阻为多大?

解 ☞ 由欧姆定律,对于长 24 cm 的铜棒,$V_{24} = IR_{24}$,$(1.2\times10^{-3}\text{V}) = (1200\text{A})R$,$R_{24} = 1.0\mu\Omega$. 通过比例关系 $R_{100} = (100/24)R_{24} = 4.2(\mu\Omega)$.

27.15 一根金属杆直径为 0.20cm,沿金属杆通过的电流为 3.0A.金属杆长 1.5 m,杆两端的电势差为 40 V.求(a)电流密度,(b)杆内的电场强度,(c)杆材料的电导率.

解 ☞ (a)$J = I/A = 3/(\pi\times10^{-6}) = 9.55\times10^5\text{A/m}^2$;(b)$E = V/d = 40/1.5 = 27(\text{V/m})$;(c)$J = E/\rho$,$\rho = 2.8\times10^{-5}\Omega\cdot\text{m} = 28\mu\Omega\cdot\text{m}$.

27.16 一直径为 0.2 mm 的铜导线与一直径为 5 mm 的铁杆相连接,并通以电流.如果铜中的电流为 8.0 A,求(a)铁杆中的电流强度和电流密度,(b)铜中的电流密度.

解 ☞ (a)因为电荷守恒,$I_{Cu} = I_{Fe} = 8.0\text{A}$,$J_{Fe} = I/A = 8.0/[\pi(5.0\times10^{-3})^2/4] = 407(\text{kA/m})$.
(b)由反比关系得 $J_{Cu} = (5.00/0.20)^2 J_{Fe} = 255(\text{MA/m}^2)$.

27.17 一根铜导线截面积为 30 mm²,通过 5 A 的电流.求导线中电子的漂移速度的大小.

解 ☞ 因为 $J = \dfrac{I}{A} = \dfrac{5.0\text{A}}{3.0\times10^{-6}\text{m}^2} = 1.67\times10^6\text{A/m}^2$

所以漂移速度为 $v = \dfrac{J}{ne} = \dfrac{1.67\times10^6\text{A/m}^2}{n(1.60\times10^{-19}\text{C})} = \dfrac{1}{n}(1.04\times10^{25}\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1})$其中 n 为电子的数密度.要求出 n 必须求出单位体积内的铜原子数.假设每个原子中有一个自由电子,$M = 63.5\text{kg/kmol}$,$\rho = 8920\text{ kg/m}^3$,得 $n = \dfrac{(6.02\times10^{26}/\text{kmol})(8920\text{kg/m}^3)}{63.5\text{kg/kmol}} = 8.5\times10^{28}/\text{m}^3$ 代入漂移速度的表达式得 $v = 0.12\text{ mm/s}$.

27.18[c] 如图 27-2 所示,一根半径为 r_1 的金属杆与一半径为 r_2,长为 L 的圆柱形金属壳同心.杆与圆杆壳之间放入高阻抗材料,电阻率为 ρ.电池如图所示连接,路端电压为 v_t.忽略杆和圆柱面的电阻,求(a)总电流强度 I,(b)杆与圆柱面间 P 点的电流面密 J 和电场强度 E,(c)杆与圆柱面间的电阻 R.

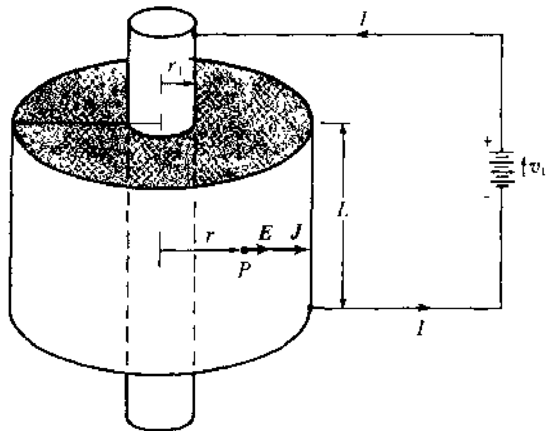


图 27-2

解 ☞ (a)在杆与圆柱面间电荷沿径向流动,可得到 P 点

$$J = \frac{I}{2\pi rL}, \qquad E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi rL}$$

J 和 E 均沿着 r 的方向.根据电势的定义,

$$dv = -E \cdot ds = -E dr = -\frac{\rho I}{2\pi L}\frac{dr}{r}$$

因此,注意到 v_t 的极性,有

$$-v_t = \int_{r_1}^{r_2} dv = -\frac{\rho I}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\rho I}{2\pi L}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

解得 $I = \dfrac{2\pi L v_t}{\rho\ln(r_2/r_1)}$

(b)由(a)的结论,$J = \dfrac{I}{2\pi rL} = \dfrac{v_t}{\rho r\ln(r_2/r_1)}$,　$E = \rho J = \dfrac{v_t}{r\ln(r_2/r_1)}$

(c)由欧姆定律,$R = \dfrac{v_t}{I} = \dfrac{\rho\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L}$

27.19　计算长 180 m,横截面积为 0.3 mm² 的银导线的电阻.(假设 $t = 20℃$.)

解　☞ 电阻可由 $R = \rho(L/A)$ 求得.由表 27-1 得 20℃时银的电阻率 $\rho = 1.6\times10^{-8}\Omega\cdot m$.于是 $R = (1.6\times10^{-8}\Omega\cdot m)(180m)/(0.3\times10^{-6}m^2) = 9.6\Omega$.

27.20　直径为 1 mm 的铝线为多长时其电阻为 4 Ω?(设 $t = 20℃$.)

解　☞ $R = \rho(L/A)$.由表 27-1 $\rho = 2.8\times10^{-8}\Omega\cdot m$.横截面积 A 为 $\pi r^2 = 3.14(0.5\times10^{-3}m)^2 = 7.85\times10^{-7}m^2$.于是 $4\Omega = [(2.8\times10^{-8}\Omega\cdot m)L]/(7.85\times10^{-7}m^2)$,解之得 $L = 112m$.

27.21　20 cm 长的铜管内半径为 0.85 cm,外半径为 1.10 cm.求纵向使用时的电阻.

解　☞ $R = \rho(L/A)$.横截面积为 $\pi[(1.10^2 - 0.85^2)/(4\times10^4) = 3.83\times10^{-5}\ m^2$,因长 $L = 0.20$ m 且由表 27-1 得 $\rho = 1.7\times10^{-8}\Omega\cdot m$.所以 $R = 89\mu\Omega$.

27.22　一根铜杆重 1.5 kg,做成导线在 20 ℃时的电阻为 250 Ω.求导线的长 L 和直径 d.铜的密度为 $8.9\times10^3 kg/m^3$.

解　☞ 由质量 = 密度 × 体积,得 $(8.9\times10^3)LA = 1.5$.同时由表 27-1 给出 $R_{20℃}(1.72\times10^{-8})(L/A) = 250$.同时解这两个方程得 $L = 1.565km$ 和 $A = 0.1077mm^2$.因为 $A = \pi d^2/4$,得 $d = 0.37mm$.

27.23　一根铜导线长 20 m,直径为 0.254 mm.计算导线的电阻.

解　☞ 由表 27-1 知铜的电阻率为 $\rho = 1.7\times10^{-8}\Omega\cdot m$.

$$R = \rho\frac{l}{A} = (1.7\times10^{-8})\left(\frac{20}{\pi(0.000127)^2}\right) = 6.7(\Omega)$$

27.24　求用欧姆·周密耳/英尺(Ω·cir mil*/ft 美国常用单位)作单位计算铜导线的电阻率.

解　☞ 一周密耳(circ mil)表示的面积即为以 mil 作为直径单位时导线的横截面积.其中 1mil = 0.001 in = 2.54×10^{-5} m.所以 1circ mil = $\dfrac{\pi(2.54\times10^{-5})^2}{4}$ m²　1circ mil/ft = $\dfrac{\pi(2.54\times10^{-5})^2/4m^2}{(12\ in)(2.54\times10^{-2}\ m/in)} = 1.65\times10^{-9}$ m.由表 27-1 得

$$\rho_{Cu} = (1.7\times10^{-8}\Omega\cdot m)\frac{1circ\ mil/ft}{1.65\times10^{-9}\ m} = 10.3\Omega\cdot circ\ mil/ft$$

27.25　一卷导线 20℃时电阻为 25.00Ω,35℃时电阻为 25.17Ω.求该电阻的温度系数.

解　☞ $R = R_0[1+\alpha(T-T_0)]$即 $\alpha = \dfrac{\Delta R}{R_0\Delta T}$,因 $\Delta R = R - R_0 = 0.17\ \Omega$,$\Delta T = T - T_0 = 15℃$,故 $\alpha = (0.17)/(25.00\times15) = 4.5\times10^{-4}(℃^{-1})$.

27.26　一根金属导线直径为 2 mm,长为 300 m,20℃时电阻为 1.6424 Ω,150℃时的电阻为 2.415Ω.求 α、R_0、ρ_0 的值(0 代表 0℃)以及 20℃时 $\rho_{20℃}$.判断该金属种类.

---

* 1circ mil = $5.06707\times10^{-10}m^2$.

解 ☞ $R_{150℃}=2.415=R_0(1+\alpha 150)$, $R_{20℃}=1.6424=R_0(1+\alpha 20)$

同时解这两个等式得 $\alpha=3.9\times10^{-3}℃^{-1}$和 $R_0=1.5236\Omega$.

由 $R_0=\rho_0(L/A)$, $1.5236=\dfrac{\rho_0(300)}{\pi(2\times10^{-3})^2/4}$ 即 $\rho_0=1.596\times10^{-8}\Omega\cdot m$ 于是 $\rho_{20℃}=\rho_0(1+\alpha 20)=(1.596\times10^{-8})[1+(3.9\times10^{-3})(20)]=1.720\times10^{-8}(\Omega\cdot m)$查表 27-1 知该金属为铜.

27.27 要制作一阻值为 20 Ω 的导线圈且要求该电阻的热系数为零.现将一阻值为 R_1 的石墨电阻与一阻值为 R_2 的铁电阻串联,使它们的总电阻在 20℃ 附近时为 $R_1+R_2=20.00\Omega$. R_1、R_2 分别为多大?

解 ☞ 由 $R_1(1-\alpha_1\Delta t)+R_2(1+\alpha_2\Delta t)=20$. 因为当 $\Delta t=0$ 时 $R_1+R_2=20$, 所以 $R_1\alpha_1=-R_2\alpha_2$其中 $\alpha_1=-0.5\times10^{-3}$, $\alpha_2=5\times10^{-3}$. 解这两个方程 $R_1+R_2=20$, $R_1=10R_2$ 得 $R_1=18.18\Omega$ 和 $R_2=1.82\Omega$.

27.28 一电阻温度计根据温度升高时阻值升高来测量温度.若一根铂导线在 20℃ 时电阻为 10Ω, 在一热炉处电阻为 35Ω, 求该热炉的温度.(铂的 α 值为 $0.0036℃^{-1}$.)

解 ☞ 假定 α 在已知的温度变化范围内是常数.由 $\Delta R=\alpha R\Delta t$ 得$(35-10)=0.0036(10)\Delta t$.解得 $\Delta t=25/0.036=694(℃)$. 故热炉的温度为 $694+20=714(℃)$.

27.29 一只 75 W 的钨丝灯点亮时电阻为 190Ω, 熄火时电阻为 15Ω. 计算灯泡点亮时钨丝的电阻.

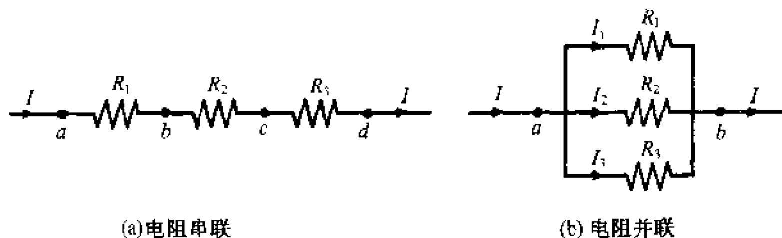
解 ☞ 因为是在温度变化很大的情况下取表 27-1 中的 α 值,所以只能作一粗略的估算.因 $R=R_{20}(1+\alpha\Delta T)$, $\Delta T=\dfrac{R-R_{20}}{\alpha R_{20}}$所以 $T-20℃=\dfrac{(190-15)\Omega}{(45\times10^{-3}℃^{-1})(15\Omega)}=2590℃$, 所以 $T\approx2600℃$.

27.30 一只 60 W 的灯当加以电压为 120 V 时通过的电流为 0.5 A. 钨丝的温度达到 1800℃. 求在该温度下的电阻及 20℃ 时的近似阻值.

解 ☞ 如题 27.29 所示,温度变化很大使得结果不够精确.由 $V=IR$ 求得 $R=240\Omega$. 由 $R=R_{20}(1+\alpha\Delta t)$得 $240=R_{20}[1+4.5\times10^{-3}(1780)]$, 由此得 $R_{20}=26.6\Omega$.

27.2 电阻的联接

27.31 如图 27-3 中(a)、(b)所示,电阻 R_1、R_2、R_3 在(a)中串联在(b)中并联.求每种电路中等效电阻的表达式.



(a)电阻串联　　(b)电阻并联

图 27-3

解 ☞ (a)对于串联电路, $V_{ad}=V_{ab}+V_{bc}+V_{cd}=IR_1+IR_2+IR_3$

因通过每个电阻的电流强度 I 相同.等式两边除以 I,

$$\frac{V_{ad}}{I}=R_1+R_2+R_3\quad 即\ R_{eq}=R_1+R_2+R_3$$

其中 V_{ad}/I 定义为电路的等效电阻R_{eq}.

(b)每个电阻两端的电压是相同的,且

$$I_1=\frac{V_{ab}}{R_1},\quad I_2=\frac{V_{ab}}{R_2},\quad I_3=\frac{V_{ab}}{R_3}$$

总电流 I 为各分支电流之和

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3}$$

两边同除以 V_{ab}，$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$ 或 $R_{eq}^{-1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

其中$\frac{V_{ab}}{I}$即为该电路的等效电阻R_{eq}.

27.32 求三个阻值分别为 $R_1 = 12\ \Omega$、$R_2 = 12\Omega$、$R_3 = 6\Omega$ 的电阻并联时的总电阻.

解 ☞ 总电阻 R 满足 $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12}$，故 $R = 3\Omega$.

27.33 图 27-4 中 A、B 间的电阻为多大?

解 ☞ 对两个并联的电阻 $\frac{1}{R} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$，$R = 2\Omega$，

R 与 8Ω 的电阻串联，得 $R_{AB} = 2\Omega + 8\Omega = 10\Omega$.

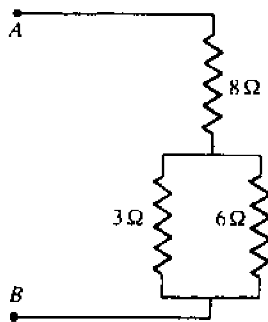


图 27-4

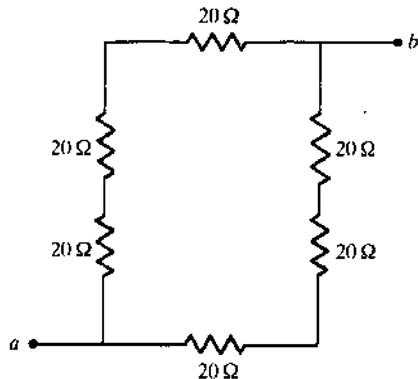


图 27-5

27.34 三个阻值分别为 12Ω、16Ω、20Ω 的电阻并联.应与多大的电阻串联得到总电阻 25Ω?

解 ☞ 并联电路的电阻 R 为

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} = \frac{47}{240}$$

得 $R = 5.11\Omega$，于是 $R_x + R = 25$，则 $R_x = 25 - 5.11 = 19.89(\Omega)$.

27.35 在图 27-5 中，求 a、b 间的电阻值.

解 ☞ 该电路有两个并联支路，且都为 $3(20) = 60(\Omega)$. 于是 $1/R = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{2}{60}$，$R = 30\Omega$.

27.36 一根长为 2 km 的铁导线与一根长为 3 km 的铜导线并联接在电源电压为 200 V 的电路中.铜导线直径为 1 mm；导线的温度均为 100 ℃.若两导线上的电流相等，求电流强度，铁导线的直径及每根导线内的电场强度.

解 ☞ 由表 27-1 可以查得 20℃ 时的电阻率和温度系数.在 100℃ 时

$$R_{Cu} = \frac{(1.7 \times 10^{-8})(3000)}{\pi(10^{-6})/4}[1 + (3.9 \times 10^{-3})(80)] = 85.24(\Omega),$$

$$I_{Cu} = \frac{200}{85.24} = 2.34(A)$$

因每根导线上的电流强度相同，所以

$$R_{Fe} = R_{Cu} = 85.24 = \frac{(10 \times 10^{-8})(2000)}{\pi d^2/4}[1 + (5.0 \times 10^{-3}(80)]$$

由此可得铁导线的直径为 $d = 2.046$ mm. 电场强度为

$$E_{Cu} = \frac{200V}{3000m} = \frac{1}{15}V/m, \quad E_{Fe} = \frac{200V}{2000m} = \frac{1}{10}V/m$$

这些结果也可由 $E = \rho I/A$ 得出.

27.37 一根 50 cm 长的金属杆由铁芯和铜套组成(内直径为 2 mm，外直径为 3 mm)(如图

27-6 所示)，则该金属杆的电阻为多大？（提示：求出电势差为 V 时流过金属杆的电流.）

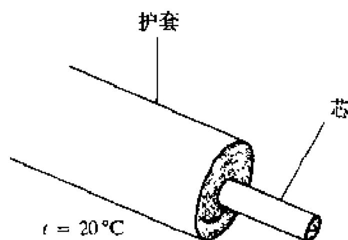


图 27-6

解 ☞ 杆两端的电势差 V 在杆中产生电流 I，由定义 $I = V/R$，而 $I = I_{Cu} + I_{Fe} = V/R_{Cu} + V/R_{Fe}$；$1/R = 1/R_{Cu} + 1/R_{Fe}$. 查表 27-1，$R_{Cu} = \rho_{Cu}(L/A_{Cu}) = [(1.7 \times 10^{-8})\cdot(0.5)]/[\pi(1.5^2 - 1.0^2)\times 10^{-6}] = 0.00216(\Omega)$. 同理对于 Fe，$R = \rho(L/A) = 0.0159\ \Omega$；于是 $1/R = 1/0.00216 + 1/0.0159$ 得 $R = 1.91\ \text{m}\Omega$.

27.38 求出由三个阻值分别为 6 Ω、9 Ω、15 Ω的电阻以各种方式连接形成的阻值. 不一定三个电阻同时连接.

解 ☞ 图27-7给出了各种可能的连接方式及相应的电阻值.

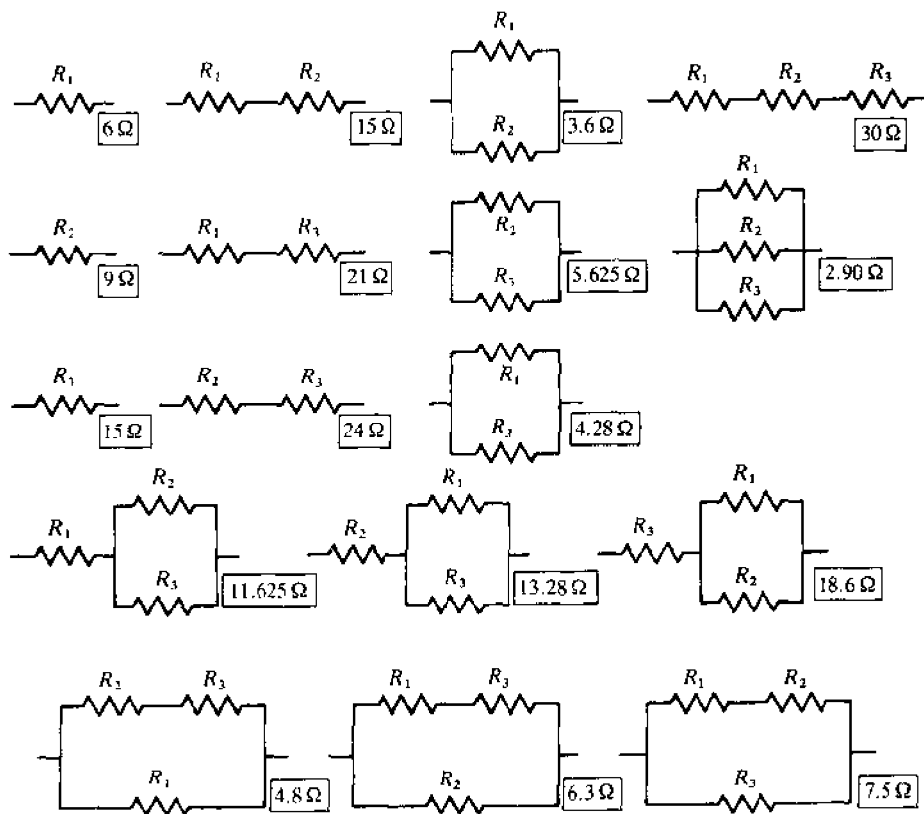


图 27-7

27.39 如何把三个阻值为8Ω、12Ω和16Ω的电阻连接起来，使电路总电阻为 8.89 Ω.

解 ☞ 很显然不能把三个电阻串联连接. 经分析得出，应按如图 27-8 所示的方式接.

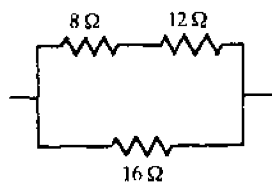


图 27-8

27.40 求出如图 27-9(a)所示的电路中 a、b 两点间的等效电阻.

解 ☞ 3Ω 和 2Ω 两个电阻串联，等效电阻为 5Ω. 5Ω 和 6Ω 两个电阻并联，得到等效电阻 R_1，$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 0.20 + 0.167 = 0.369$ 即 $R_1 = 2.73\Omega$ 电路简化为图 27-9(b)所示.

7Ω 和 2.73Ω 两电阻的等效电阻为 9.73Ω. 现 5Ω、12Ω、9.73Ω 三个电阻并联，等效电阻为 R_2，$\frac{1}{R_2} =$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9.73}=0.386$ 即 $R_2=2.6\Omega$, 2.6Ω 电阻再与 9Ω 的电阻串联,所以整个电路的等效电阻为 $9+2.6=11.6(\Omega)$.

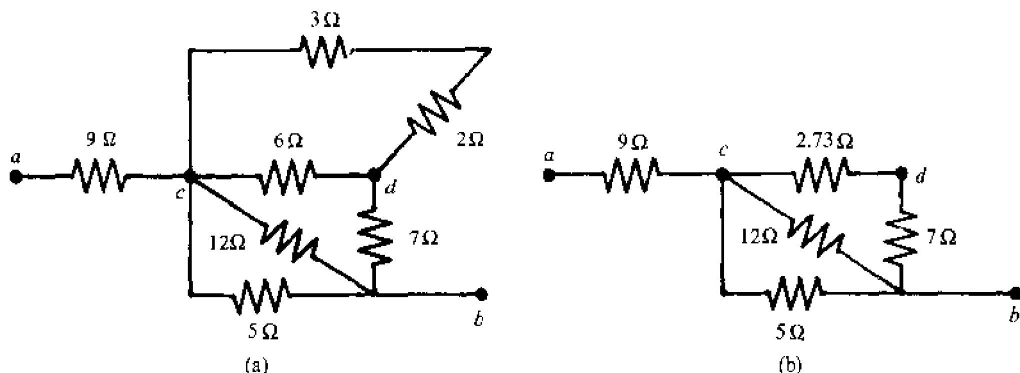


图 27-9

27.41 设图 27-10 中电池的电压为 12 V,电阻依次为 $R_1=50\ \Omega$, $R_2=150\ \Omega$. 求(a)电流强度 I、I_1 和 I_2.(b)电路的总电阻.

解 ☞ (a) $I_1=\frac{E}{R_1}=\frac{12\text{V}}{50\Omega}=0.24\text{A}$, $I_2=\frac{E}{R_2}=\frac{12\text{V}}{150\Omega}=0.08\text{A}$, $I=I_1+I_2=0.32\text{A}$

(b) $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{50\Omega}+\frac{1}{150\Omega}=\frac{4}{150\Omega}$, $R=37.5\Omega$

作为检验, $I=E/R=12\text{V}/37.5\Omega=0.32\text{A}$.

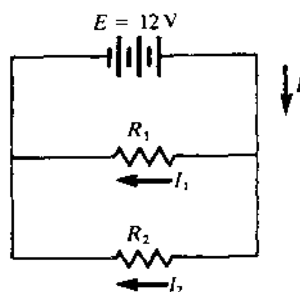


图 27-10

27.42 若图 27-10 中电池的电动势为 45 V,电阻 $R_1=300\Omega$.(a)则 R_2 应为多大才能使电流强度 $I=0.45\text{A}$? (b)求电流强度 I_1、I_2.

解 ☞ (a)总电阻应为 $R=\frac{E}{I}=\frac{4.5\text{V}}{0.45\text{A}}=100\Omega$,

由 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$,得

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}=\frac{1}{100\Omega}-\frac{1}{300\Omega}=\frac{2}{300\Omega}$$

$$R_2=150\Omega$$

(b) $I_1=\frac{E}{R_1}=\frac{45\text{V}}{300\Omega}=0.15\text{A}$, $I_2=\frac{E}{R_2}=\frac{45\text{V}}{150\Omega}=0.30\text{A}$

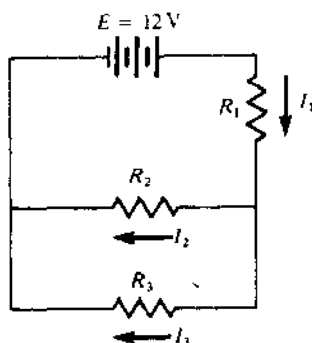


图 27-11

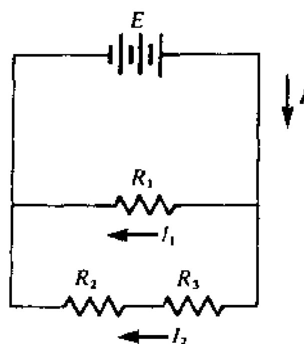


图 27-12

27.43 图 27-11 中三个电阻分别为 $R_1=25\Omega$, $R_2=50\Omega$, $R_3=100\Omega$.(a)求电路中的总电阻,(b)当电池电动势为 12V 时,求电流强度 I_1、I_2、I_3.

解 ☞ (a) R_2、R_3 并联总电阻为 $\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{50\Omega}+\frac{1}{100\Omega}=\frac{3}{100\Omega}$, $R'=33.3\Omega$ R' 与 R_1 串联,电路的总电阻为 $R=R'+R_1=33.3\Omega+25\Omega=58.3\Omega$.

(b) $I=\frac{E}{R}=\frac{12\text{V}}{58.3\Omega}=0.206\text{A}$, R_2、R_3 两端的电压 V', $V'=E-R_1I=12\text{V}-(25\Omega)(0.206\text{A})=6.85\text{V}$. 所以,

$$I_2=\frac{V'}{R_2}=\frac{6.85\text{V}}{50\Omega}=0.137\text{A},\quad I_3=\frac{V'}{R_3}=\frac{6.85\text{V}}{100\Omega}=0.0685\text{A}$$

27.44 图 27-12 上的三个电阻为 $R_1=80\Omega$, $R_2=25\Omega$, $R_3=15\Omega$. (a)求电路的总电阻,(b)当 $I_1=0.3\text{A}$ 时,求电流强度 I、I_2 及电池的电压.

解 ☞ (a) R_2、R_3 串联电阻之和 $R'=R_2+R_3=25\Omega+15\Omega=40\Omega$. 因 R' 与 R_1 并联,电路的总电阻为

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{80\Omega}+\frac{1}{40\Omega}=\frac{3}{80\Omega},\quad R=26.7\Omega$$

(b) $E=R_1I_1=(80\Omega)(0.3\text{A})=24\text{V}$, $I_2=\frac{E}{R'}=\frac{24\text{V}}{40\Omega}=0.6\text{A}$, $I=I_1+I_2=0.9\text{A}$

(验证: $I=E/R=24\text{V}/26.7\Omega=0.9\text{A}$)

27.45 求图 27-13 电路中的电流 I_1、I_2.

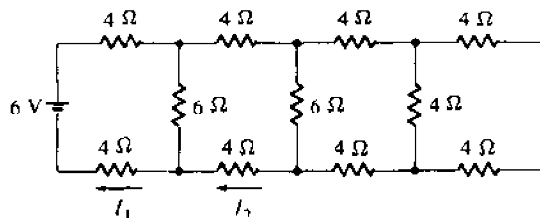


图 27-13

解 ☞ 在图 27-14 中反映了电路的连续简化过程. 由图 27-14(d) $I_1=\frac{6}{12}=0.5(\text{A})$. 图 27-14(c) 中 $V_{ab}=\left(\frac{1}{2}\right)(4)=2.0(\text{V})$. 所以[如图 27-14(b)]导线 acb 上的电势差为 2V, $I_2=\frac{2}{12}=0.167(\text{A})$.

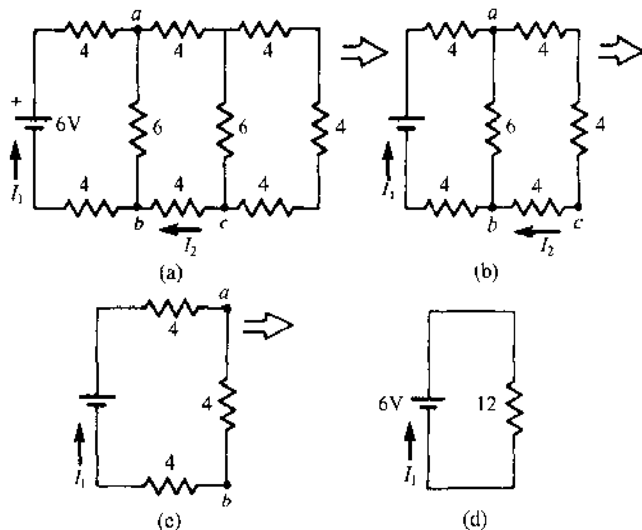


图 27-14

27.46 图 27-15 反映了三个电阻 $R_1=5\Omega$, $R_2=15\Omega$, $R_3=25\Omega$ 组成的四种电路. 求每个电路中的每个电阻上的电流强度 I_1、I_2 和 I_3 以及通过电池的电流强度 I.

解 ☞ (a) $R=R_1+R_2+R_3=45\Omega$, $I_1=I_2=I_3=I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{3.0\text{V}}{45\Omega}=0.067\text{A}$

(b) $I_1=\frac{\varepsilon}{R_1}=\frac{3.0\text{V}}{5.0\Omega}=0.6\text{A}$, $I_2=\frac{\varepsilon}{R_2}=\frac{3.0\text{V}}{15.0\Omega}=0.2\text{A}$

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3} = \frac{3.0\text{V}}{25\Omega} = 0.12\text{A},\ \ I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.92\text{A}$$

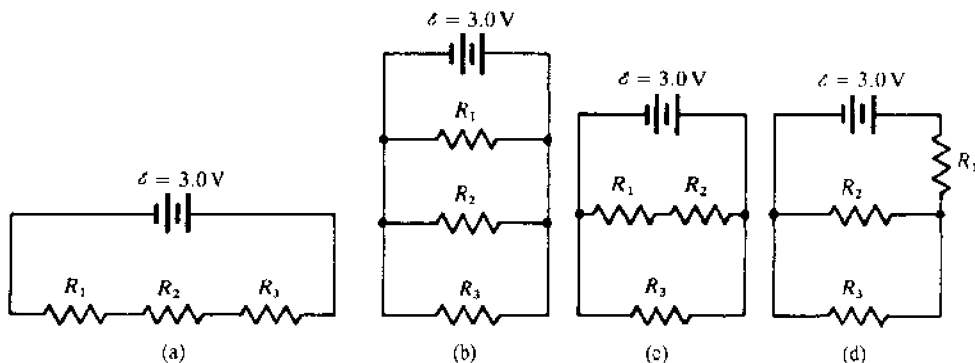


图 27-15

(c) $I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3} = \frac{3.0\text{V}}{25\Omega} = 0.12\text{A}$, $\quad I_1 = I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{3.0\text{V}}{20\Omega} = 0.15\text{A}$

$$I = I_1 + I_3 = 0.27\text{A}$$

(d) $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{25} = \frac{8}{75}$, $\quad R' = 9.375\Omega$

$$I_1 = I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R'} = \frac{3.0\text{V}}{14.375\Omega} = 0.209\text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{\varepsilon - I_1R_1}{R_2} = \frac{1.96\text{V}}{15\Omega} = 0.130\text{A},\quad I_3 = I - I_2 = 0.079\text{A}$$

27.47 已知图 27-16 中 6Ω 的电阻两端的电势差为 48V. 求(a)总电流 I,(b)8Ω 电阻两端的电势差,(c)10Ω 电阻两端的电势差,(d)a、b 两点间的电势差.(提示:可把 c、d 间的导线看成一点而不影响电流或电势.)

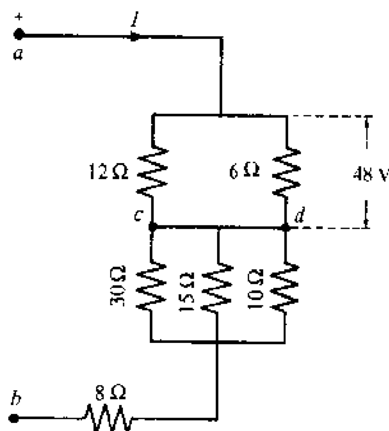


图 27-16

解 ☞ (a)因为 6Ω、12Ω 两个电阻并联,$I = I_6 + I_{12} = 48\text{V}/6\Omega + 48\text{V}/12\Omega = 12\text{A}$. (b)通过 8Ω 电阻的电流为 I,所以 $V_8 = (12\text{A})(8\Omega) = 96\text{V}$. (c)令 R_e 为三个并联电阻 10Ω、15Ω、30Ω 的等效电阻,$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{6}{30}$,得 $R_e = 5\Omega$. 因为三个电阻两端的电压相等,所以 $V_e = V_{10} = IR_e = (12\text{A})(5\Omega) = 60\text{V}$. (d) $V_{ab} = V_6 + V_{10} + V_8 = 48\text{V} + 60\text{V} + 96\text{V} = 204\text{V}$.

27.48 求图 27-17 电路中的等效电阻 R_{eq} 以及 I_1, I_2.(提示:a、b、c、d 在电路中可看作一点.重新作图表示.)

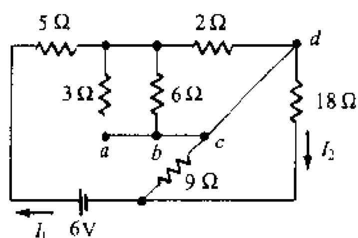


图 27-17

解 ☞ 作出化简的等效图如图 27-18. 等效电阻为 12Ω. 由图 27-18(c) $I_1 = \frac{6}{12} = 0.5(\text{A})$. 18Ω 电阻两端的电压与图 27-18(b)中 6Ω 电阻两端电压相等,为 $6\left(\frac{1}{2}\right) = 3(\text{V})$. 于是 $I_2 = \frac{3}{18} = 0.167(\text{A})$.

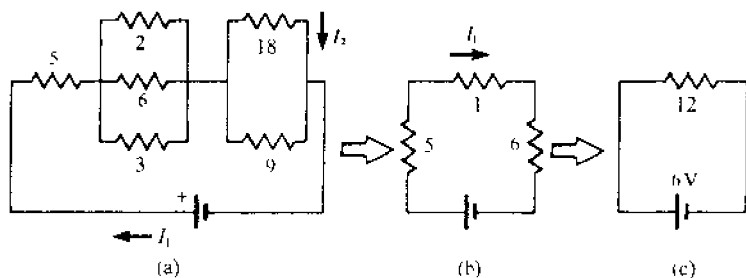


图 27-18

27.3　电动势及电化学系统

27.49　定义:电动势,内阻,灵敏电流计

解　☞ 一个电源的电动势是单位正电荷从化学能或其它形式的能转化为电能的过程中得到的能量. 1C的电荷得到1J的能量时电动势 $\mathscr{E}$ 为1V. 内阻指电源内部的电阻. 灵敏电流计是测量微小电流的仪器;它可分成伏特表和安培表.

27.50　电路中的电势差和电动势是何关系?

解　☞ 电池若不计内阻则两端的电势差等于电池的电动势. 当一电荷 q 从电池的低电压端(负极)由电池内部流向高压端(正极),电池的电动势为 $\mathscr{E}$,则非静电力做功为 $q\mathscr{E}$. 若 q 带正电,非静电力做正功,电池放出能量. 而电场力做大小相等的负功使得静电体系的电势能增加. 当电荷 q 流经外电路再次返回负极,静电能减少为零并由 q 再次经过电池得到补充.

27.51　当电池或电动势源有内阻且有电流流过时路端电压不等于电动势. 求这种情况下电动势与路端电压的关系.

解　☞ 当有电流 I 通过时电池或发电机的路端电压等于总电动势($\mathscr{E}$)减去内阻 r 上的电势降(电压降).

(1)当输出电流(放电)时,路端电压 = 电动势 − 内阻上的电压降 = $\mathscr{E} - Ir$.

(2)当接收电流(充电)时,路端电压 = 电动势 + 内阻上的电压降 = $\mathscr{E} + Ir$.

(3)当没有电流时,路端电压 = 电源或发电机的电动势.

27.52　若 $R = 0.7\Omega$,求图 27-19 中 A、B 两点间的电势差. 哪一点电势高?

解　☞ 显然这是电路的一部分,电路中的电流为 3 A 从 A 点起四个元件的电势差: $V_B - V_A = (-6V) - (3A)(2\Omega) + 9V - (3A)(0.7\Omega) = -5.1V$. V_A 电势高些.

(同样可以把从 A 到 B 的"电压降"相加: $V_A - V_B = 6V + (3A)(2\Omega) + (-9V) + (3A)(0.7\Omega) = 5.1V$,得到的结论相同.)

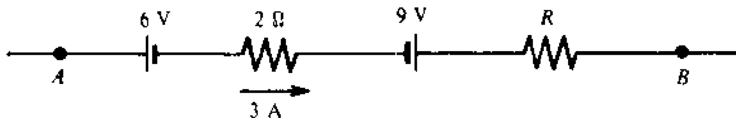


图 27-19

27.53　若 27.52 题中电流沿相反方向, $R = 0.7\Omega$,结果如何?

解　☞ 仍然用 27.52 题中的方法. $V_B - V_A = (-6V) + (3A)(2\Omega) + (9V) + (3A)(0.7\Omega) = 11.1V$. V_B 电势高些.

27.54　一汞镉电池,其温度每升高 1℃,电动势就降低 $40\mu V$. 若温度为 20℃ 时电动势为 1.0183V,则 0℃时的电动势为多少?

解　☞ 因温度降低, $\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_{20} + 20(40\times10^{-6}) = 1.0183 + 800\times10^{-6} = 1.0191(V)$.

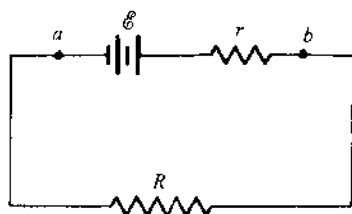


图 27-20

27.55 电池通常都有小内阻.图 27-20 中内阻用 r 表示.若电池电动势为 3.0V, $r = 0.5\Omega$, $R = 5\Omega$, 求电池 ab 之间的路端电压.

解 ☞ 设路端电压 $V = V_b - V_a$,运用欧姆定律, $I = \frac{\mathscr{E}}{R+r} = \frac{3.0\text{V}}{5.5\Omega} = 0.545\text{A}$. 于是 $V = \mathscr{E} - rI = (3.0\text{V}) - (0.5\Omega)(0.545\text{A}) = 2.73\text{V}$

27.56 若图 27-20 电路中 $R = 10\Omega$ 时电流为 0.5A, $R = 20\Omega$ 时电流为 0.27A.求

(a)内阻 r,(b)电池的电动势 $\mathscr{E}$.

解 ☞ (a)对于两种情况, $I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1+r}$, $I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2+r}$,所以 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2+r}{R_1+r}$ 即 $\frac{20\Omega+r}{10\Omega+r} = \frac{0.5\text{A}}{0.27\text{A}} = 1.85$, 解方程求 r 得 $20\Omega + r = 1.85(10\Omega + r)$　$r = \frac{1.5\Omega}{0.85} = 1.76\Omega$.

(b)　$\mathscr{E} = I(R+r) = (0.5\text{A})(10\Omega + 1.76\Omega) = 5.88\text{V}$

27.57 (a)一节 1.5V 的新干电池的短路电路电流为 30A,求电池的内阻,(b)一节 1.5V 的旧干电池短路时电路中电流为 10A,求电池的内阻.

解 ☞ (a)电路中电阻只有电源的内阻,所以 $E = IR$, $1.5 = 30R$, $R = 0.05\Omega$,

(b) $E = IR$, $1.5 = 10R$, $R = 0.15\Omega$

27.58 一发电机的电动势为 120 V,当电路中的电流为 20A 时路端电压为 110 V,求其内阻.

解 ☞　$V = E - ir$, $E = 120\text{V}$, $V = 110\text{V}$, $i = 20\text{A}$. 所以 $110 = 120 - 20r$, $r = 0.5\Omega$.

27.59 一节干电池通过电流为 2A 时路端电压为 1.41V. 电路开路时电压为 1.59V,求其内阻.

解 ☞ 开路电压即电池的电动势,所以 $V = E - ir$, $V = 1.41\text{V}$, $i = 2\text{A}$, $E = 1.59\text{V}$. $1.41 = 1.59 - 2r$, $r = 0.09\Omega$.

27.60 蓄电池的电动势为 25 V,内阻为 0.20 Ω.求下列情况下的路端电压(a)向电路中输出电流为 8A,(b)充电时电流为 8A.

解 ☞ (a) $V = E - Ir = 25\text{V} - (8\text{A})(0.20\Omega) = 23.4\text{V}$,(b)充电时,路端电压为电动势与内阻上电势差之和. $V = E + IR = 25\text{V} + (8\text{A})(0.20\Omega) = 26.6\text{V}$.

27.61 一电池给一开路电压为 5.6 V 的蓄电池充电,电路中电流为 10A.若电池两端的电压为 6.8V,求电池的内阻.

解 ☞ 因为电池放电, $V = E + Ir$, $I = 10\text{A}$, $E = 5.6\text{V}$, $V = 6.8\text{V}$. 于是 $6.8 = 5.6 + 10r$, $r = 0.12\Omega$.

27.62 一汽车电池电动势为 6 V,内阻为 0.01Ω.当发动机从电池获得 200 A 的电流时,求电池的路端电压.

解 ☞　$V_t = \mathscr{E} - Ir = 6 - 200(0.01) = 4(\text{V})$

27.63 三个电阻阻值分别为 4Ω、6Ω 和 12Ω,它们并联连接,电阻与一 1.5V,内阻为 1Ω 的电池相连.求干路中的电流.

解 ☞ 对于三个并联电阻 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$, $R = 2\Omega$ (并联电路的总电阻).由欧姆安律 $\mathscr{E} = I(R+r)$, $1.5 = I(2+1)$,得 $I = 0.5\text{A}$.

27.64 定义以下名词:阳极,阴极,电解,电解质,化合价,化学平衡重量,法拉第,电化学当量,电池的极化,燃料电池,热电动势.

解 ☞ 阳极指电池的正电极.阴极指电池的负电极.电解指溶液中有电流通过时的化学反应过程.电解质是指溶于水时分解成正负离子的物质.化合价指一个离子所带的以电子为单位时的静电

量.离子指带电的原子或原子组.某一元素的化学平衡重量指这种元素一个原子的重量除以它的化合价.1法拉第(F)指任一元素贮存一个化学平衡重量所需的电量;所以,$1F = N_A e = (6.03\times10^{26}\ kmol^{-1})(1.6\times10^{-19}C) = 9.65\times10^{7}C/kmol$.某元素的电化学当量等于法拉第除以化学当量值.极化表现为电池的两极有气泡出现,导致电动势减小而内阻增加.燃料电池是指含有活性材料且反应产物不断移动的电池.只要上述过程不断进行电池就能起作用.热电动势是指两根不同的金属串联且两端温度不同时热能转化为电能所产生的电动势.

27.65 试描述电解过程.

解 ☞ 当电解质放入水中,它分解成带正、负电荷的离子,使得溶液变为电导体.当溶液的两极加上电势差,正电荷向阴极聚集,负电荷向阳极聚集,这就产生了化学变化.

27.66 写出反映法拉第电解规律的等式.

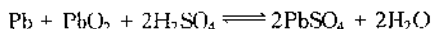
解 ☞ 法拉第电解规律认为(a)给定电量放出物质的质量与通过电解电池的电量或与电流和时间的乘积($Q = It$)成正比;(b)给定电量放出不同元素的质量与该元素原子量除以原子的化合价成正比.这两种表述可合写为一简单等式:$m = QA/FV$,其中 m = 存贮元素的质量,kg;Q = 传输的电荷,C;A = 元素的原子量,kg/mol;v = 化合价(无单位).

27.67 什么是电池组?

解 ☞ 电解电池通常是把化学能转化为电能.电池组通常是由一个或几个这样的电池构成.若化学能转化为电能的反应不可逆向进行,这类电池称为原电池.反之如果化学反应可逆,这类电池称为副电池,这种电池可进行多次的充放电.

27.68 举出原电池和副电池的常见例子.

解 ☞ 原电池的一个例子就是常见的干电池.这种电池正极是碳,负极是锌.副电池的一个例子是广为使用的铅-酸蓄电池.因这种电池的化学反应可逆,所以可以多次使用.该电池充满电时的电动势为2.2V



$$Pb + PbO_2 + 2H_2SO_4 \longrightarrow 2PbSO_4 + 2H_2O$$

27.69 什么是温差电偶?

解 ☞ 由两根不同材料的金属条两端焊接并将接触点放在不同温度下构成的回路,称为温差电偶.温差电偶在把热能转化为电能过程中产生电动势.这一电势差称为塞贝克电动势,大约有几毫伏.塞贝克电势是由汤姆逊电动势和珀耳帖电动势组成的,其中珀耳帖电动势稍大一些.温差电偶常通过测量温差电动势来测量高温[用铂-铂铑合金(10%的铑)制成,温差电偶测得温度可高达1700℃],普通温度计在这一温度已经融化.

27.70 银离子电量为 e,每个离子重为108kg/kmol.当把两电极插入硝酸银溶液并通电,银离子在阴极上形成银原子.若电流为0.20A,10分钟内会电镀出多少银?假设溶液中通过银离子形成电流.

解 ☞ 10分钟内通过的总电量为 $Q = It = 0.20(600) = 120(C)$;离子数 $= Q/e = 7.5\times10^{20}$.每个离子的质量为 $108/N_A = 1.8\times10^{-25}kg$,所以银的质量 = (每个银离子的质量)(离子数) $= (1.8\times10^{-25}kg)(7.5\times10^{20}) = 1.35\times10^{-4}kg = 135mg$.

27.71 带电量为 $2\times10^{-4}F$ 的电荷通过含有铁离子(Fe^{+++})的电解电池.假设只发生极化反应 $Fe^{+++} + 3e^- \rightarrow Fe$,则被存贮的离子的质量为多少?(铁原子量为55.85.)

解 ☞ 由27.66题,

$$m = \frac{Q}{F}\frac{Q}{v} = (2\times10^{-4})\frac{55.85}{3} = 3.72\times10^{-3}(kg) = 3.72(g)$$

27.72 电流依次流过镀铜容器和镀银容器,10分钟后电镀出铜0.400 g,则电镀出的银有多少?银和铜的原子量分别为108和63.54.

解 ☞ 设电镀出银的质量为 m_1,电镀出铜的同质量为 m_2;银的原子量为 A_1,铜的原子量为 A_2;银的化合价为 V_1,铜的化合价为 V_2.由题27.66得

$$m_1=\frac{Q}{9.65\times10^7}\frac{A_1}{v_1},\qquad m_2=\frac{Q}{9.65\times10^7}\frac{A_2}{v_2}$$

m_1 除以 m_2 得 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{A_1v_1}{A_2v_1}$, $\frac{m_1}{0.400}=\frac{108(2)}{63.54(1)}$, $m_1=1.36\text{g}$ 为电镀出银的质量

27.73 与电镀银的容器相连的安培表读数为 0.90A，该容器中在 39 分钟内贮存铜 2.60g．求安培表读数的误差（银的原子量为 108）．

解 ☞ 运用 27.66 题结论，得 $m=\frac{Q}{9.65\times10^7}\frac{A}{v}$, $Q=It$, $m=\frac{It}{9.65\times10^7}\frac{A}{v}$,

$$2.60\times10^{-3}=\frac{I(39\times60)}{9.65\times10^7}\left(\frac{108}{1}\right),\ I=\frac{(2.60)(9.65\times10^4)}{39(60)(108)}=0.993(\text{A})$$

$$\frac{0.993-0.90}{0.993}=9.3\%\ \text{误差}$$

27.74 (a)计算金的电化学当量．金的原子量为 197.0，化合价为 3，(b)每小时要在阴极上存储 5 g 的金需要多大的电流？

解 ☞ (a)电化学当量 $=\frac{\text{当量值}}{F}=\frac{(197.0/3)\text{kg/kmol}}{9.65\times10^7\text{C/kmol}}=0.681\text{mg/C}$

(b)存储的质量 =（电化学当量）（移动的电量）

$$5\text{g}=(6.81\times10^{-4}\text{g})(I\times3600\text{s}),\quad I=2.04\text{A}$$

27.75 银的电化学当量 Z 为 1.118mg/C．则 10A 的电流在 5 分钟内能电解出多少银？

解 ☞ $Z=\frac{m}{Q}$，所以 $1.118\times10^{-6}=\frac{m}{It}=\frac{m}{10(5\times60)}$,

$$m=3000(1.118\times10^{-6})\text{kg}=3354\times10^{-3}\text{kg}=3.35\text{g}$$

27.76 铬-康铜温差电偶在两结点温度每相差 1℃，温差电动势变化 70μV．如果 100 个这样的温差电偶组成温差电堆，若热结头的温度为 240℃，冷结头的温度为 20℃，则电压为多大？

解 ☞ 温差电堆是温差电偶的串联连接．所以当 $\mathscr{E}_0=70\mu\text{V}$,

$$V=100\mathscr{E}_0(T_2-T_1)=100(70\times10^{-6})(240℃-20℃)=1.54\text{V}$$

27.77 试解释生物活性电池的电势及能斯脱(Nernst)电势．

解 ☞ 活性电池的电势是由电池内外离子浓度的不同和电池中不同离子对于细胞壁的渗透性不同引起的．平衡时的电势差由两边渗透离子的浓度 c_1 和 c_2 决定（见表 27-2），等式写成 $V=V_1-V_2=\pm2.3\frac{kT}{e}\log\frac{c_1}{c_2}$ 这就是能斯脱平衡电势差．当只有正离子可以渗透膜时 V 取正，当只有负离子可以渗透膜时 V 取负．这里 k 为玻尔兹曼常数，T 是绝对温度．在体温 37℃ kT/e 的值为

$$\frac{kT}{e}=\frac{(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(310\text{K})}{1.60\times10^{-19}\text{C}}=0.0267\text{V}=26.7\text{mV}$$

所以能斯脱电势差为 $V=V_1-V_2=\pm(61.4\text{mV})\log\frac{c_1}{c_2}$.

表 27-2

离子	浓度/(mol/L) c_E(外细胞)	c_I(内细胞)
K^+	0.005	0.141
Na^+	$\frac{0.142}{0.147}$	$\frac{0.010}{0.151}$
Cl^-	0.103	0.004
A^{-*}	$\frac{0.044}{0.147}$	$\frac{0.147}{0.151}$

* 代表其它所有的单价离子

27.78 细胞液中细胞壁可以透过带负电的有机离子 A^-（见题 27.77），由这些离子产生的能斯脱电势差为多大？

解 ☞ $V_I - V_E = (61.4\text{mV})\log\left[\frac{c_I}{c_E}\right] = (61.4\text{mV})\log\frac{0.147}{0.044} = (61.4\text{mV})\log 3.34 = +32.1\text{mV}$

27.79 一层薄膜把 0.5 mol/L 的 NaCl 溶液与 1.5mol/l 的 NaCl 溶液分成两部分且只有 Na^+ 离子能渗透而 Cl^- 离子不能渗透.求溶液温度为 10℃时薄膜两端的能斯脱电压.($k = 1.38\times10^{-23}$J/K.)

解 ☞ $V_1 - V_2 = -2.3\frac{kT}{e}\log\frac{c_1}{c_2} = -(2.3)\frac{(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(283\text{ K})}{1.6\times10^{-19}\text{C}}\log\frac{1.5}{0.5}$

$= -(0.056\text{V})\log 3 = -(0.056\text{V})(0.477) = -26.7\text{mV}$

负号表示低电压端溶液浓度高.

27.4 电测量

27.80 在图 27-21 所示的电路中,理想安培表 A 读数为 2A.(a)若 XY 为一电阻,求其阻值,(b)若 XY 是一电池(内阻为 2Ω)且正在被充电,求其电动势,(c)求在(b)情况下 Y 点与 X 点的电势差.

解 ☞ 理想安培表内阻为 0.(a)$\mathscr{E} = 40 - 8 = 32$(V).$R_T = r_1 + r_2 + 3\Omega + R_e + R_{XY}$,其中 $r_1 = 2\Omega$,$r_2 = 2\Omega$;$1/R_e = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$,$R_e = 4\Omega$.所以 $R_T = 11\Omega + R_{XY}$.由欧姆定律,$\mathscr{E} = IR_T$,$32\text{V} = (2\text{A})(11\Omega + R_{XY})$,$R_{XY} = 5\Omega$.(b)$\mathscr{E} = 32\text{V} - \mathscr{E}_{XY}$,$R_T = 11\Omega + 2\Omega = 13\Omega$.所以$(32\text{V} + \mathscr{E}_{XY}) = (2\text{A})(13\Omega) = 26\text{V}$,$\mathscr{E}_{XY} = -6\text{V}$.负号表示 X 为负极,电池正在被充电.(c)$V_X - V_Y = -6\text{V} - (2\text{A})(2\Omega) = -10\text{V}$.

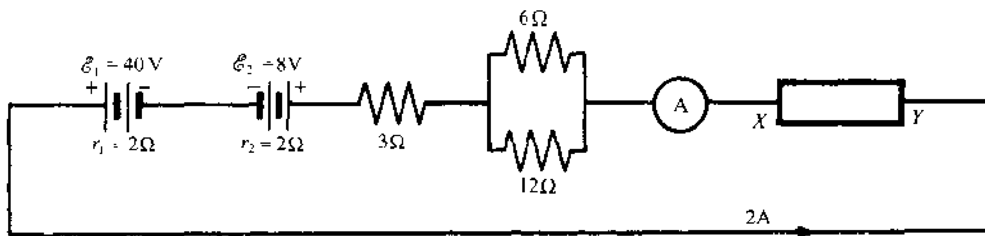


图 27-21

27.81 如何利用安培表和伏特表测电阻?

解 ☞ 电流是通过在电路中串联一(低阻值)安培表进行测量.电势差是通过在电阻两端并联一(高阻值)伏特表进行测量.根据欧姆定律,电阻等于伏特表读数除以安培表读数,即 $R = V/I$.(若需精确测量电阻值,还需在电路中考虑伏特表和安培表的阻值.)

27.82 一安培表与一未知阻值的电阻串联,伏特表接在电阻的两端.若安培表读数为 1.2A,伏特表读数为 18V,求电阻的阻值.假设为理想电流计.

解 ☞ 伏特表测出电阻两端的电压,安培表所测的电流是伏特表与电阻并联电路的总电流.因伏特表是理想电表,电阻可认为无穷大,且认为所有电流都从电阻流过.于是 $R = V/I = 18\text{V}/1.2\text{A} = 15\Omega$.

27.83 某一电流计电阻为 400Ω 且满量程时电流为 0.2 mA.现要使其量程达到 3A,则应并联一多大的电阻?

解 ☞ 在图 27-22 中画出电流计 G 和分流电阻,在电流计满量程时,电流分布如图.

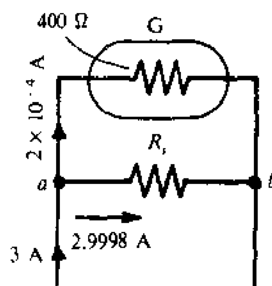


图 27-22

因 G 与 R_s 在 a、b 两端电压相等,所以$(2.9998\text{A})R_s = (2\times10^{-4}\text{A})(400\Omega)$由此得 $R_s = 0.027\Omega$.

27.84 电阻 R_x 与一电流计串联构成一量程为 5 V 的伏特表.电流计电阻为 80 Ω 且在其两

端电压为 20 mV 时电流计指满. 求 R_x.

解 ☞ 当电流计指满时,流过的电流为

$$I = \frac{V}{R} = \frac{20 \times 10^{-3}\text{V}}{80\Omega} = 2.5 \times 10^{-4}\text{A}$$

由于 R_x 与电流计串联,所以当 I 为 2.5×10^{-4}A 时该串联电路两端电压为 5V. 所以由 $V = IR$ 得 $5\text{V} = (2.5 \times 10^{-4}\text{A})(80\Omega + R_x)$, 得 $R_x = 19.92\text{k}\Omega$.

27.85 把多大的分路电阻与一阻值为 40 mΩ 的安培表并联能使总电流的 25% 通过安培表?

解 ☞ 安培表与分路电阻上的电压相同,所以对于安培表 $V = (0.25I)(0.04\Omega)$, 对于分路电阻 $V = (0.75I)R_s$. 把两等式相除得 $1 = (1/3)(0.04/R_s)$. 解之得 $R_s = 13.3\text{m}\Omega$.

27.86 把一 36Ω 的电流计与一 4Ω 的分流电阻并联. 则总电流中有多少部分通过电流计?

解 ☞ 电流计与分路电阻并联,设电路总电流为 I. 于是对于电流计 $V = aI(36\Omega)$, 其中 $0 \leqslant a \leqslant 1$; 对于分路电阻 $V = (1-a)I(4\Omega)$. 所以 $36a = 4(1-a)$, $a = 1/10$. 有百分之十的电流通过电流计.

27.87 如图 27-23(a)所示的电路中用一 20kΩ 的伏特表和一 5mΩ 的安培表测一未知电阻. 电表读数分别为 9.00 V 和 800μA. (a)求未知电阻的阻值,(b)若如图 27-23(b)所示连接各电表的读数为多少? (c)哪一种接法更好?

解 ☞ 这里通过比较用伏特表读数除以安培表读数求得的 R 来判断哪种接法更好. (a)比值 $V/A = 9.00/(800 \times 10^{-6}) = 11.25\text{k}\Omega$. 而 R_x 真实值求法如下: 通过伏特表的电流 $= 9.00/(20 \times 10^3) = 0.45\text{mA}$, 则通过 R_x 的电流为 $0.80 - 0.45 = 0.35\text{mA}$; 所以 $R_x = 9.00\text{V}/(0.35\text{mA}) = 25.7\text{k}\Omega$. 所以 V/A 是很粗糙的近似. (b)安培表的读数即为通过 R 的电流 0.35mA, 而伏特表的读数为 $9.00\text{V} + (0.35\text{mA})(0.050\Omega) \approx 9.00\text{V}$; 所以 $V/A = 25.7\text{k}\Omega$. (c)图 27-23(b)的接法更好.

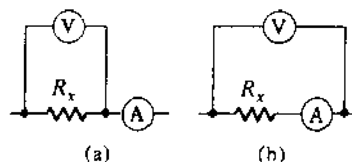


图 27-23

27.88 一 1400 Ω 的电阻与一 200 Ω 的电阻及电动势为 12 V 的电池串联. (a)把一阻值为 5000 Ω 的伏特表与 1400 Ω 的电阻并联,求电路中电流的变化,(b)若与 200 Ω 的电阻并联呢? (c)求(a)中伏特表的读数,(d)求(b)中伏特表的读数.

解 ☞ 原来电流 $I = 12/(1400 + 200) = 7.5(\text{mA})$. (a)把 5000 Ω 的伏特表与 1400 Ω 的电阻并联,电阻变为 $1093 + 200\ \Omega$; $I = 9.28\text{mA}$, $\Delta I = +1.78\text{mA}$. (b)当伏特表接在 200 Ω 的电阻上,电路电阻 $= 192.3 + 1400$, 电流为 7.536 mA, 电流改变 $+36\ \mu\text{A}$. (c) 1400 Ω 电阻两端的电压为 $12 - 200(9.28 \times 10^{-3}) = 10.15(\text{V})$ (无伏特表时,电压为 0.5V). (d)伏特表读数为 $12 - 1400(7.536 \times 10^{-3}) = 1.45\ (\text{V})$(无伏特表时电压为 1.5 V).

27.89 试解释惠斯通电桥以及它是如何求出一未知电阻 X 的. 这种方法测电阻的优点是什么?

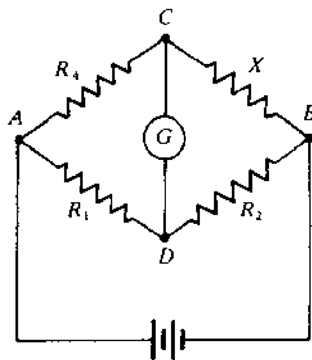


图 27-24

解 ☞ 惠斯通电桥的电路如图 27-24 所示. R_A、R_1 和 R_2 表示阻值已知且可变的电阻,调节这些电阻使电流计读数为零. 于是点 C、D 电势相同,设上支路的电流为 I_C 下支路的电流为 I_D. 由已知得 $I_C R_A = I_D R_1$, $I_C X = I_D R_2$. 为求 X, 可将这两个等式相比:

$$\frac{X}{R_A} = \frac{R_2}{R_1}, \qquad X = \frac{R_2}{R_1} R_A$$

因为电流计读数为零,故不会因为它的电阻带来误差. 同时,由于不需知道电池两端的电压,所以这方面的误差也可以避免.

27.90 如图 27-25 用惠斯通电桥测量电阻 X. 平衡时电流计读数为零,电阻 L、M、N 的阻值

分别为 3Ω、2Ω 和 10Ω. 求 X 的大小.

解 ☞ 由 27.89 题 $X/10 = 3/2$, 得 $X = 15\Omega$.

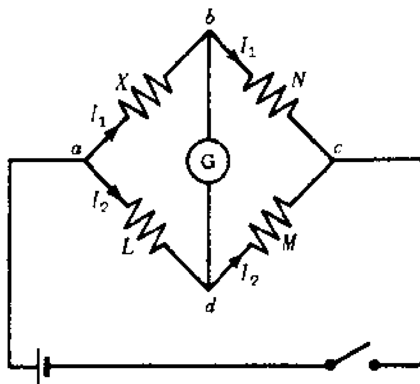


图 27-25

27.91 滑线惠斯通电桥平衡时滑线 AB 分成如图 27-26 所示的两部分. 求电阻 X 的值.

解 ☞ 容易看出该桥与图 27-25 相类似, 用相同的符号表示四个电阻, 于是

$$\frac{X}{3\Omega} = \frac{L}{M} = \frac{40\text{cm}}{60\text{cm}}, \quad X = 2\Omega$$

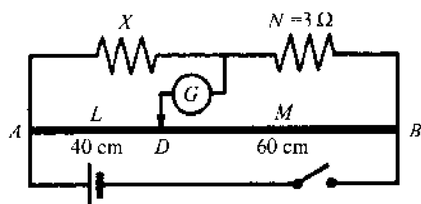


图 27-26

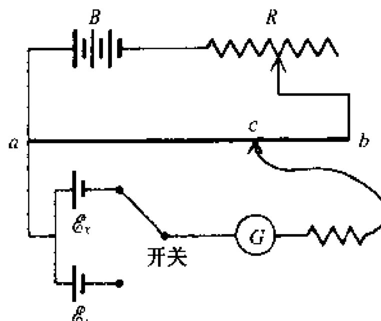


图 27-27

27.92 解释电位差计并说明如何用它测量电势差和未知电源.

解 ☞ 电位差计是用来准确测量路端电压的仪器, 测量时没有电流通过未知电源. 图 27-27 中的滑线电阻 ab 通过电源 B 供电. 为测量未知电动势 $\mathscr{E}_x$, 移动滑动触头 C 直到电位计读数为零. a、c 间的电势差等于 $\mathscr{E}_x$, 与 $\overline{ac}$ 长度成正比. 标准时, 把接头从 $\mathscr{E}_x$ 移至标准电池 $\mathscr{E}_s$ 上, 移动滑动接点至导线 ab 上的 d 点使电位计再次指零. 于是 $\mathscr{E}_x/\mathscr{E}_s = \overline{ac}/\overline{ad}$, 根据已知标准电池电动势 $\mathscr{E}_s$ 以及测得的 ac、ad 的长度可以容易地得到 $\mathscr{E}_x$.

27.93 图 27-28 所示的滑线式电位差计有一稳定电流通过均匀电阻导线. 当测量一未知电动势时, 接头位于 45 cm 处时电位差计达到平衡. 接入一电动势为 1.018 V 的标准电池, 接头位于 30 cm 处时达到平衡. 求未知电动势.

解 ☞ 运用 27.92 题的结论, $\mathscr{E}_x/\mathscr{E}_s = \overline{ac}/\overline{ad}$, 即 $\mathscr{E}_x/1.018\text{V} = 45/30$, $\mathscr{E}_x = 1.527\text{V}$.

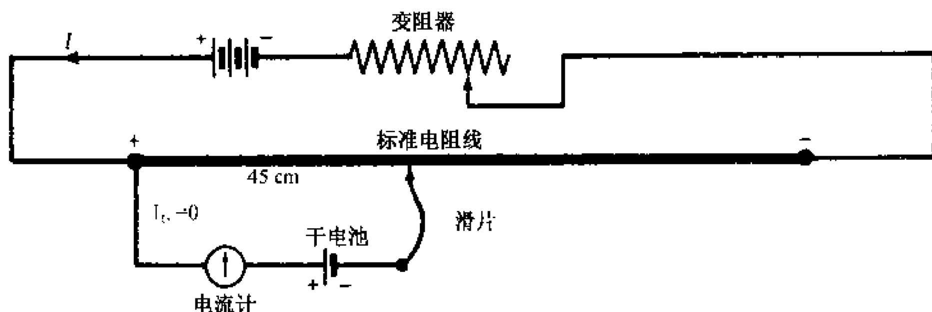


图 27-28

27.5 电功率

27.94 求一电阻 R 流过电流为 I 时消耗的电功率.

解 ☞ 当电阻中通过的电流为 I,则在其两端产生的电压降为 $V=IR$.对于通过导体的每一个电荷 q,静电力所做的功为 Vq,许多静电能被消耗掉.因为电流 I 恒定,所以电荷的漂移速度一定,这一能量只能以电阻的热能表示出来.消耗的电功率为 $P=Vq/t=VI$.运用欧姆定律得 $P=I^2R=V^2/R$.

27.95 求非电力电源向电系统提供的功率.

解 ☞ 对于理想电源,电动势 $\mathcal{E}$ 等于路端电压 V.例如在一电池中,电子从电池负极移到正极,化学力做功 $\mathcal{E}q$.这一功转化为静电能 Vq.当有稳定电流 I 流过时,时间 t 内通过的电量为 q,于是 $I=q/t$.则化学力的功率为 $P=\mathcal{E}q/t=\mathcal{E}I$

对于内阻为 r 路端电压为 V 的非理想电池,我们得到的功率=获得的静电功率减去消耗掉的功率,即 $\mathcal{E}I=VI+I^2r\Rightarrow V=\mathcal{E}-Ir$.

27.96 0.50 A 的电流通过 200 Ω 的电阻.求电阻消耗的电功率.

解 ☞ 功率 $=VI=I^2R=(0.50)^2(200)=50$(W),这部分消耗的电功率将转化为电阻上的热量.每秒消耗的能量为 50 J,即大约放出 50/4.184 = 12 cal 的热量.

27.97 一标有 120 V/90 W 的电灯接在 120 V 的电源上.求电灯的电阻及流过的电流.

解 ☞ 因为 $p=VI$,可以求出 $I=\frac{p}{V}=\frac{90\text{ W}}{120\text{ V}}=\frac{3}{4}$ A.因为电灯上的电势差为 120 V,通过的电流为 $\frac{3}{4}$A,由欧姆定律得 $R=\frac{V}{I}=\frac{120\text{ V}}{0.75\text{ A}}=160\ \Omega$.

27.98 一理想电池电动势为 1.5 V,当通过的电流为 0.2 A 时放出的电功率为多少?

解 ☞ 电势差 V 即为电池的电动势,$P=I\mathcal{E}=(0.2\text{ A})(1.5\text{ V})=0.3$ W.

27.99 求一标有 1000 W 120 V 的电烤箱的电阻.

解 ☞ 该电阻消耗的功率 $P=VI$,$1000=120\ I$,$I=8.333$ A.由欧姆定律,$V=IR$,$120=8.333\ R$ 得 $R=14.4\ \Omega$.(直接由 $P=V^2/R$,$1000=120^2/R$,得 $R=14.4\Omega$.).

27.100 若两个电阻并联,证明每个电阻的放热功率与阻值成反比.

解 ☞ 因两阻值上电压 V 相等,$P_1=V^2/R_1$;$P_2=V^2/R_2$,这表明 $P\propto\frac{1}{R}$.

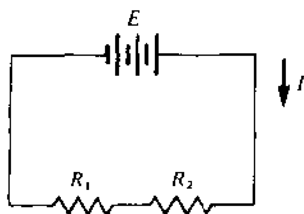


图 27-29

27.101 设如图 27-29 所示的理想电池的电动势为 4.5 V,电阻 $R_1=3\Omega$,$R_2=6\Omega$,求(a)电路的总电阻,(b)电路中的电流,(c)每个电阻消耗的功率.

解 ☞ (a)$R=R_1+R_2=3\Omega+6\Omega=9\Omega$.(b)$I=\frac{E}{R}=\frac{4.5\text{V}}{9\Omega}=0.5$A.(c)$P_1=R_1I^2=(3\Omega)(0.5\text{A})^2=0.75$W.$P_2=R_2I^2=(6\Omega)(0.5\text{A})^2=1.50$W.作为检验 $P=EI=(4.5\text{V})(0.5\text{A})=2.25\text{W}=P_1+P_2$.

27.102 家用电路电压为 120 V,接有三盏灯的电功率分别为 40 W、60 W 和 75 W.求三盏灯的等效电阻.

解 ☞ 家用电路各用电器是并联的.由 $P=VI=V^2/R$,求得第一盏灯的电阻 $R_1=\frac{V^2}{P}=\frac{(120)^2}{40}=360(\Omega)$.同理,$R_2=240\Omega$,$R_3=192\Omega$.于是

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{360\Omega}+\frac{1}{240\Omega}+\frac{1}{192\Omega},\qquad R_{eq}=82\Omega$$

作为检验,先求出总功率为 40 + 60 + 75 = 175 (W).再由 $P=V^2/R$,$R_{eq}=\frac{V^2}{\text{总功率}}=\frac{120^2}{175}=82\ (\Omega)$.

27.103 接在 12 V 电池上的阻值为 4 Ω 的灯

泡消耗的电功率为多少？若换阻值为 2 Ω的灯泡呢？哪一个灯更亮？

解 ☞ $P_{4\Omega}=\dfrac{V^2}{R}=\dfrac{(12\text{V})^2}{4\Omega}=36\text{W},\qquad P_{2\Omega}=\dfrac{(12\text{V})^2}{2\Omega}=72\text{W}$

因为功率越大灯泡越亮，所以 2 Ω 的灯比 4 Ω 的灯亮.

27.104 一理想电池电动势 $\mathscr{E}=12$ V，串联接入两盏灯阻值分别为 $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$. 求电路的电流强度和每盏灯消耗的功率.

解 ☞ 电路的总电阻为 $R=R_1+R_2=2\Omega+4\Omega=6\Omega$，电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{12\text{V}}{6\Omega}=2\text{A}$$

R_1 两端的电势差为 $V_1=R_1I=(2\Omega)(2\text{A})=4\text{V}$，$R_2$ 两端的电势差为 $V_2=R_2I=(4\Omega)(2\text{A})=8\text{V}$. 两电阻的电势差之和等于电池电动势. 电阻上消耗的电功率分别为

$$P_1=R_1I^2=(2\Omega)(2\text{A})^2=8\text{W},\quad P_2=R_2I^2=(4\Omega)(2\text{A})^2=16\text{W}$$

27.105 一灯泡有两个灯丝、三个接点且与三根导线相连，如图 27-30 所示. 现改变插座接头，分别在 ab, bc 和 ac 上加上 120 V 电压. (a)若 $R_1=144\Omega$, $R_2=216\Omega$，则三盏灯上消耗的电功率分别为多少？(b)该灯泡可以消耗的功率分别为 300 W、100 W、75 W. 求两灯丝的阻值.

解 ☞ (a)接入 ab：$P_1=\dfrac{V^2}{R_1}=\dfrac{(120\text{V})^2}{144\Omega}=100\text{ W}$

接入 bc：$P_2=\dfrac{V^2}{R_2}=\dfrac{(120\text{V})^2}{216\Omega}=67\text{W}$

接入 ac：$P_3=\dfrac{V^2}{R_1+R_2}=\dfrac{(120\text{V})^2}{360\Omega}=40\text{W}$

(b)功率最大时阻值最小，所以

接入 ab：$P_1=\dfrac{V^2}{P_1}=\dfrac{(120\text{V})^2}{300\text{W}}=48\Omega$

接入 bc：$P_2=\dfrac{V^2}{P_2}=\dfrac{(120\text{V})^2}{100\text{W}}=144\Omega$

检验：接入 ac $\quad P_3=\dfrac{V^2}{P_3}=\dfrac{(120\text{V})^2}{75\text{W}}=192\Omega=R_1+R_2$

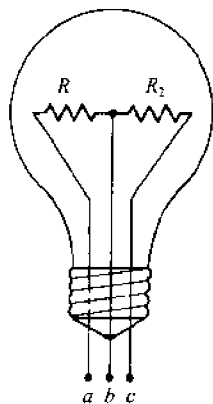


图 27-30

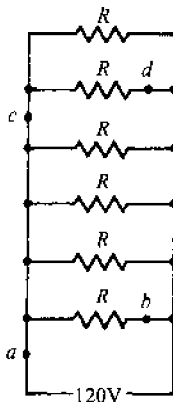


图 27-31

27.106 六盏圣诞树灯并联连接，如图 27-31 所示. 当两端电压为 120 V 时每盏灯消耗的功率为 10 W. (a)求每盏灯的电阻，(b)所有灯的总电阻有多大？(c)电路所消耗的总功率为多少？(d)求 a、b、c、d 点的电流.

解 ☞ (a)对于每盏灯 $R=\dfrac{V^2}{P}=\dfrac{(120\text{V})^2}{10\text{W}}=1440\Omega$

(b)$\dfrac{1}{R_t}=\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}=\dfrac{6}{R}$，$\quad R_t=\dfrac{R}{6}=240\Omega$

(c)$P=\dfrac{V^2}{R_t}=\dfrac{(120\text{V})^2}{240\Omega}=60\text{W}$

(d) $I_a = \frac{V}{R_t} = \frac{120\text{V}}{240\Omega} = 0.5\text{A}$, $I_b = \frac{V}{R} = \frac{120\text{V}}{1440\Omega} = 0.083\text{A}$, $I_c = I_a - 4I_b = 0.167\text{A}$ $I_d = I_b = 0.083\text{A}$

27.107 有六盏灯构成串联电路，如图 27-32 所示.（过去圣诞树上的灯按此接法连接.）每盏灯有相同的电阻 R，当整个电路接入的电压为 120 V 时，电路消耗的电功率为 60 W.（a）求每盏灯的阻值，（b）电压为 120 V 时电路中的电流为多少？（c）求每盏灯上电压为 120 V 时消耗的电功率，（d）把这一电路与 27.106 题中的电路作一个比较并讨论串联电路的缺点.

解 ☞ (a) $R_t = 6R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\ \text{V})^2}{60\text{W}} = 240\Omega \quad R = 40\Omega$

(b) $I = \frac{V}{R_t} = \frac{120\text{V}}{240\Omega} = 0.5\text{A}$

(c) $P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120\text{V})^2}{40\Omega} = 360\text{W}$

(d) 串联电路中任一盏灯断路，所有的灯都熄灭.

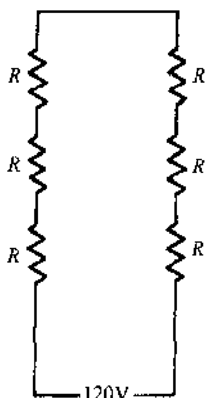


图 27-32

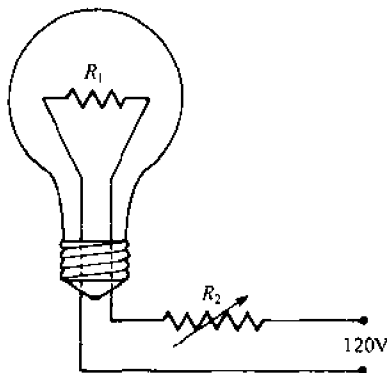


图 27-33

27.108 如图 27-33 所示电路中有一阻值为 $R_1 = 144\Omega$ 的灯和一可变电阻 R_2 串联，电路两端电势差为 120 V. 通过改变 R_2 的大小改变灯的亮度. 求灯上消耗的电功率.（a）R_2 为零时，（b）当 $R_2 = 144\Omega$ 时，（c）要使灯上消耗的功率为 50 W，R_2 应为多大？

解 ☞ (a) $I = \frac{V}{R_1} = \frac{120\text{V}}{144\Omega} = 0.833\text{A}, \quad P_1 = R_1 I^2 = (144\Omega)(0.833\text{A})^2 = 100\text{W}$

(b) $I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{120\text{V}}{288\Omega} = 0.4165\text{A}, \quad P_1 = R_1 I^2 = (144\Omega)(0.4165\text{A})^2 = 25\text{W}$

(c) $I^2 = \frac{P_1}{R_1} = \frac{50\text{W}}{144\Omega} = 0.347\text{A}^2, \quad I = 0.589\text{A}$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{V}{I} = \frac{120\text{V}}{0.589\text{A}} = 203.7\Omega, R_2 = R - R_1 = 59.7\Omega$$

27.109 对于图 27-15 中每个电路，求每个电阻上消耗的电功率以及电池的输出总功率（见题 27.46）.

解 ☞ 由题 27.46 中求出的电流计算电功率，见表 27-3.

表 27-3

	电路 a/W	电路 b/W	电路 c/W	电路 d/W
$P_1 = I_1 R_1^2$	0.022	1.80	0.112	0.218
$P_2 = I_2 R_2^2$	0.067	0.60	0.337	0.258
$P_3 = I_3 R_3^2$	0.112	0.36	0.360	0.152
$P_b = I\mathcal{E} = P_1 + P_2 + P_3$	0.201	2.76	0.809	0.628

27.110 一小型电站为2000盏并联的白炽灯供电.每盏灯需电压110 V且电阻为220 Ω.(a)求电站提供的总电流,(b)求2000盏灯消耗的总功率.

解 ☞ (a)对于每盏灯,运用欧姆定律,$I=V/R=110/220=0.5(\mathrm{A})$.对于所有并联电灯,总电流为 $I_t=2000I=2000(0.5)=1000(\mathrm{A})$(总电流).(b)$R_t=V/I_t=110/1000=0.11(\Omega)$, $P_t=I^2R_t=(1000^2)(0.11)=1.1\times10^5(\mathrm{W})=110(\mathrm{kW})$.

27.111 电动势为9.0V的电池在外电路中产生电流0.75 A,经过30分钟.求(a)电池产生的电功率,(b)电池产生的总能量.

解 ☞ (a)$P=\mathscr{E}I=(9.0\mathrm{V})(0.75\mathrm{A})=6.75\mathrm{W}$,(b)$t=(30\ \mathrm{min})(60\mathrm{s/min})=1800\ \mathrm{s}$ 能量 $E=Pt=(6.75\mathrm{W})(1800\mathrm{s})=12.1\mathrm{kJ}$.因为是用电动势 $\mathscr{E}$ 而非路端电压来计算 P,所以即使电池有内阻上述结论仍成立.当然内阻上也要消耗部分的能量.

27.112 一理想电池与125Ω的电阻相连,消耗的功率为2.6W.求(a)电池的电动势,(b)电阻上的电流.

解 ☞ (a)由等式 $P=V^2/R$ 得 $V^2=PR=(2.6\mathrm{W})(125\Omega)=325\mathrm{V}^2$,所以电动势 $\mathscr{E}=V=18.0\mathrm{V}$.(b) $I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{18.0}{125\Omega}=0.144\mathrm{A}$

27.113 一节旧电池内阻很大.设用伏特表测得该电池的电压为1.40V,而用电位差计测得的值为1.55V.求(a)电池的电动势,(b)电池内阻,(c)电阻能从电池获得的最大功率.设电压表的电阻为280Ω.

解 ☞ (a)这节干电池可看成是理想电压源 $\mathscr{E}$ 与电阻 r 串联而成[如图27-34(a)].当没有电流流过时,两端的电势差就是理想电压源的电压,即为电池的电动势 $\mathscr{E}$.因为电位差计在测量时不需要电流,所以其测量的值就是电池的电动势1.55 V.(b)当用阻值为280 Ω的伏特表与电池相连如图27-34(b)所示,电池中有电流流过.假设伏特表读数正确,则电池两端的电势差 V_B-V_A 就是伏特表的读数1.40 V,也就是伏特表上的电压降 IR.所以 $I(280)=1.40$, $I=0.0050\mathrm{A}$.由图27-34(b)的串联方程($\mathscr{E}=1.55\mathrm{V}$):$1.55-Ir-I(280)=0$, $I=0.0050\mathrm{A}$,求得电池的内阻 r 为30Ω.(c)在图27-34(c)所示的电路中,电阻 R 上消耗的电功率为

$$P=I^2R=\left(\frac{\mathscr{E}}{r+R}\right)^2R=\frac{\mathscr{E}^2}{4r}\left[1-\left(\frac{r-R}{r+R}\right)^2\right]$$

可见当 $R=r$ 时 P 的最大值为 $\mathscr{E}^2/4r$.(也可用微积分来计算 P 的最大值.)

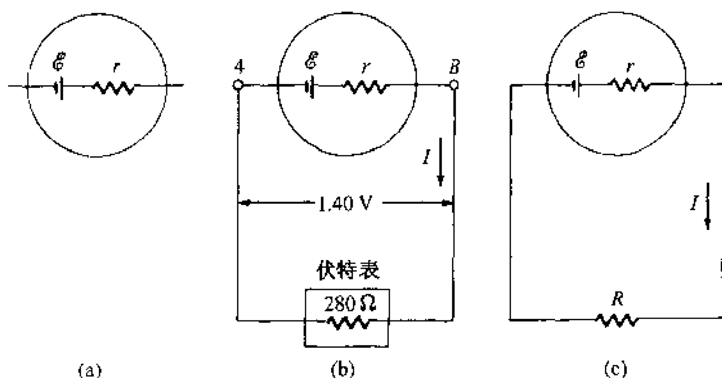


图 27-34

27.114 用500 W的加热器把250 mL的水从20 ℃加热到100 ℃至少需要多少时间?

解 ☞ 产生的电能为 $Pt=500t$ J,其中 t 的单位是s.加热水需要的热能:$mc\Delta T=(0.250\mathrm{kg})(4.184\mathrm{kJ/kg\cdot K})(80\mathrm{K})=83.7\mathrm{kJ}$.所以 $0.500t_{\min}=83.7$, $t_{\min}=167\mathrm{s}$.

27.115 通过一加热器把一杯咖啡(200mL)在0.5min内从20℃加热至90℃,则加热器在120V的电压下通过的电流为多少?

解 ☞ 咖啡的比热和质量可用水的比热与质量代替.所需的热能为 $Q=cm\Delta T=(4.184)(0.200)(70)=58.6(\text{kJ})$；$P=$能量$/t=58.6/30=1.95(\text{kW})$.电功率 $P=VI$，$I=1950/120=16.3\text{A}$.

27.116 1 m长的标准规格的铜导线的电阻为 8.1 mΩ.(a)当电流为 20 A时，1 m长的该铜导线上损耗的能量为多少？(b)若导线的横截面积为 2.1 mm²，则导线温度升高 5 ℃至少需多长时间？($\rho_{cu}=8.92\times10^3\text{kg/m}^3$，$c_{cu}=0.093\text{kcal/kg}\cdot℃$.)

解 ☞ (a)$P=I^2R=20^2(8.1\times10^{-3})=3.24(\text{W})$，(b)铜的质量为 $\rho V=(8.92\times10^3\text{kg/m}^3)(1\text{m})(2.1\times10^{-6}\text{m}^2)=0.0187\text{ kg}$.于是 $Pt=Q=(0.093)(0.0187)(5.0)(4184\text{J/kcal})$，$t=11.2\text{s}$.

27.117 铅蓄电池的能量密度为 80kJ/kg，也就是说 1 kg 的该电池可存贮 80 kJ 的能量.若一 12 V 的汽车电池质量为 15 kg 且电压保持恒定，则该充满电的电池在放完电之前能维持 5 A 的电流多长时间？

解 ☞ 由 $(12\text{V})(5\text{A})(t)=(8\times10^4\text{J/kg})(15\text{kg})$ 得 $t=(2\times10^4\text{s})/(3600\text{s/h})=5.56\text{h}$.

27.118 上题中充满电的 12 V 电池在放完电之前可给电容为 5 μF 的电容器充电多少次？

解 ☞ 电池所带的总电荷为 $(5\text{A})(2\times10^4\text{s})=1.0\times10^5\text{C}$.每次电容器所带的电荷为 $Q=CV=(5\mu\text{F})(12\text{V})=60\mu\text{C}$.可充电的次数为 1.67×10^9.

27.119 位于华盛顿州的大坝发电站大约供电能力为 9.8GW.若输电电压为 120 V，则从电厂出来的输电导线上的电流为多大？电压为 1 MV 呢？求当 10kA 电流通过 1 m 长横截面积为 0.01 m² 的铜杆时放出的热量.(所需数据可查表 27-1.)

解 ☞ $P=VI$，$9.8\times10^9=120\,I$，$I=81.7\text{MA}$.当电压是 10^6V，$I=9.8\text{kA}$.铜杆的电阻为 $R=(1.7\times10^{-8})(1/0.01)=1.7\times10^{-6}(\Omega)$.功率 $=I^2R=(10^4)^2(1.7\times10^{-6}\Omega)=170(\text{J/s})=41(\text{cal/s})$.

27.120 什么是交变电流或交变电压的有效值？

解 ☞ 当交变电动势——做简谐变化的电动势 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_p\cos(\omega t+\delta)$——是仅含电阻的能量源时，电流也作同样的变化：$I=I_p\cos(\omega t+\delta)$.其中 $\mathscr{E}_p$ 是最大电动势，$\mathscr{E}$ 是即时电动势，ω 是角频率，δ 是初相位.同理 I_p、I 分别是最大电流和即时电流.$\mathscr{E}_{rms}$是 $\mathscr{E}^2$ 在一个周期内平均值的平方根.可以证明 $\cos^2(\omega t+\delta)$在一个周期内的平均值为$\frac{1}{2}$，于是$(\mathscr{E}^2)_{avg}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_p^2$，$\mathscr{E}_{rms}=\mathscr{E}_p/\sqrt{2}$.类似有 $I_{rms}=I_p/\sqrt{2}$.若一电路总的等效电阻为 R，由 $\mathscr{E}=IR$，两边消去余弦项得 $\mathscr{E}_p=I_pR$.于是 $\mathscr{E}_{rms}=I_{rms}R$.消耗的平均功率为$(I^2R)_{avg}=(I^2)_{avg}R=\frac{1}{2}I_p^2R=I_{rms}^2R$.电动势产生的平均功率为 $\overline{P}=P_{avg}=(\mathscr{E}I)_{avg}=\mathscr{E}_pI_p(\cos^2(\omega t+\delta))_{avg}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_pI_p=\mathscr{E}_{rms}I_{rms}$.同理对于通以交变电流 I 的任一电阻，$V=IR\Rightarrow V_{rms}=I_{rms}R$，$V$ 是电阻上的交变电压.

27.121 一交变电压最大值为 75 V，把它与 15 Ω 的电阻相连.求(a)电流的有效值，(b)电阻上消耗的平均功率.

解 ☞ (a)$I_p=\frac{V_p}{R}=\frac{75\text{V}}{15\Omega}=5\text{A}$，　$I_{rms}=\frac{I_p}{\sqrt{2}}=\frac{5A}{1.41}=3.53(\text{A})$

(b)$\overline{P}=RI_{rms}^2=(15\Omega)(3.53\text{A})^2=187.5\text{W}$

27.122 一交变电流有效值为 2.4 A，把它与 25 Ω 的电阻相连.求(a)电阻两端电压的最大值，(b)电阻上消耗的平均电功率.

解 ☞ (a)$V_{rms}=RI_{rms}=(25\Omega)(2.4\text{A})=60\text{V}$

$V_p=\sqrt{2}V_{rms}=(1.41)(60\text{V})=84.6\text{V}$

(b)$\overline{P}=RI_{rms}^2=(25\Omega)(2.4\text{A})^2=144\text{W}$

27.123 随着电功率的下降，有效电压降至 108 V.(a)下降过程中电压的最大值为多少？(b)如果一用电器在有效电压为 120 V 时消耗的电功率为 850 W，则在下降过程中消耗的电功率为多少？

解 ☞ (a) $V_p=\sqrt{2}\,V_{rms}-(1.41)(108\text{V})-152\text{V}$

(b) $\overline{P}=\dfrac{V_{rms}^2}{R}$, 所以 $R=\dfrac{V_{rms}^2}{\overline{P}}-\dfrac{(120\text{V})^2}{850\text{W}}=16.9\Omega$

有效电压为 108V 时, $\overline{P}=\dfrac{V_{rms}^2}{R}-\dfrac{(108\text{V})^2}{16.9\Omega}-690\text{W}$

27.6 复杂电路;基尔霍夫电路定律;接有电容的电路

27.124 阐述基尔霍夫定律.

解 ☞ 基尔霍夫节点定律:流向节点的电流之和等于从节点流出的电流之和.
基尔霍夫回路定律:对于闭合回路,电位变化的代数和为零.这一求和中,电位升高取正,电位降低取负.

27.125 在图 27-35 中,求 k 断开时的 I_1、I_2 及 I_3.

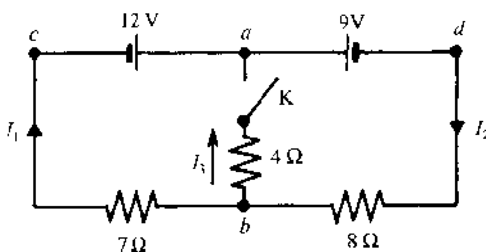


图 27-35

解 ☞ 当 k 断开时,因为没有电流流过断开的分支, $I_3=0$. 对于 a 点运用节点定律, $I_1+I_3-I_2$, $I_2-I_1+0=I_1$ 对 $acbda$ 运用回路电压定律,

$$-12+7I_1+8I_2+9=0 \tag{1}$$

可以从电流总是从高电位流向低电位来理解所取的符号.因为 $I_2=I_1$,(1)式写成 $15I_1=3$,即 $I_1=0.20\text{A}$. 所以 $I_2=I_1-0.20\text{A}$. 这一结果也可用一 3V 的电池来代替原题中的两个电池来得到.

27.126 在图 27-35 中,求 k 闭合时的电流 I_1、I_2 和 I_3.

解 ☞ 与题 27.125 对比,当 k 闭合时, I_3 不再为零.对 a 点用节点定律得

$$I_1+I_3=I_2 \tag{2}$$

对 $acba$ 运用回路电压定律得

$$-12+7I_1-4I_3=0 \tag{3}$$

对 $adba$ 运用回路电压定律得

$$-9-8I_2-4I_3=0 \tag{4}$$

再对整个回路 $acbda$ 运用回路电压定律得到一个多余的方程,因为这三个回路方程中每个电压出现了两次.

我们通过求解方程(2),(3)和(4)来求 I_1、I_2 及 I_3. 由(4)式得 $I_3=\ \ 2I_2-2.25$, 代入(3)式有 $-12+7I_1+9+8I_2=0$, 即 $7I_1+8I_2-3$. 把 I_3 代入(2)式有 $I_1-2I_2-2.25=I_2$, 即 $I_1-3I_2+2.25$ 于是

$$21I_2+15.75+8I_2-3, \text{即 } I_2=\ \ 0.44\text{ A}$$

由此解得

$$I_1-3(\ \ 0.44)+2.25--1.32-2.25=0.93(\text{A})$$

注意负号也是我们求得的 I_2 的一部分,电路中电流的大小为 0.44A. 运用(2)式得

$$I_3=I_2-I_1=(-0.44)\ \ 0.93--1.37(\text{A})$$

此题仅用简单的并联、串联方法是不能解出的.

27.127 如图 27-36 所示的电路,求未知电池 $\mathscr{E}$ 的电压.安培表用—Ⓐ—表示,可认为是理想的(无电阻),读数为 $\frac{1}{2}$A, 方向如图所示.(记住 $\mathscr{E}$ 代表电动势)我们假设所有电池是理想的.

解 ☞ 首先标出每根导线上电流的方向.因为若求出的电流为负,说明实际电流与假设电流方向相反,所以不必担心所标的电流方向是否正确.图中已标出电流 I_1、I_2, 导线上 $P-$、$A-$、$B-$、C 间的电流为 I_2, 而 $C-$、D 、$F-$、$P-$ 间的电流为 $\frac{1}{2}$A. 写出 P 点的节点电流方程为 $\frac{1}{2}+I_1-I_2$

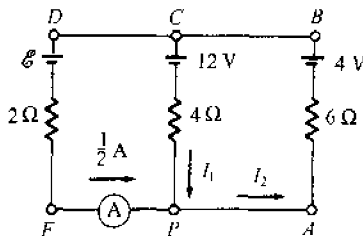


图 27-36

$=0$. 回路 $CDFPC$ 的电路方程为 $-\mathscr{E}-\left(\frac{1}{2}\right)(2)-4I_1+12=0$. 假设安培表为理想电表，电阻为零. 同理，对于回路 $CBAPC$，有 $-4+6I_2+4I_1+12=0$. 还可以写出其它回路方程，但它们并不独立. 因为已有的方程中已经覆盖了所有的电路单元，其它方程不能提供更新的信息. 现在，用三个方程来解三个未知数 I_1, I_2 和 $\mathscr{E}$. 解之得 $I_1=-1.1\text{A}$, $I_2=-0.6\text{A}$, $\mathscr{E}=6.6\text{V}$

27.128 图 27-37 中每个电池的电动势为 1.5V，内阻为 0.075Ω. 求 I_1, I_2 和 I_3.

解 ☞ 对 a 点运用节点定律

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1}$$

对 $abcea$ 电路运用回路电压定律

$$-(0.075)I_2 + 1.5 - (0.075)I_2 + 1.5 - 3I_1 = 0$$

$$3I_1 + 0.15I_2 = 3 \tag{2}$$

对 $adcea$ 电路运用回路电压定律

$$-(0.075)I_3 + 1.5 - (0.075)I_3 + 1.5 - 3I_1 = 0$$

$$3I_1 + 0.15I_3 = 3 \tag{3}$$

把(2)式中 $3I_1$ 代入(3)式，得 $3-0.15I_2+0.15I_3=3$，即 $I_2=I_3$. 这一结论也可由(2)、(3)比较得到. 由(1)得 $I_1=2I_2$，代入(2)式有

$$6I_2 + 0.15I_2 = 3, I_2 = 0.488\text{A}$$

$$\text{于是 } I_3 = I_2 = 0.488\text{A}, I_1 = 2I_2 = 0.976\text{A}$$

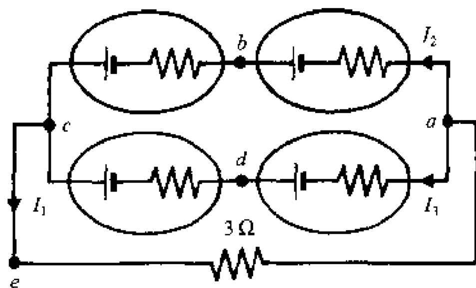


图 27-37

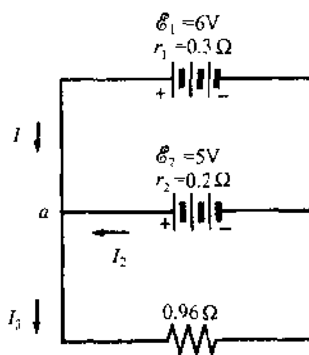


图 27-38

27.129 对于如图 27-38 所示的电路，求通过 0.96 Ω电阻的电流以及电池的路端电压.

解 ☞ 在图 27-38 中的 a 点

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{1}$$

选取两个小回路，按逆时针方向，有 $6\text{V}-(0.3\Omega)I_1-5\text{V}+(0.2\Omega)I_2=0$，即

$$3I_1 - 2I_2 = 10 \tag{2}$$

以及 $5\text{V}-(0.2\Omega)\cdot I_2-(0.96\Omega)I_3=0$，即

$$2I_2 + 9.6I_3 = 50 \tag{3}$$

把(1)式代入(3)式消去 I_3 得

$$9.6I_1 + 11.6I_2 = 50 \tag{4}$$

(2)式两边同时乘以 5.8 得

$$17.4I_1 - 11.6I_2 = 58 \tag{5}$$

把(4)式与(5)式相加：$27\ I_1=108$, $I_1=4.0$ A 代入(2)式得 $I_2=1.0\text{A}$；由(1)式，$I_3=5.0\text{A}$, $V_1=\mathscr{E}_1-I_1r_1=6\text{V}-(4.0\text{A})(0.3\Omega)=4.8\text{V}$, $V_2=\mathscr{E}_2-I_1r_2=5\text{V}-(1.0\text{A})(0.2\Omega)=4.8\text{V}$

27.130 求图 27-39 中的电流 I_1、I_2 和 I_3 以及 b、e 两点间的电势差.

解 ☞ 对 d 点,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{1}$$

在两个小回路中按顺时针方向,对于上部回路,$15V - (1\Omega)I_1 - (9.5\Omega)I_1 + 10V + (0.5\Omega)I_2 = 0$,即

$$21I_1 - I_2 = 50 \tag{2}$$

对于下回路 $-10V - (0.5\Omega)I_2 + (1.4\Omega)I_3 - 3V + (0.1\Omega)I_3 = 0$,即

$$I_2 - 3I_3 = -26 \tag{3}$$

将(1)代入(3)消去 I_3,得

$$3I_1 + 4I_2 = -26 \tag{4}$$

将(2)式两边乘以 4 并与(4)式相加,得 $87I_1 = 174$,即 $I_1 = 2A$. 代入(2)式得 $I_2 = -8A$. 由(1)得 $I_3 = 6A$ 因为 $V_e = V_a$,所以

$$V_e - V_b = V_a - V_b = -15V + (1\Omega)(2A) = -13V$$

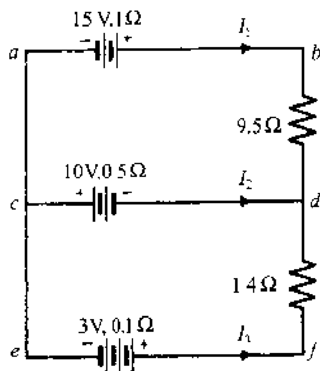


图 27-39

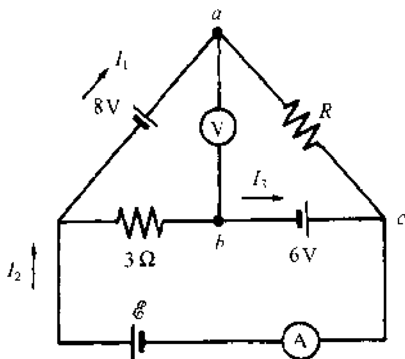


图 27-40

27.131 在图 27-40 中,$R = 10\Omega$, $\mathscr{E} = 13V$,求理想安培表、理想伏特表的读数.

解 ☞ 因为电源未标有内阻,假设内阻为零.理想伏特表的电阻无限大,流过的电流近似为零.同理,安培表两端的电压为零.对于 C 点

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \tag{1}$$

对于矩形回路,$13V - (3\Omega)I_3 + 6V = 0$,即 $3I_3 = 19$, $I_3 = 6.3A$.对于大三角回路,$8V - (10\Omega)I_1 - 6V + (3\Omega)I_3 = 0$;代入 I_3 的值得 $I_1 = 2.1A$.于是由方程(1),$I_2 = 8.4A$ = 安培表读数.伏特表的读数为 $V_a - V_b = 8V + (3\Omega)I_3 = 27V$.

27.132 求图 27-41 电路中各个支路上的电流.

解 ☞ 运用基尔霍夫定律

$$I_1 = I_3 + I_2 \tag{1}$$

上回路中 $V_1 = 4I_3 + 3I_1$,即

$$5 = 4I_3 + 3I_1 \tag{2}$$

大回路,$V_1 - V_2 = 2I_2 + 3I_1$,即 $5 - 2 = 2I_2 + 3I_1 = 2(I_1 - I_3) + 3I_1$,这里已用了(1)式.所以得 $3 = 5I_1 - 2I_3$,两边同乘以 2 得 $6 = -4I_3 + 10I_1$.将上式与(2)式相加.得

$$\begin{aligned} 6 &= -4I_3 + 10I_1 \\ 5 &= 4I_3 + 3I_1 \\ \hline 11 &= \quad 13I_1 \end{aligned}$$

所以 $I_1 = \frac{11}{13}$A.在前一方程中解出 I_3: $3 = \frac{55}{13} - 2I_3$, $-\frac{16}{13} = -2I_3$, $I_3 = \frac{8}{13}$A.最后由(1)式得 $I_2 = I_1 - I_3 = \frac{11}{13} - \frac{8}{13} = \frac{3}{13}$(A).

27.133 求图 27-42 电路中的电流 I_1、I_2、I_3 和 I_4.

解 ☞ 回路方程为 $-6 + 6 - 10I_4 = 0$,故 $I_4 = 0$.(这一结论说明 I_1、I_2 仅分别流过两个 3Ω 的电

阳.) $+6-3I_1+12I_3=0$; $-6-12I_3-3I_2=0$. 节点电流方程为 $I_2=I_1+I_3$. 同时解出 I_1、I_2、I_3 及 I_4 分别为 0.222 A, 0.222 A, −0.444 A 以及 0A.

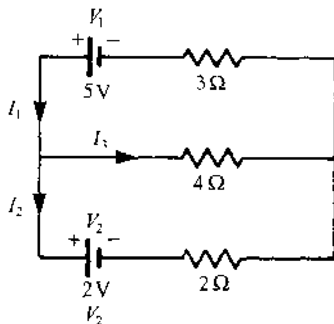


图 27-41

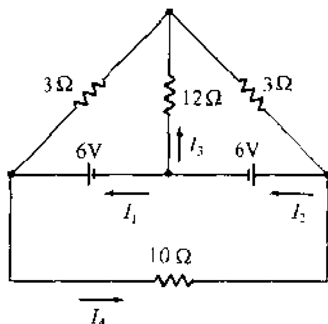


图 27-42

27.134 把图 27-42 中的 12 Ω 的电阻换成 −3 V 的电池且正极朝上(图 27-43). 求 I_1、I_2、I_3 以及 I_4.

解 ☞ 与题 27.133 类似 $I_4=0$. 其它回路方程为 $+6-3I_1-3=0$, $-6-3-3I_2=0$, 解之得 $I_1=1.0$A, $I_2=-1.0$A. 由 $I_2=I_1+I_3$ 得 $I_3=-2$A. 两题中都有 $I_1=-I_2$ 是由于在两个电路中对称的结果.

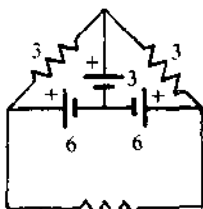


图 27-43

27.135 假设有大量电动势为 $\mathscr{E}$ 内阻为 r 的电池. (a)当一电阻 R 与一该种电池相连, 通过 R 的电流为多少? (b)若 n 节该类型电池并联后再与 R 相连, 求通过 R 的电流, (c)若把 n 节该类型电池串联后再与 R 相连, 求通过 R 的电流.

证 ☞ (a)对于简单串联电路 $I=\mathscr{E}/(r+R)$. (b)对由 R 与一节电池组成的回路运用回路定律: $\mathscr{E}-(I/n)r-IR=0$. 于是 $I=\mathscr{E}/[R+(r/n)]=(n\mathscr{E})/(r+nR)$. 这与将 R 与一电动势为 $\mathscr{E}$ 内阻为 r/n 的电池相连结论相同, (c)各单元串联, 所以 $n\mathscr{E}-nrI-IR=0$, $I=(n\mathscr{E})/(nr+R)$.

27.136 如图 27-44 所示的电路中, 伏特表读数为 5.0 V 安培表读数为 2.0 A, 电流方向如图所示. 求(a) R 的值, (b) $\mathscr{E}$ 的值. (注意: 在写电路方程时 R 上的电压降为 5 V.)

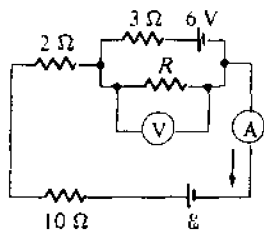


图 27-44

解 ☞ 把原电路图分成两个回路, 如图 27-25 所示. (a)图 27-45(a)中的节点电流方程和回路电压方程分别为 $I_R=2.0+I_1$, $+6-3I_1-I_RR=0$. 电压表读数 $5.0=I_RR$; 解方程得 $I_1=0.33$A, $I_R=2.33$A $R=V/I_R=5.0/2.33=2.1(\Omega)$. (b)在图 27-45(b)中运用回路电压方程: $\mathscr{E}-2(10)-2(2)-5=0$; 所以 $\mathscr{E}=29$ (V).

27.137 如图 27-46 所示, 均匀电阻导线 AB 的总电阻为 R_0. 接头 C 把导线分成两部分 fR_0 和 $(1-f)R_0$. (a)对于 $0<f<1$, 求通过理想安培表的电流. 设两个电池相同且内阻可以忽略. 当 f 为何值时, 安培表读数有(b)最大值, (c)最小值?

解 ☞ (a)在图 27-46 中, I 是安培表中向下的电流, I_1 是流过左侧电动势向上的电流, I_2 是流过右侧电动势向上的电流. 由节点电流方程和回路电压方程有 $\mathscr{E}-Ir-I_1fR_0=0$, $\mathscr{E}-Ir-I_2(1-f)R_0=0$, $I=I_1+I_2$. 解之有 $I=\mathscr{E}/(r+R_0f-R_0f^2)$. (b)当 $f=0$ 或 1 时分母最小, I 最大. (c)因 $f-f^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-f\right)^2$, 当 $f=\frac{1}{2}$ 时 I 最小.

27.138 求图 27-47(a)电路的等效电阻. 已知每个电阻的阻值为 R.

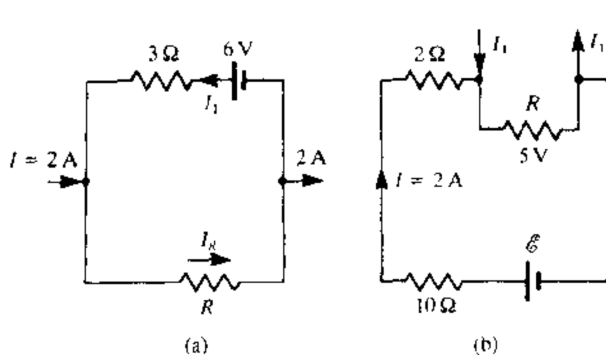


图 27-45

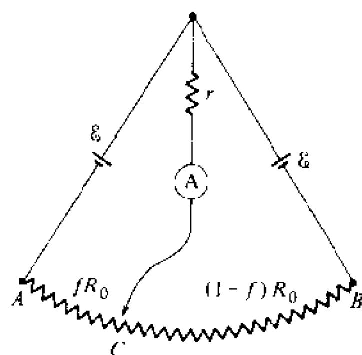


图 27-46

解 ☞ 由于电路关于对角线 AB 对称且两端一致，定出电流如图 27-47(b)所示. 由节点电流定律得 $i_1=2i_2$，$I=3i_1$. 若在系统两端接一电动势，$\mathscr{E}=IR_{eq}$. 若只考虑一条电路就会有 $\mathscr{E}=i_1R+i_2R+i_1R=(5/2)i_1R=(5/2)(I/3)R$. 该式与 IR_{eq} 相等，得出 $R_{eq}=5R/6$.

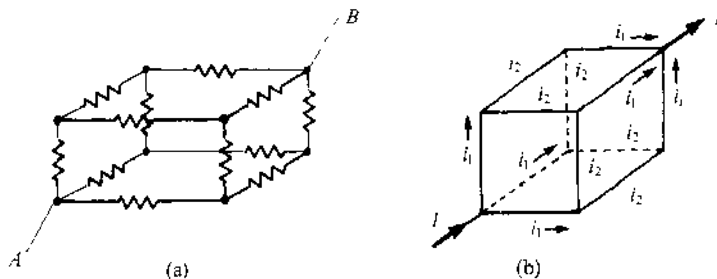


图 27-47

27.139 图 27-48 的电路中有稳定电流，求 I_1、I_2、I_3、I_4、I_5 及电容器上的电量.

解 ☞ 电容器在充满电后无电流经过，所以 $I_5=0$. 对于 $acba$ 回路，由回路定律得 $-8+4I_2=0$，$I_2=2$A. 对于 $adeca$ 回路有 $-3I_1-9+8=0$，$I_1=-0.33$A. 对 c 点运用节点定律有：$I_1+I_5+I_2=I_3$，$I_3=1.67$A；在 a 点有：$I_3=I_4+I_2$，$I_4=-0.33$A.（因为 $I_5=0$ 且 $I_4=I_1$.）要求电容器的带电量，就需知道其两端的电压 V_{fg}. 对 $dfgced$ 回路用回路定律有 $-2I_5+V_{fg}-7+9-3I_1=0$，即 $0+V_{fg}-7+9-1.0=0$，得 $V_{fg}=-1$V. 负号表示 g 板带负电. 电容器的电量为 $Q=CV=(5\mu F)(1V)=5\mu C$.

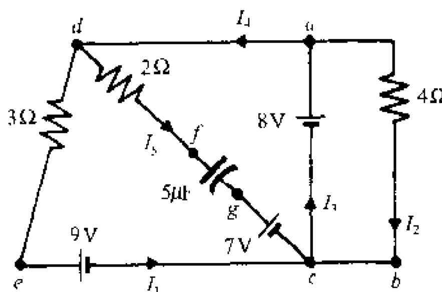


图 27-48

27.140 图 27-49 是一测量电容的电桥. 如果 K 闭合时电流计中无电流通过，说明电桥达到平衡. 证明平衡条件是 $C_2=(R_1/R_2)C_1$. 这种电桥在实际应用中具有一定困难.

证 ☞ 设两电容的带电量分别为 Q_1、Q_2. 平衡时 $I_1=I_2$，$I_1R_1=Q_1/C_1$ 以及 $I_2R_2=Q_2/C_2$. 又因为 C_1 和 C_2 串联且没有电流通过电流计，所以 $Q_1=Q_2$. 所以 $I_1R_1C_1=I_2R_2C_2$. 消去 I_1、I_2 得 $C_2=(R_1/R_2)C_2$.

27.141 在图 27-50 中一电容 C 在开路时带电量为 Q. 当开关闭合电容器通过电阻 R 放电. 求电容器上带电量随时间 t 变化的表达式 $q(t)$.

解 ☞ 开关闭合时有回路方程为 $q/C-IR=0$. 因为 $I=$ 放电的速率，$I=-dq/dt$. 于是代入回路

方程得 $dq/dt=-(1/RC)q, dq/q=-(1/RC)=dt$. 积分得

$$\int_Q^q \frac{dq'}{q}=-\int_0^t \frac{1}{RC}dt', \ln\frac{q}{Q}=-\frac{t}{RC}$$

于是 $q=Qe^{-t/RC}$. 其中 $RC\equiv\tau$ 称为电路的时间常数；τ 越大，放电时间越长.

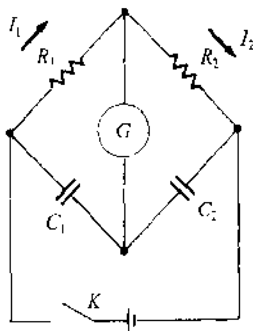


图 27-49

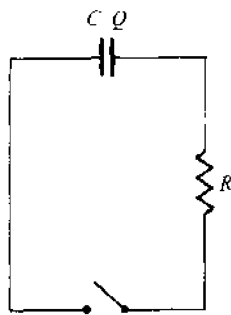


图 27-50

27.142　实验室中，一学生用 1.5 V 的电池给一 2μF 的电容器充电. 断开电路后，该生用手握住电容器上两根铅导线. 设两手间人体电阻为 60 kΩ，则由该电容器和人体组成的电路的时间常数是多少？电容器上的电荷降至原电量的 $\frac{1}{e}$ 需多长时间？降至 1/100 呢？（提示：ln100≈2.30lg100）

解　☞　$\tau=RC=(6\times10^4)(2\times10^{-6})=0.12$ (s). 现 $Q=Q_0\exp(-t/RC)=Q_0\exp(-t/0.12)$. 如果 $\exp(-t/0.12)=\exp(-1)$，$t=0.12$s. 若 $\exp(t/0.12)=100$，$t/0.12=\ln100\approx2.30\lg100=4.6$；所以 $t=0.55$ s.

27.143　某一电子装置中，一 10 μF 的电容带电电压为 2000V. 当该装置断开，为了安全让电容器通过一阻值为 1 MΩ 的放电电阻放电. 电容器上的电荷减至原来的 0.01 需多长时间？

解　☞　因 $\ln x\approx2.30\lg x$；$\tau=RC=10$ s. 由 $Q/Q_0=\exp(-t/\tau)=0.01$，得 $t/10=2.30\lg100$，$t=46$ s.

27.144　一 400 μF 的电容器通过一电阻与电池相连. 若电路的时间常数为 0.5 s，电容器上的最大带电量为 0.024 C，求(a)电阻 R，(b)电池的电动势 $\mathscr{E}$.

解　☞　$R=\frac{\tau}{C}=\frac{0.5\text{s}}{400\times10^{-6}\text{F}}=1250\Omega$，$\mathscr{E}=\frac{q}{C}=\frac{0.024\text{C}}{400\times10^{-6}\text{F}}=60\text{V}$

27.145　一 50 μF 的电容器开始时不带电，将它通过 300 Ω 的电阻与 12 V 的电池相连. (a)求电容器上最终电荷 q_0 的大小，(b)电容器与电池相接多长时间后其带电量为 $\frac{1}{2}q_0$？(c)经多长时间电容器带电为 $0.90q_0$？

解　☞　充电时 $q=q_0(1-e^{-t/RC})$，$q_0=CV$. (a) $q_0=CV=(50\times10^{-6}F)(12V)=600\ \mu C$.

(b) $\tau=RC=(300\Omega)(50\times10^{-6}\text{F})=15\times10^{-3}\text{s}=15\text{ms}$. 由等式知当充电至 $\frac{1}{2}q_0$：$e^{-t/RC}=\frac{1}{2}$，$t/(RC)=t/\tau=\ln2\approx0.7$. 所以 $t_{0.5}\approx0.7\tau=10.5$ms

(c)同理，$e^{-t/\tau}=0.1$ 得 $t/\tau=\ln10\approx2.3$，所以 $t_{0.9}\approx2.3\tau=34.5$ms.

27.146　一 150μF 的电容器通过 500Ω 的电阻与 40 V 的电池相连. (a)求电容器最终所带的电量 q_0，(b)求电路的时间常数. (c)电容器带电量达到 $0.8q_0$ 需多长时间？

解　☞　(a) $q_0=VC=(40\text{V})(150\times10^{-6}\text{F})=6.0$mC. (b) $\tau=RC=(500\Omega)(150\times10^{-6}\text{F})=75$ms.

(c)由题 27.145 得　$-t/\tau=\ln0.2$　$t/\tau=\ln5\approx1.6$. 所以 $t\approx(1.6)(75\text{ms})=120$ms.

第二十八章　磁　　场

28.1　运动电荷所受的力

28.1　什么是磁场?

解　☞ 如果一检验电荷在空间某区域由于惯性运动且受到力的作用,就说在该区域存在磁场.该力可用一场矢量 $\boldsymbol{B}$ 表示,$\boldsymbol{B}$ 称为磁感应强度或磁通密度,或简单称之为磁场.若电荷的速度为 $\boldsymbol{v}$,则该力可表示为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

与惯性有关.(矢积的定义见题 1.89).由(1)式,力的大小为 $F = qvB\sin\theta$,其方向根据右手定则决定.$\boldsymbol{B}$ 或 B 的单位是韦伯·每平方米($\mathrm{Wb/m^2}$),在国际单位中又叫特斯拉(T).由(1)

$$1\mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}} = 1\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}}$$

若某一区域同时具有磁场 $\boldsymbol{B}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$,电荷所受的力为电场力和磁场力的矢量和:$\boldsymbol{F}_{总} = q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]$.该关系式称为洛伦兹等式.

28.2　对比电场与磁场.

解　☞ (i)磁场中每一点有一特定的方向(即 $\boldsymbol{B}$ 的方向),电荷沿该方向运动时受到的磁场力为零.(ii)磁场力与运动电荷的速度方向垂直,所以不作功;因此该力无标量形式的势函数与之对应.除了这些明显的区别外,狭义相对论表明电场和磁场是一个电磁场的两个组成部分.

28.3　图 28-1 中粒子带正电荷.判断粒子所受磁场力的方向.用 B、q、v 表示力的大小.

解　☞ $F = qvB\sin\theta$;力的方向遵循右手定则.(a)$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,$Q = 90°$,$F = qvB$.方向为垂直纸面向里.(b)$F = qvB\sin(\pi - \theta) = qvB\sin\theta$ 由 $\boldsymbol{v}$ 向 $\boldsymbol{B}$ 旋绕$(\pi - \theta)$,得 $\boldsymbol{F}$ 的方向垂直纸面向外.(c)$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,$F = qvB$.由 $\boldsymbol{v}$ 向纸内旋绕得 $\boldsymbol{F}$ 的方向为在纸面内由 $\boldsymbol{v}$ 逆时针转动 90°.

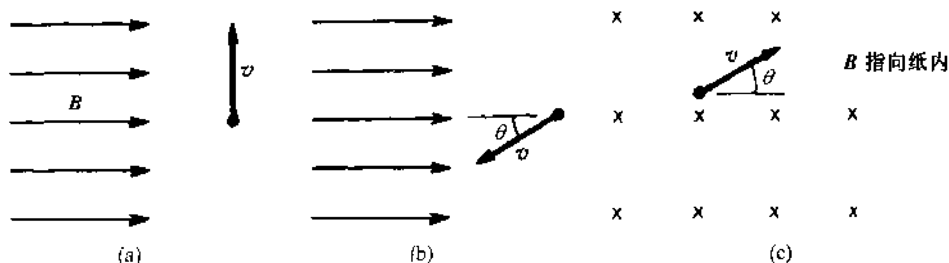


图 28-1

28.4　一个 $\mathrm{H_e^{2+}}$ 垂直射入一磁感应强度为 0.80 T 的磁场,速度为 $10^5\mathrm{m/s}$.求该离子所受磁场力的大小.

解　☞ $F = qvB\sin\theta$,　$\theta = 90°$,　$\sin\theta = 1$,　$F = 2(1.60 \times 10^{-19})10^5(0.80) = 2.56 \times 10^{-14}(\mathrm{N})$.

28.5　一束质子(带正电)水平向你靠近,在此过程中质子束经过一竖直向下的磁场,则磁场使质子束如何偏转?

解　☞ 向右偏转(按右手定则由 $\boldsymbol{v}$ 向 $\boldsymbol{B}$ 旋转所决定的方向).

28.6　在佛蒙特州,地球磁场的倾斜角(磁场线与水平面所成的角)为 74°,磁场平行于地面的分量为 0.16G.如果一个电子以 $10^6\mathrm{m/s}$ 的速度竖直向上射出,作用在电子上的力有多

大？方向怎样？该力产生多大的加速度？($m_e=9.1\times10^{-31}$ kg; 1G$=10^{-4}$T.)

解 ☞ 该力是由指向北的磁场分量 $B_N=0.16$ G产生的。因为电子向上运动等效于正电荷向下运动，则力的方向向东，大小为

$$F=evB_N=(1.6\times10^{-19}c)(10^6\text{m/s})(0.16\times10^{-4}\text{T})=2.56\times10^{-18}\text{N}$$

$$a=\frac{F}{m_e}=\frac{2.56\times10^{-18}}{9.1\times10^{-31}}=2.8\times10^{12}(\text{m/s}^2)$$

28.7 若在题28.6中电子水平向北发射结果会怎样.

解 ☞ 该题中，磁场力由磁场向下的分量 $B_N\tan74°$产生，所以

$$F=(2.56\times10^{-18})(\tan74°)=8.9\times10^{-18}(\text{N})$$

$$a=(2.8\times10^{12})(\tan74°)=9.8\times10^{12}(\text{m/s}^2)$$

28.8 一离子($q=+2e$)以2.5×10^5m/s的速度垂直进入磁感应强度为1.2 Wb/m^{2}的磁场. 求离子所受的力.

解 ☞ $F=2(1.6\times10^{-19}\text{C})(2.5\times10^5\text{m/s})(1.2\text{ Wb/m}^2)=9.6\times10^{-14}$N. 根据右手定则，磁场力与$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{B}$方向垂直.

28.9 一电子由静止经过3750 V的电势差加速后垂直进入$B=4$ mT的磁场区域，计算电子运动的半径.

解 ☞ 因为磁场力是始终与$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{v}$垂直的向心力. 而且在经过电势差后在运动路径上没有加速度，v和$F=evB$均是常数，这使得电子做匀速圆周运动. 由$eV=\frac{1}{2}mv^2$，即$(1.6\times10^{-19}\text{C})(3750\text{ V})=\frac{1}{2}(9.1\times10^{-31}\text{ kg})v^2$，得$v=3.63\times10^7$m/s. 由牛顿第二定律，$qvB=(mv^2)/R$，$R$为圆周运动半径. 于是$R=(mv)/(qB)=[(9.1\times10^{-31})(3.63\times10^7)]/[(1.6\times10^{-19})(4\times10^{-3}\text{T})]=52$mm.

28.10 一正离子以10^7m/s的速度射入场强为0.134 Wb/m^{2}的磁场作半径为1.55 m的圆周运动，则该离子质量有多大？有几种可能的答案。

解 ☞ 因为不知离子所带的电量，设$q=ne$，n为正整数。在磁场中做圆周运动，v与B垂直，并且有$qvB=(mv^2)/R$，$m=(qBR)/v$. 代入已知的值得到

$$m=[n(1.6\times10^{-19}\text{C})(0.134\text{ T})(1.55\text{m})]/(1.0\times10^7\text{m/s})=(3.3\times10^{-27}\text{kg})n$$

28.11 一电子以5×10^7 m/s的速度垂直进入场强为5000 G的磁场. (a)求电子所受的磁场力. (b)电子作圆周运动的半径是多少？

解 ☞ (a) $F=Bqv=(0.5\text{T})(1.6\times10^{-19}\text{C})(5\times10^7\text{ m/s})=4.0\times10^{-12}$N.

(b)由牛顿第二定律，$F=m(v^2/r)$，所以$r=\frac{mv^2}{F}=\frac{(9.11\times10^{-31}\text{ kg})(5\times10^7\text{m/s})^2}{4.0\times10^{-12}\text{N}}=5.7\times10^{-4}\text{m}=0.57\text{ mm}$

28.12 (a)带一个电荷的碳离子以3×10^5 m/s的速度垂直射入7500 G的磁场中受力为多大？(b)求离子的向心加速度，(c)离子运动的圆周半径为多大？

解 ☞ (a)$q=e=1.6\times10^{-19}$C

$F=Bqv=(0.75\text{ T})(1.6\times10^{-19}\text{C})(3\times10^5\text{m/s})=3.6\times10^{-14}$ N

(b) $m_c=12(\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{kg/u})=19.9\times10^{-27}$kg

$$a=\frac{F}{m_c}=\frac{3.6\times10^{-14}\text{ N}}{19.9\times10^{-27}\text{ kg}}=1.81\times10^{12}\text{ m/s}^2$$

(c) $r=\frac{v^2}{a}=\frac{(3\times10^5\text{ m/s})^2}{1.81\times10^{12}\text{m/s}^2}=49.7$ mm

28.13 假设绕地球一周(半径为6400 km)的路径可以通过与地面平行的地球磁场来测定. 已知地球磁场为0.50 G，则一质子必须以多大的速度发射才能绕地球运转？沿哪个方向发射？

解 ☞ 向心力为$(mv^2)/r$由磁场力evB_H决定.所以$v=(eB_Hr)/m=[(1.6\times10^{-19})\times(5\times10^{-5})(6.4\times10^6)]/(1.67\times10^{-27})=3.1\times10^{10}(m/s)$.因为地球磁场指向北极,所以质子应向西射出.

28.14 为何题28.13的解法不完善?

解 ☞ 质子的速度不可能超过光速,所以应该运用相对论运动方程.

28.15 2 keV的α粒子($m=6.68\times10^{-27}$ kg, $q=+2e$)垂直进入$B=0.2$T的磁场.计算运动路径的半径.

解 ☞ 磁场中粒子的动能守恒$\frac{1}{2}mv^2=Vq$即$v=\sqrt{\frac{2Vq}{m}}$,做圆周运动的半径为$r=\frac{mv}{qB}=\frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2Vq}{m}}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{q}}=\frac{1}{0.2T}\sqrt{\frac{2(1000\text{ V})(6.68\times10^{-27}\text{kg})}{3.2\times10^{-19}\text{C}}}=32$ mm

28.16 带一个单位电荷的碳离子经5000 V的电势差加速后在质谱仪的磁场中作半径为21 cm的圆周运动.求磁场的大小.

解 ☞ 由28.15题

$$m_c=(12\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{ kg/u})=19.9\times10^{-27}\text{ kg}$$

$$B^2=\frac{2Vm_c}{r^2q}=\frac{2(5000\text{ V})(19.9\times10^{-27}\text{ kg})}{(0.21\text{ m})^2(1.6\times10^{-19}\text{C})}=2.82\times10^{-2}\text{T}^2$$

$$B=0.168\text{T}$$

28.17 一带电量为q,质量为m的粒子以动能K射入图28-2所示的两板间的区域。若板间的磁场为B,则B应为多大才能避免与对面的板相撞?

解 ☞ 当粒子以d为半径作圆周运动时刚好与对面的板接触由$Bqd=mv$, $K=(mv^2)/2$,得到$B=(2mK)^{1/2}/(qd)$.

图 28-2

28.18 一阴极射线(电子束, $m=9.1\times10^{-31}$kg, $q=-e$)在$B=4.5$ mT的均匀磁场中的轨迹是半径为2 cm的圆周.求电子的速度.

解 ☞ 要形成这种圆周,粒子运动必须与$\boldsymbol{B}$垂直。于是

$$v=\frac{rqB}{m}=\frac{(0.02\text{ m})(1.6\times10^{-19}\text{C})(4.5\times10^{-3}\text{T})}{9.1\times10^{-31}\text{kg}}=1.58\times10^7\text{ m/s}$$

28.19 在图28-3(a)中,一质子($q=+e$, $m=1.67\times10^{-27}$ kg)以8×10^6 m/s的速度射入沿x方向的磁场.已知磁场$B=0.15$ T,且质子运动方向与磁场方向成30°角.求质子运动的轨迹.

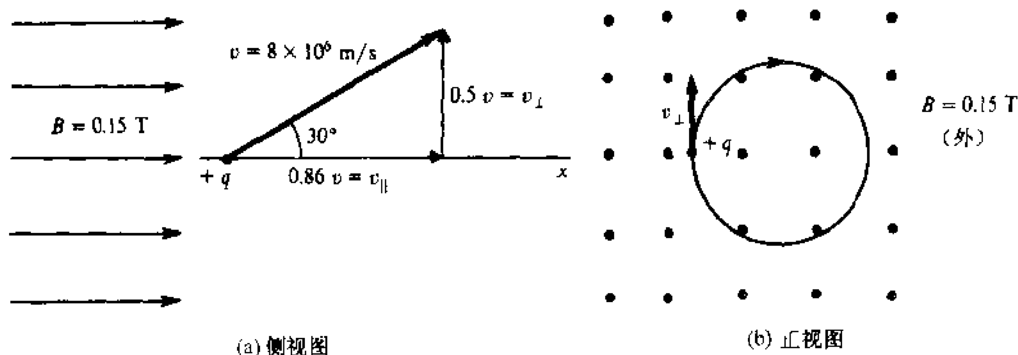


图 28-3

解 ☞ 把粒子的速度分成平行于和垂直于磁场的两部分.由于 $v_{\parallel}$ 受到的磁场力为零($\sin\theta=0$);由于 $v_{\perp}$ 而产生的磁场力在 x 方向无分量.所以粒子在 x 方向作匀速运动,$v_{\parallel}=(0.86)(8\times10^6\text{m/s})=6.88\times10^6$ m/s.而横向作圆周运动,圆周运动的半径为

$$r=\frac{mv_{\perp}}{qB}=\frac{(1.67\times10^{-27}\text{kg})(0.5\times8\times10^6\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{C})(0.15\text{ T})}$$
$$=0.28\text{ m}$$

质子沿 x 轴旋绕运动,旋绕(螺旋线)半径为 28 cm.为求螺旋线的螺距(粒子运动一周在 x 方向的位移)先求出完成一圈所需的时间

$$\text{周期}=\frac{2\pi r}{v_{\perp}}=\frac{2\pi(0.28\text{m})}{(0.5)(8\times10^6\text{m/s})}=4.4\times10^{-7}\text{s}$$

在该时间内,质子沿 x 方向运动的距离为

螺距 $=(v_{\parallel})(\text{周期})=(6.88\times10^6\text{m/s})(4.4\times10^{-7}\text{s})=3.0$ m

28.20 一电子以 5×10^6 m/s 的速度从坐标原点射出.初始速度与 $+x$ 轴成 20°角.若 $B=2.0$ mT 且沿 $+x$ 方向,试描述电子在磁场中的运动.

解 ☞ 情况与 28.19 相似,只是电子带负电,这使得电荷在旋转时沿相反的方向.

$$v_x=v\cos20°=4.7\times10^6\text{m/s}=\text{常数},\ v_{\perp}=v\sin20°=1.7\times10^6\text{m/s}$$

$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{(9.1\times10^{-31}\text{kg})(1.7\times10^6\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{c})(0.0020\text{T})}=0.48\text{ cm}$$

周期 $T=\frac{2\pi r}{v_{\perp}}=1.78\times10^{-8}$ s

螺距 $=v_xT=8.33$ cm

28.21 如图 28-4 所示的长螺线管内有平行于轴的磁场 $\boldsymbol{B}$.内部一电子枪发射电子初速度 $\boldsymbol{u}$ 有两个分量 $u_1=u\cos\beta$ 和 $u_2=u\sin\beta$,分别正交和平行于 $\boldsymbol{B}$.电子路径为如图所示的螺旋线.(a)用 u,β,B 表示出螺旋线的半径和螺距.(b)已知 $B=1$ mT,$\beta=30°$,$u=1.45\times10^{-7}$m/s,电子荷质比为 $e/m=1.76\times10^{11}$C/kg,计算出螺旋线的半径和螺距.

解 ☞ (a)$R=\frac{mu\cos\beta}{eB}=\frac{u\cos\beta}{(e/m)(B)}$,螺距 $=(u\sin\beta)T=\frac{(u\sin\beta)(2\pi R)}{u\cos\beta}=2\pi R\tan\beta$.(b)$R=[(1.45\times10^7\text{m/s})(0.866)]/[(1.76\times10^{11}\text{c/kg})(1.0\times10^{-3}\text{T})]=71.3$ mm,

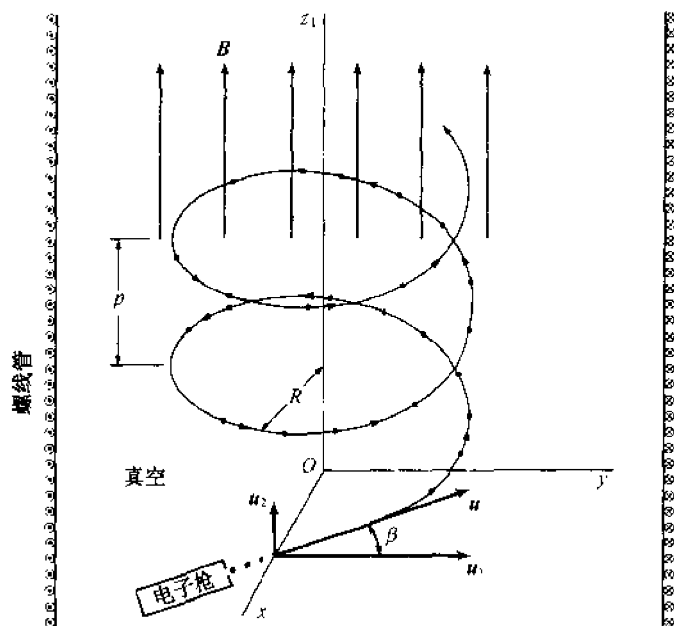


图 28-4

螺距 $= 2\pi R\tan\beta = (6.28)(0.0713\text{m})(0.577) = 258\ \text{mm}$.

28.22 空间某一区域的磁场为 $\boldsymbol{B} = 0.080\boldsymbol{i}T$，一质子以 $2\times10^5\boldsymbol{i} + 3\times10^5\boldsymbol{j}$(m/s)的速度射入磁场，求质子螺旋线路径的半径和螺距.

解 ☞ 由 $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 知速度$\boldsymbol{v}$的 y 方向分量产生磁场力. 该分量 $3\times10^5\boldsymbol{j}$ 使得粒子在 yz 平面内做圆周运动，半径 r 满足$(mv_y^2)/r = ev_yB$. 所以 $r = [(1.67\times10^{-27})(3\times10^5)]/[(1.6\times10^{-19})(0.08)] = 0.039$(m). 粒子运动一周所需的时间为$(2\pi r)/v_y = 8.2\times10^{-7}$s. 这段时间内粒子运动了$(2\times10^5\boldsymbol{i})t$，即螺距 $= 0.164$ m.

28.23 如图 28-5 所示，一束带电量为 q 的粒子射入均匀且竖直向下的电场，电场大小为 80 kV/m. 与 $\boldsymbol{E}$ 垂直且指向纸内的磁场$B = 0.4$ T. 当粒子的速度为某一值时，粒子的运动不会受正交电磁场的影响. 则粒子的速度应为多大？(该装置称为速度选择器.)

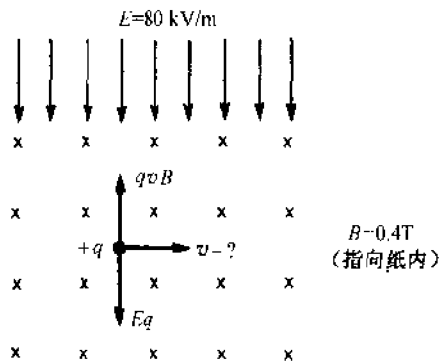


图 28-5

解 ☞ 电场使带正电的电荷受到向下的力 Eq. 由右手定则知电荷 q 受到向上的磁场力为 $qvB\sin90°$，当两力平衡时粒子的运动不受干扰，$Eq = qvB\sin90°$，$v = \dfrac{E}{B} = \dfrac{80\times10^3\text{v/m}}{0.4\ \text{T}} = 2\times10^5$ m/s. 若 q 带负电荷，两力均反向，则 $v = \dfrac{E}{B}$ 仍成立.

28.24 一束电子经过相互垂直的电场和磁场而未改变原来的状态. 若把电场去掉而保留磁场，则电子在磁场中以 1.14 cm 为半径作圆周运动. 如果 $E = 8$ kV/m, $B = 2\times10^{-3}$T，求电子的荷质比.

解 ☞ 若电子束经过正交的电磁场而不改变运动状态，所以 $evB = eE$, $v = E/B$. 撤去电场，电子作圆周运动：$e/m = v/RB = E/(RB^2) = (8\times10^3)/[(0.0114)(2\times10^{-3})^2] = 1.75\times10^{11}$(C/kg).

28.25 若某种离子经过正交的电场和磁场，其中 $E = 7.7$ kV/m, $B = 0.14$T 运动状态没有改变，求离子的速度.

解 ☞ $qvB = qE$，所以 $v = E/B = (7.7\times10^3)/0.14 = 55$(km/s).

28.26 一电荷 $q = 40\ \mu$c 以瞬间速度 $\boldsymbol{u} = (5\times10^4)\boldsymbol{j}$m/s 通过一均匀电磁场 $\boldsymbol{E} = (6\times10^4)(0.52\boldsymbol{i} + 0.56\boldsymbol{j} + 0.645\boldsymbol{k})$V/m, $\boldsymbol{B} = (1.7)(0.693\boldsymbol{i} + 0.6\boldsymbol{j} + 0.4\boldsymbol{k})$T. 求作用在 q 上力的大小和方向.

解 ☞ 由洛伦兹方程(28.1 题)，合力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (4\times10^{-5})[(6\times10^4)(0.52\boldsymbol{i} + 0.56\boldsymbol{j} + 0.645\boldsymbol{k})\\ &\quad + (5\times10^4)\boldsymbol{j}\times(0.693\boldsymbol{i} + 0.6\boldsymbol{j} + 0.4\boldsymbol{k})(1.7)]\\ &= 2.61\boldsymbol{i} + 1.34\boldsymbol{j} - 0.81\boldsymbol{k}(\text{N})\end{aligned}$$

由此得 $F = (2.61^2 + 1.34^2 + 0.81^2)^{1/2} = 3.04$(N). $\boldsymbol{F}$ 的方向余弦分别为

$$l = \frac{2.61}{3.04} = 0.86,\quad m = \frac{1.34}{3.04} = 0.44,$$

$$n = \frac{-0.81}{3.04} = -0.27$$

28.27 如图 28-6 所示，一电容器放在大磁铁的两极之间. 若电容器的两极板间有一均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 和一均匀磁场$\boldsymbol{B}$；两场相互平行且指向 z 方向. 一带电量 $q = 3\ \mu$c 的小球瞬时速度为

$$\boldsymbol{u} = (4\times10^4)(0.766\boldsymbol{j} + 0.643\boldsymbol{k})(\text{m/s})$$

若 $d=40$ mm, $V=2000$ V, $B=1.5$ T, 则作用在球上的瞬时力为多大?

解 ☞ 这里 $\boldsymbol{E}=\frac{V}{d}\boldsymbol{k}=(5\times10^4)\boldsymbol{k}$ V/m. 由洛伦兹方程得, 合力为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (3\times10^{6})[(5\times10^{4})\boldsymbol{k}+(4\times10^{4})(0.766\boldsymbol{j}+0.643\boldsymbol{k}\times1.5\boldsymbol{k})] \\
&= (3\times10^{-6})[(5\times10^{4})\boldsymbol{k}+(4\times10^{4})(0.766)(1.5)\boldsymbol{i}] \\
&= 0.1397\boldsymbol{i}+0.15\boldsymbol{k}(\mathrm{N})
\end{aligned}
$$

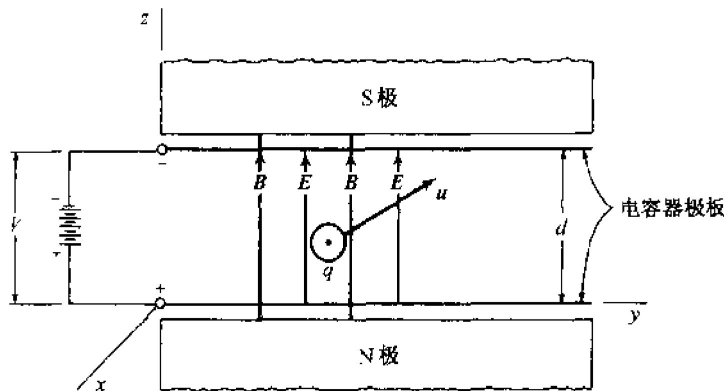


图 28-6

28.28　用如图 28-7 所示的真空管可以求出 e/m_e 的值. 该装置有一加热的灯丝 F 和阳极 A, A 在已知电压为 V 的电池作用下比灯丝的电势高. 加热的灯丝放出电子经加速射向阳极, 阳极 A 上有一小孔使电子进入一有恒定磁场 B 的区域, B 的方向指向纸内. 电子沿一直径为 d 的半圆运动, 打在挡板上. 证明 $e/m_e=8V/(Bd)^2$.

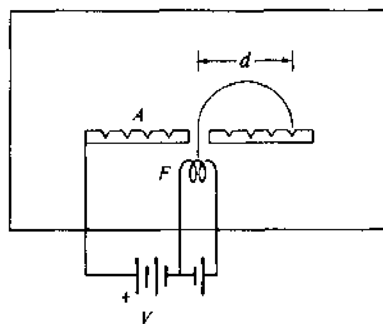


图 28-7

证 ☞ 由图 28-7, 根据牛顿第二定律 $(m_e v^2)/r = evB$, 其中 $r=\frac{1}{2}d$ 为电子轨道的半径. 求得速度为

$$v=\frac{eBr}{m_e}=\frac{eB}{2m_e}d \tag{1}$$

由于电子经过电势差 V 的加速, 每个电子具有动能 $\frac{1}{2}m_e v^2=eV$, 于是

$$v^2=\frac{2eV}{m_e} \tag{2}$$

结合方程(1)和(2)得 $\left(\frac{eBd}{2m_e}\right)^2=\frac{2eV}{m_e}$

求出荷质比得

$$\frac{e}{m_e}=\frac{8V}{B^2d^2} \tag{3}$$

即为所证结果

28.29　在一质谱仪中碳离子作圆周运动的半径为 $r_c=9.0$ cm, 氧离子作圆周运动的半径为 $r_0=10.4$ cm, 则氧离子的质量为多大?

解 ☞ 设 V 和 $\boldsymbol{B}$ 对于两个离子都相同, 所以由 28.28 题(3)式, 有

$$m=(B^2r^2e)/(2V),\ \frac{m_0}{m_c}=\frac{r_0^2}{r_c^2}=\frac{(10.4\ \mathrm{cm})^2}{(9.0\ \mathrm{cm})^2}=1.33$$

也就是说, 氧离子的质量是碳离子质量的 1.33 倍. 因为碳的质量为 12u, 所以氧离子的质量为 $m_0=1.33\,m_c=(1.33)(12u)=16u$.

28.30 图 28-8 是班布瑞基(Bainbridge)设计的精确测量同位素质量的装置. S 为所测元素的上离子源. 离子带有相同的电量但速度不同. 整个区域有一垂直于纸面向里的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$, 还有一平行于纸面的电场 $\boldsymbol{E}$, 电场位于电极板 P 和 N 之间. (a)证明只有速度为 $v=E/B$ 的离子会出现在 C 点, (b)证明离子的质量与半圆形轨道的半径 R 成正比.

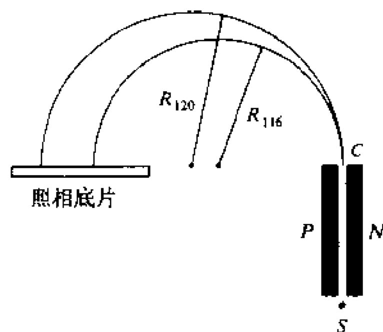


图 28-8

证 ☞ (a)由图 28-8, 由 S 到 C 的离子受到电场力 $\boldsymbol{F}_e=q\boldsymbol{E}$ 和磁场力 $\boldsymbol{F}_m=q(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})$ 的作用, 且 $\boldsymbol{E}$ 的方向向右(由 P 指向 N), $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}$ 指向相反的方向且大小为 vB 如果不满足 $v=E/B$, 电场力就不会等于磁场力, 离子就会打到极板上.

(b)根据 $\frac{mv^2}{R}=evB$, $m=\frac{eB}{v}R=\frac{eB^2}{E}R$.

28.31 把锡元素放在图 28-8 所示的班布瑞基质谱仪中分析. 其同位素的质量分别为 116u、117u、118u、119u 和 120u. 电场 $E=20\ \mathrm{kV/m}$, 磁场 $B=0.25\ \mathrm{T}$. 则在感光板上锡 116 和锡 120 的距离为多少?

解 ☞ 由 28.30(b)可知, C 点到某同位素像的距离 $x=2R=[2E/(eB^2)]\mathrm{m}$. 所以

$$\Delta x=\frac{2E}{eB^2}\Delta m=\frac{2(2.0\times10^4\mathrm{V/m})}{(1.6\times10^{-19}\mathrm{C})(0.25T^2)}(4\mathrm{u})(1.66\times10^{-27}\mathrm{kg/u})$$
$$=2.66\times10^{-2}\mathrm{m}=26.6\ \mathrm{mm}$$

28.32 一电量为 q 质量为 m 的粒子运动轨道与一均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直. 证明轨道运动的频率为 $(Bq)/(2\pi m)$Hz. 在粒子回旋加速器中该频率与粒子的速度无关; 该频率称为回旋加速器频率.

证 ☞ 周期 $(2\pi r)/v$, 故 $f=v/(2\pi r)$. 由 $qvB=(mv^2)/r$, 得 $f=(qB)/(2\pi m)$.

28.33 说明回旋加速器及其运行原理.

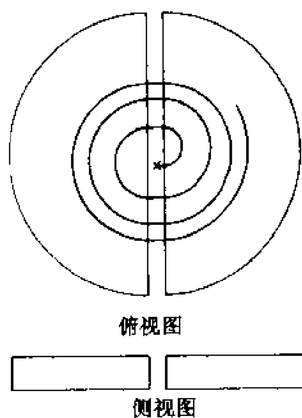


图 28-9

解 ☞ 回旋加速器是用来加速核子的装置. 该装置的核心是两个分开的金属盒. 图 28-9 展示了这种 D 形盒的俯视图和侧视图. D 形盒间有交变电势差, 于是在缝隙里形成交变电场, 每个 D 形盒的内部电场很弱. D 形盒装在大的真空容器里, 整个装置放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中, 这个磁场的方向垂直于 D 形盒的底面. 一质量为 m 带电量为 q 的粒子在两 D 形盒的缝隙中被电场加速进入某一 D 形盒的内部. 在该区域内, 粒子以恒定的速度作半圆周运动. 由题 28.32 知, 匀速圆周运动的周期为 $T=1/f=(2\pi m)/qB$. 运动半周 $t=T/2=(\pi m)/(qB)$ 与速度无关. 如果交变电场的半周期与这一时间相等, 则带电粒子再次经过缝隙时, 由于电场的转向而再次被加速. 这样粒子就会不断获得能量, 使得粒子在下半个圆周的运动半径更大, 如图所示. 能量的增大可以重复许多次.

28.34 一回旋加速器对氘核加速. 氘核即重氢的核带电荷 $+e$, 质量为 3.3×10^{-27} kg. (a)如果 $B=1.5\mathrm{T}$

则交变电场的频率为多少? (b)如果氘核被加速至动能为 15 MeV 且缝隙间的电势差为 50 kV, 则氘核被加速了多少次?

解 ☞ (a)交变周期等于轨道周期,所以交变频率为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m_0} = \frac{(1.60\times10^{-19})(1.5)}{2\pi(3.3\times10^{-27})} = 11.6(\text{MHz})$$

(b)氘核每经过缝隙一次,获得动能 50 keV = 5×10^4eV.要获得总能量 15 MeV = 15×10^6 eV,氘核应被加速$(15\times10^6)/(5\times10^4) = 300$ 次.

28.35 由题 28.34 求氘核获得 15 MeV 的能量时半圆周的半径.

解 ☞ 因为 15MeV≪m_0c^2,利用 28.15 题的牛顿等式:

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{q}} = \frac{1}{1.5}\sqrt{\frac{2(15\times10^6)(3.3\times10^{-27})}{1.6\times10^{-19}}} = 0.524(\text{m})$$

28.36 一回旋加速器设置用来加速氘核,现要改成加速质子,质子的质量仅为氘核的一半.(a)要使加在 D 形盒间的交变电势差的交变频率不改变,应作何种变化?(b)若垂直于 D 形盒的磁感应强度无变化,应做何种改变?

解 ☞ (a)由题 28.32 知,回旋加速器的角频率 $\omega_c = (qB)/m$,所以有

$$B = \frac{m\omega_c}{q} \tag{1}$$

因为质子与氘核带相同的电荷($q_p = q_d$),$m_p = \frac{1}{2}m_d$,所以磁场也应变为原来的一半.(b)由等式(1),如果 B 保持不变,电场的交变频率应加倍.

28.37 28.36 题中的两种改变对质子能获得的最大能量有何影响?

解 ☞ 设该运动运用非相对论力学公式,最大动能 $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$, $qv_{\max}B = (mv_{\max}^2)/R$, R 为该装置的半径.(R 为被加速粒子轨道半径的上限.)解得 $K_{\max} = \frac{1}{2}(q^2B^2R^2)/m$.(a)最大动能减少一半:$K_{\max}(p) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2/\left(\frac{1}{2}\right)\right]K_{\max}(d) = \frac{1}{2}K_{\max}(d)$.(b)最大动能加倍:$K_{\max}(p) = \left[1/\left(\frac{1}{2}\right)\right]K_{\max}(d) = 2K_{\max}(d)$.

28.38 在回旋加速器的共振实验中,磁场方向竖直向上.实验观察到俯视时带电粒子作逆时针转动.则该粒子带何种电荷?

解 ☞ 负电荷(力必须指向圆周中心).

28.39 热电子在 $T = 300$ K 时动能为$\frac{3}{2}kT$,垂直进入 $B = 0.10$ T 的匀强磁场中,计算电子作圆周运动的半径.当代入数值时,连同单位一起代入以检验结果单位是否为米.

解 ☞ 因为粒子为非相对论粒子,由牛顿第二定律得$(m_ev^2)/r = evB$,所以

$$r = \frac{m_ev}{eB} \tag{1}$$

但 $v = \sqrt{(3kT)/m_e}$,所以方程(1)变成

$$r = \frac{1}{eB}\sqrt{3m_ekT} \tag{2}$$

由于 $m_e = 9.11\times10^{-31}$kg, $e = 1.60\times10^{-19}$ C, $k = 1.38\times10^{-23}$ J/K, $T = 300$ K, $B = 0.10$ T,代入方程(2)得

$$r = \frac{\sqrt{3(9.11\times10^{-31}\text{kg})(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(300\text{K})}}{(1.60\times10^{-19}\text{C})(0.1\text{T})}$$
$$= 6.65\times10^{-6}(\text{J}\cdot\text{kg})^{1/2}/\text{C}\cdot\text{T}$$

因为 1J = 1 kg·m^2/s^2,有$(\text{J}\cdot\text{kg})^{1/2}$ = kg·m/s.又因为 1T≡1 N·s/C·m,所以 1C·T = 1N·s/m = 1(kg·m/s^2)·s/m = 1 kg/s.所以 1$(\text{J}\cdot\text{kg})^{1/2}$/C·T = 1 m,这说明 r = 6.65 μm.

28.40 题28.39中粒子运动一周需多长时间?

解 由题28.39中式(1)得 $T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi m_e}{eB}=\frac{2\pi(9.11\times10^{-31})}{(1.60\times10^{-19})(0.1)}=0.358(\text{ns})$

28.41 一装置利用霍尔效应测量磁场.当磁场 B 为200 G时产生霍尔电压16 μV.若用同样的电流沿同一方向在另一未知的磁场中产生的霍尔电压为23 μV,求该磁场的B的大小?

解 因为霍尔电压与B成正比,未知磁场的B为$(200\ \text{G})\left(\frac{23}{16}\right)=287.5\ \text{G}$.

28.42 在一霍尔效应实验中有一0.25 A的电流通过厚0.20 mm宽5 mm的金属薄片.当磁场为2000 G时产生的霍尔电压为0.15 mV.(a)单位体积内载流子($q=e$)的数目,(b)求载流子的移动速度.

解 由霍尔效应 $nq=(BJ)/E=(BJd)/V_H$,其中 n 为单位体积中电荷数目,J 为电流密度由 $J=0.25/[(2\times10^{-4})(5\times10^{-3})]=25\times10^4\ \text{A/m}^2$,得 $n=1.04\times10^{25}/\text{m}^3$.电荷移动速度可由 $v=J/(ne)$或 $v=V_H/(Bd)$求得,$v=0.15$ m/s.

28.2 作用在载流导线上的力

28.43 写出磁场中电流所受的力.

解 如图28-10所示设在一不均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中有一任意形状的导线 ab 所带电流为 I,直接由28.1题的(1)式得到单位长度 ds 受到的力 $d\boldsymbol{F}$ 为

$$d\boldsymbol{F}=I(d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

这里矢量 $d\boldsymbol{s}$ 的大小为 ds,方向为正电荷移动的方向(习惯电流方向).实际上,(1)式给出了作用在 ds 长度内的载流子上的力.经过碰撞,这一力转化为作用在整个导线上的力,而且该力能对导线作功.作用在导线 ab 上的合力可以由对(1)式从 a 到 b 积分求得.若导线为一长为 L 的直导线且置于匀强磁场$\boldsymbol{B}$中,则直接得

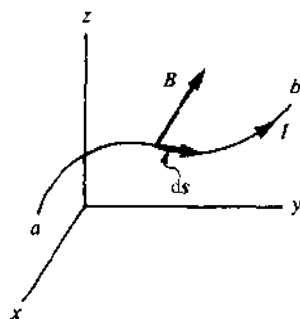


图 28-10

$$\boldsymbol{F}=I(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}) \tag{2}$$

或 $F=ILB\sin\theta$;写成分量形式

$$F_x=I(B_zL_y-B_yL_z),\quad F_y=I(B_xL_z-B_zL_x),\quad F_z=I(B_yL_x-B_xL_y)$$

28.44 一通有10 A电流的导线与一匀强磁场垂直放置.作用在导线上80 cm长部分的力为0.2 N.求磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

解 对于长为 l 的直导线,$F=IlB\sin90°$即$0.2=10(0.80)B$,$B=0.025$ T.$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于力和导线所决定的平面.

28.45 计算作用在11 cm长的直导线上的力.导线中电流为12 A,且置于一与之垂直的 $B=200\ \mu\text{T}$ 的磁场中.

解 $F=IlB=12(0.11)(0.0002)=260(\mu\text{N})$

28.46 在赤道上,地球的磁场接近水平,从南半球指向北半球.磁场大小为0.50 G.求作用在长20 m且通过30 A电流的导线上的力的大小和方向?(a)导线由东向西,(b)导线由北向南.

解 因 $1\text{T}=10^4\text{G}$.(a) $F=ILB\sin\theta=30(20)(5\times10^{-5})(1)=0.030(\text{N})$,向下.(b) $F=ILB\sin\theta=30(20)(5\times10^{-5})(0)=0$.

28.47 在内布拉斯加州,地磁场的水平分量为0.20 G.若该地有一导线通过电流30 A且竖直向上放置,求1 m长该导线所受力的大小和方向.

解 磁场 $\boldsymbol{B}$ 的竖直分量与电流平行故不产生磁场力;所以 $F=ILB_H=(30\text{A})(1\text{m})(2\times10^{-5}\ \text{T})=6\times10^{-4}\text{N}$,指向西.

28.48 设导线中电流为 5 A,若 $B=0.15\text{T}$ 求图 28-11 中各段导线所受的磁场力.

解 每一段直导线 $\boldsymbol{F}=I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{L}$ 为导线的长度矢量.对于导线段 AB、DE, $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行, $\sin\theta=0$, $F=0$.在 BC 段, $F=ILB=15(\text{A})(0.16\text{m})(0.15\text{T})=0.12\text{N}$,方向指向纸内.在 CD 段, $F=(5\text{A})(0.20\text{m})(0.15\text{T})\sin65°=0.136\text{N}$,方向指向纸外.

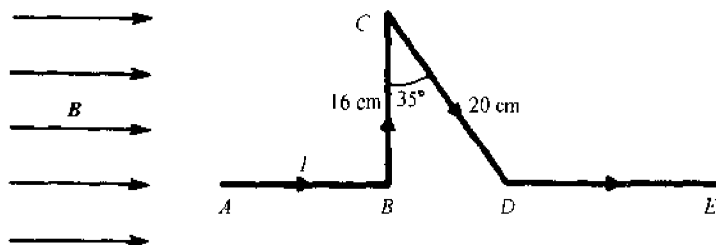


图 28-11

28.49[c] 一导线做成半圆状,放在光滑桌面上.一竖直向下的均匀磁场 B 垂直于导线的区域,如图 28-12 所示.半圆导线的两端分别与两弹簧电阻 C、D 相接,C、D 另一端又分别与一电池相连,产生电流 i.证明弹簧的拉力之和为 $2Bir$,其中 r 是半圆周的半径.

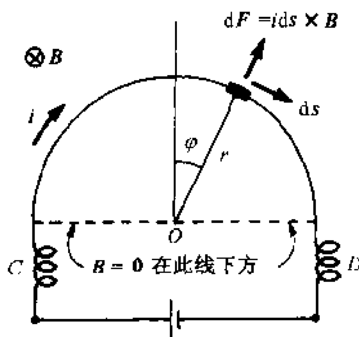


图 28-12

证 在半圆周上 ds 长的导线受到沿径向向外的磁场力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$.该力的大小 $\mathrm{d}F=iB\mathrm{d}s=iBr\mathrm{d}\varphi$.对整个半圆周受到的力求和,平行于该半圆直径的分量抵消.磁场力的合力沿 Ox 轴,大小为

$$F_m=\int\mathrm{d}F\cos\varphi=2iBr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=2iBr(\sin\pi/2-\sin0)=2iBr$$

为使线路保持平衡,弹簧 C、D 必须施加一大小与 F_m 相等,方向与之相反的力,所以弹簧的拉力之和为 $2iBr$.实际上,为达到圆周的平衡每个弹簧上的拉力为 iBr.

28.50[c] 图 28-13 表示一任意形状的电路任意放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中.证明该线路上所受的合力为零.

证 作用在电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 上的力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}$.对整个电路积分求合力,因 $\boldsymbol{B}$ 是一常矢量:

$$\boldsymbol{F}=\oint I\mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}=I(\oint\mathrm{d}\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}=I(0\times\boldsymbol{B})=0$$

这里我们用到了 $\boldsymbol{R}$ 经过电路一周又回到原来的位置的事实.

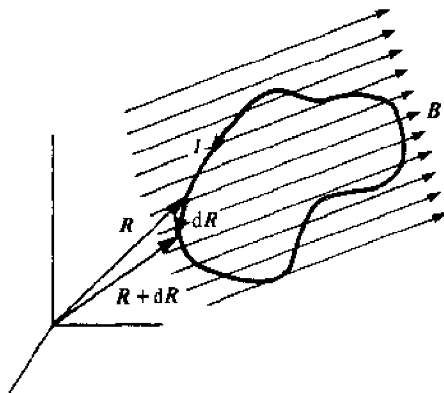


图 28-13

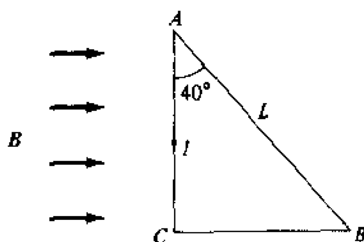


图 28-14

28.51 如图 28-14 所示的电路，求导线(a)AC，(b)BC，(c)AB，(d)$ABCA$ 所受到的力的大小和方向.

解 ☞ (a)$F = I(L\cos40°)B\sin90° = 0.77ILB$ 指向纸内.(b)$F = I(L\sin40°)B\sin0° = 0$.(c) $F = ILB\sin(90° - 40°) = 0.77ILB$ 指向纸外.(d) $\sum F = 0.77ILB$(向内) $+ 0 - 0.77ILB$(向外) $= 0$(是题 28.50 的必然结果).

28.52 如图 28-15 所示，半径为 R 的半圆周导线两端与 b_1、b_2 相连，导线通电流 I 且放在平行于 Z 的场匀磁场中. YZ 面与半圆面的夹角为任意值，求导线上的合力.

解 ☞ 该题我们不采用题 28.51 那样对导线积分的方法，而是利用 28.50 题的结果.我们假设有电流 I 沿 y 轴从 b_2 流向 b_1，构成一个闭合回路.作用在该直导线上的力为 $\mathbf{F}' = I(2R\mathbf{j} \times B_z\mathbf{k}) = 2IRB_z\mathbf{i}$.那么作用在半圆周上的力必然与 $\mathbf{F}'$ 抵消，即 $\mathbf{F} = -\mathbf{F}' = -2IRB_z\mathbf{i}$.

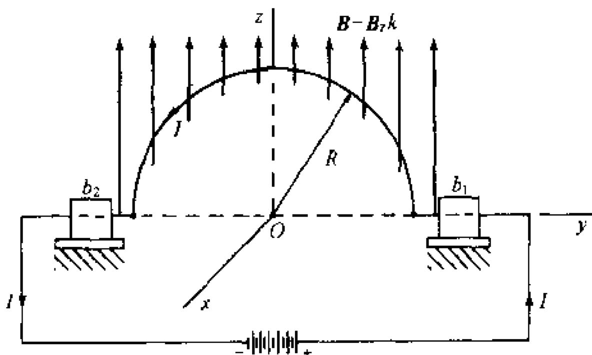


图 28-15

28.53 如图 28-16(a)所示，一根长磁性杆两端分别为 N、S 极.在磁极附近，磁场是径向的.在如图所示的环形电路位置，径向磁场大小为 B.求作用在该电路上的总磁场力的大小和方向.

解 ☞ 图 28-16(b)表示一小段导线的截面图，电流由里向外.该段导线所受的力为 $dF = BI\,ds$；由于对称性，当把电路所受的力相加，在电路平面内的合力为零，而垂直于电路平面的合力为 $F = IB\sin\theta \times$ 周长 $= 2\pi aIB\sin\theta$.这个非零结果也反映出该场不是均匀的(磁场方向变化).

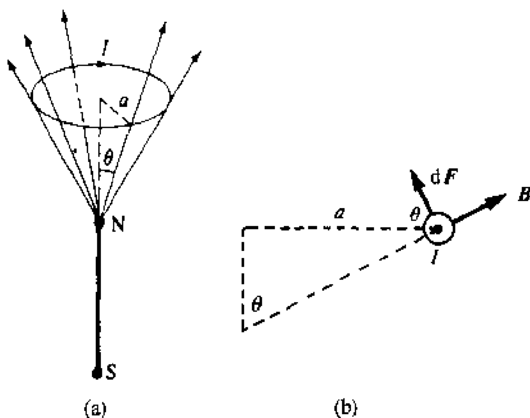


图 28-16

28.54 如图 28-17 所示，一根质量为 m 的金属杆可以在两根导线杆上沿水平桌面滑动.导线和杆中通有电流 I 且整个系统置于竖直向下的磁场 B 中.若杆所受到的摩擦力 f 很小而不影响杆的运动，求金属杆的加速度.杆将向左还是向右运动? (b)若磁场方向平行于桌面向右且与金属杆成 θ 角呢?

解 ☞ (a)由右手定则杆受到的力向右.因阻力 f 的方向与运动方向相反,$F=ma$ 就写成 $ILB-f=ma$,得到 $a=(ILB-f)/m$.(b)磁场力 $ILB\sin\theta$ 方向向上.因为磁场力在水平方向没有分量,所以杆不滑动.

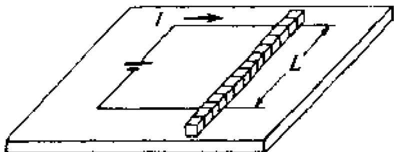


图 28-17

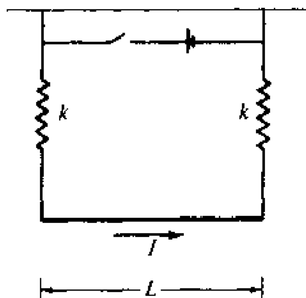


图 28-18

28.55　如图 28-18 所示,一质量为 M 的杆系在两根导线上.设均匀磁场 B 垂直于纸面向内.当杆中通过电流为 I 时,求每根导线上的拉力.

解 ☞ 由右手定则得到磁场力为 ILB,竖直向上.根据竖直方向受力平衡得到 $2T+ILB=Mg$,所以 $T=(Mg-ILB)/2$.

28.56　如图 28-18 所示,一质量为 M 的杆系在两根弹簧上.设磁场 B 垂直于纸面向外.每根弹簧的劲度系数为 k,当杆中通过如图所示的电流 I 时该金属杆如何运动?

解 ☞ 由右手定则得到磁场力大小为 ILB 且方向竖直向下.这一力使得平衡位置向下移动了 $(ILB)/(2k)$.(两根平行且劲度系数为 k 的弹簧等效于一根弹性系数为 $2k$ 的弹簧.)

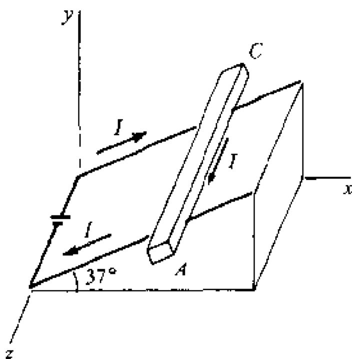


图 28-19

28.57　在图 28-19 中,杆 AC 的质量为 50 g,它沿着斜面边缘两根相距 40 cm 的金属轨道自由滑动.有一电流 I 沿所示的方向通过轨道和杆,而沿着 $-y$ 方向的磁场 $|B_y|=0.20$ T.当电流 I 为多大时该杆保持静止?忽略杆上的轻微摩擦力.

解 ☞ 磁场力方向沿着 x 轴正方向.若杆在斜面上不运动,$\sum F=0$: $IL|B_y|\cos 37°=mg\sin 37°$ 由此得到

$$I=\frac{mg\tan 37°}{L|B_y|}=\frac{(0.050)(9.8)(0.75)}{(0.40)(0.20)}=4.6(\text{A})$$

28.58　在一惯性坐标系中,一均匀磁场大小为 0.3 T 且沿着 z 轴.有一直导线长为 250 mm 且方向余弦为 $l=0.45$, $m=0.56$, $n=0.6956$,通过的电流为 50 A.求导线受力的大小和方向.

解 ☞ 因 $\boldsymbol{B}=0.3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{L}=(0.250)(0.45\boldsymbol{i}+0.56\boldsymbol{j}+0.6956\boldsymbol{k})$,运用 $\boldsymbol{F}=I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{F}=50[(0.250)(0.45\boldsymbol{i}+0.56\boldsymbol{j}+0.6956\boldsymbol{k})\times(0.3\boldsymbol{k})]$$
$$=2.10\boldsymbol{i}-1.688\boldsymbol{j}(\text{N})$$

所以,$F=(2.1^2+1.688^2)^{1/2}=2.694$ (N);$\boldsymbol{F}$ 的方向余弦为

$$\alpha_1=\frac{2.1}{2.694}=0.78, \alpha_2=\frac{-1.688}{2.694}=-0.63, \alpha_3=0$$

28.59　一导线连接 a、b 两点.导线中通以电流从 a 到 b 且放在一均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中.证明导线所

受的力为 $I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 为从 a 指向 b 的矢量.

证 ☞ 这是 28.50 题的另一种形式，用同样的方法可以得到证明.

28.60 如图 28-20 所示，一个由三边组成的框架竖直悬挂在 AC 轴上，三条边的长度相等且线密度为 0.10 kg/m. 该框架中通过的电流为 10.0 A 且放在一竖直向上大小为 10 mT 的均匀磁场中. 求框架偏离竖直方向的角度.

解 ☞ 在图 28-20 中，作用在斜倾边的磁场力与 AC 平行，所以对 AC 轴不产生转动力矩. 作用在水平边上的磁场力为

$$F_{磁} = i\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

力的大小为 $F_{磁} = iLB\sin 90° = iLB$ 且方向为水平向右，与 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 垂直. 磁场力对 AC 轴的力矩大小为

$$T_{磁} = iLB(L\cos\theta) = iL^2B\cos\theta \tag{2}$$

使 θ 变大. 重力对 AC 轴的力矩为

$$T_{重} = -\left[(\lambda L)g(L\sin\theta) + 2(\lambda L)g\left(\frac{1}{2}L\sin\theta\right)\right] \tag{3}$$

负号表示重力有使框架与竖直方向夹角 θ 减小的趋势，λ 表示导线单位长度的质量. 平衡时，等式(2)和(3)表示的力矩相互抵消，得到 $\tan\theta = (Bi)/(2\lambda g)$. 代入数据，得 $\tan\theta = 0.0510$，$\theta \approx 3°$.

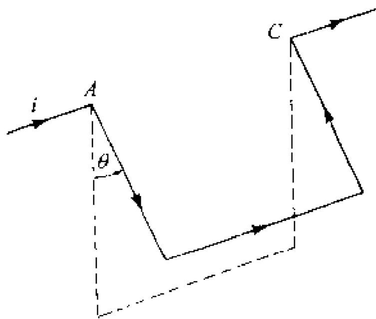


图 28-20

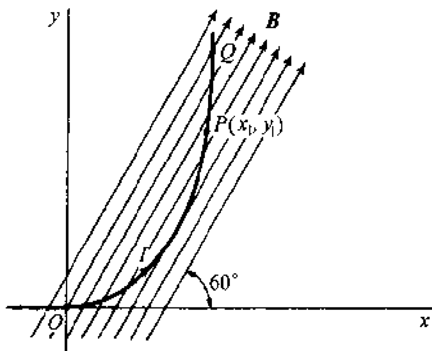


图 28-21

28.61 如图 28-21 所示，一抛物线状的导线位于 xy 面内且通过电流 $I = 12$A. 一均匀磁场 $B = 0.4$ T，与 x 轴成 60°角，存在于整个平面. 计算原点与点 $x_1 = 0.25$ m，$y_1 = 1.00$ m 间的导线所受的合力.

解 ☞ 按 28.59 题中的解释，有 $I = 12$ A，$\boldsymbol{L} = 0.25\boldsymbol{i} + 1.00\boldsymbol{j}$ (m)，$\boldsymbol{B} = 0.2\boldsymbol{i} + 0.2\sqrt{3}\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} = 12\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.25 & 1.00 & 0 \\ 0.2 & 0.2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -1.36\boldsymbol{k}(\text{N})$$

28.3 力矩与磁矩

28.62 N 匝线圈中每匝线圈中电流为 I，且放在一恒定的外部磁场中. 求这 N 匝线圈受到的力矩.

解 ☞ 这 N 匝线圈受到的力矩 $\tau = NIAB\sin\theta$，A 为每匝线圈的面积，θ 是磁场线与线圈平面法线方向的夹角(该公式在题 28.70 中给出). 线圈的转动方向用右手定则判断：右手拇指的方向垂直于线圈的平面，其余四指沿电流的环绕方向. 力矩使拇指方向与外磁场方向趋于一致(一致时力矩为零).

28.63 如图 28-22 所示，一载流线圈电流为 I，且线圈平面垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$. 求作用在该线圈上的合力和力矩.

解 ☞ 由 28.50 题得合力为零. 由图 28-22 知,作用在线圈某段的力 ΔF 促之向外侧运动而不是转动.所以线圈上的力矩为零.

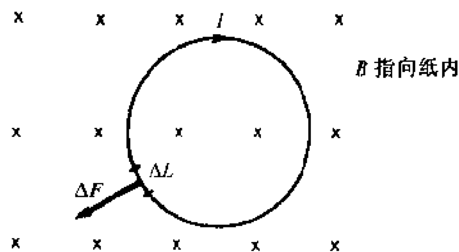


图 28-22

28.64　一 20 匝的线圈面积为 800 mm^2,通过的电流为 0.5 A.放置在磁场强度为 0.3 T 的磁场中,且线圈与磁场方向平行.求作用在线圈上的力矩.

解 ☞ $\tau = 20IAB\sin 90° = 20(0.5)(800\times 10^{-6})(0.3)(1) = 2.4\times 10^{-3}(N\cdot m)$

28.65　如图 28-23 所示,一 40 匝的线圈中通以电流 0.5 A.将它放置于 $B = 0.25$ T 的磁场中.求作用在线圈上的力矩.线圈将如何旋转?

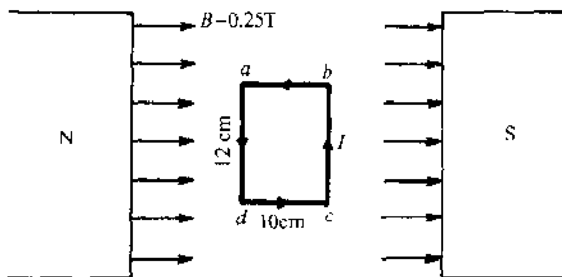


图 28-23

解 ☞ 方法一

$$\tau = NIAB\sin\theta = (40)(2\ A)(0.10\ m\times 0.12\ m)(0.25\ T)(\sin 90°)$$
$$= 0.24\ N\cdot m$$

(记住 θ 是磁场线与线圈法线方向的夹角.)由右手定则知线圈将沿竖直方向的轴旋转且 ad 边转向纸外.

方法二　因为 dc 边和 ab 边方向与磁场方向一致,作用在它们上的力为零,而作用在每个竖直导线上的力为 ad 边上 $f = ILB = (2A)(0.12m)(0.25T) = 0.060N$ 指向纸外,bc 边上受力仍为 f,方向为指向纸内.所以就得到一对大小为 $40f$ 且相距 10 cm 的力,产生的力矩为

$$\tau = (力)(力间距离) = (40\times 0.060\ N)(0.10\ m) = 0.24\ N\cdot m$$

使得 ad 边转向纸外.

28.66　图 28-24(a)中的电流计内阻为 1.00 Ω.由电阻为 338.6 Ω/km 的 30 号铜导线构成.矩形线圈的面积为 2.50 cm×2.00 cm.(a)线圈有多少匝?(b)电流计的磁场是 0.40 T.阻尼系数为 5.00×10^{-6}N·m/rad.电流计在通过 1.00 mA 的电流时指满,求满刻度时指针转过的弧度.

解 ☞ 如图 28-24(b)所示,线圈在任意位置处,线圈平面总是平行于线圈附近的磁场 B,这就产生了力矩.(a)一根阻值为 1 Ω 的 30 号铜导线的长度为 1 Ω/(338.6 Ω/km) = $(10^5/338.6)$ cm = 295.3 cm.因为线圈的周长为 $2(2.50+2.00) = 9.00$ cm,则线圈的匝数 $N = 295.3/9.00 = 32.8\approx 33$ 匝.(b)指针指向满刻度是磁场和阻尼共同作用的结果;$NBia = k\theta$.因为磁场 $B = 0.40$ T,满刻度时电流 $i = 1.00\times 10^{-3}$ A,线圈面积 $a = (2.50\times 10^{-2}\ m)(2.00\times 10^{-2}\ m) = 5.00\times 10^{-4}\ m^2$,阻尼系数

$K = 5.00\times10^{-6}\,\mathrm{N\cdot m/rad}$，所以

$$\theta = \frac{NBia}{k} = \frac{(33)(0.40)(1.00\times10^{-3})(5.00\times10^{-4})}{(5.00\times10^{-6})}$$

$$= 1.32(\mathrm{rad}) = 75.6^\circ \approx 76^\circ$$

通常指针偏转的角度 θ 与电流 i 成正比

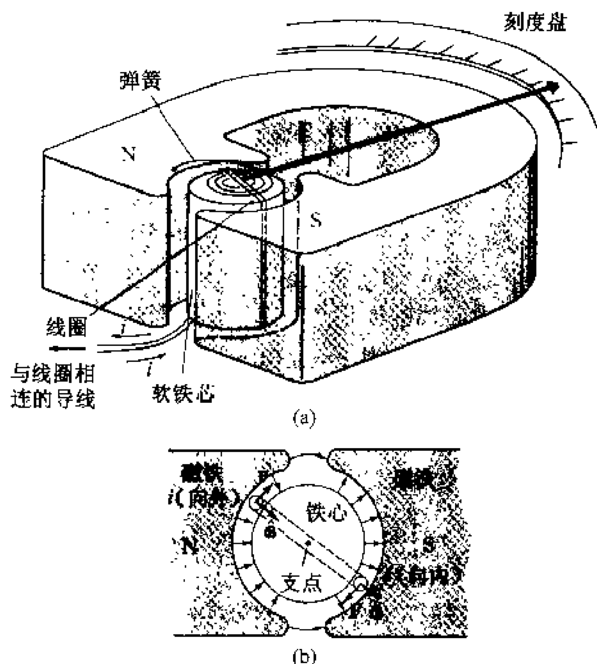


图 28-24

28.67　下面的方法可以用来测量灵敏电流计的内阻. 用一可变的高阻与电流计和电池串联，调节该电阻使电流计指满. 现将一可变的低值电阻与电流计两端相连而其它不变，该电阻与电流计的线圈并联. 调节低值电阻使电流计读数变为原来满刻度值的一半，证明电流计的内阻等于此时低值可变电阻的阻值.

证　☞ 由题 28.66 知，电流计的偏转与线圈中的电流成正比. 电路如图 28-25 所示. 因为低值可变电阻 r 对通过电流计的电流有明显的影响，r 必与电流计线圈电阻 R_G 在同一数量级上. 因为可变高阻 R 比 R_G 和 r 都大得多，所以电路的总电阻与 R 相差不大，电路中电流 $i\approx V/R$. 因为电流计与 r 并联，$i_1+i_2=i$，$i_1R_G=i_2r$. 所以当低值可变电阻 r 调节至 $i_1=i_2=i/2$ 时，$R_G=r$，即得到证明.

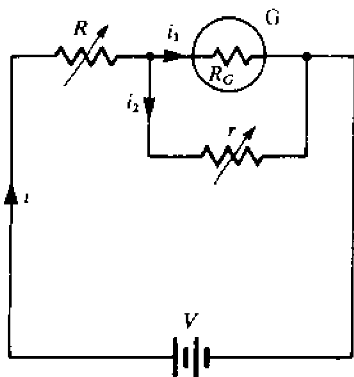


图 28-25

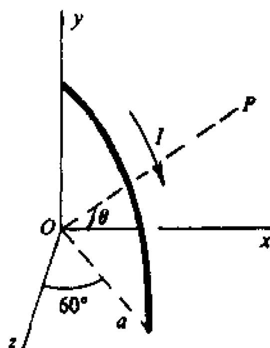


图 28-26

28.68　图 28-26 画出了一简单圆形线圈的四分之一，导线中通过的电流为 14 A. 线圈半径 a

= 5 cm. 一均匀磁场 B = 300 G, 沿 x 轴正方向. 求整个线圈受到的力矩和线圈的旋转方向.

解 ☞ 电路的法线方向 OP 与磁场的 $+x$ 方向所成的角为 $\theta=60°$, 所以

$$\tau = NIAB\sin\theta = (1)(14\text{A})(\pi\times 25\times 10^{-4}\text{m}^2)(0.03\ \text{T})\sin 60° = 2.9\times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

由右手定则知线圈以 y 轴为转轴转动, 使 60° 的角减小.

28.69　一矩形线圈高 6 cm、宽 2 cm, 放在一强度为 0.02 T 的磁场中. 若线圈有 200 匝, 且通过的电流为 50 mA, 求作用在线圈上的力矩. 设线圈面与磁场平行.

解 ☞ 力矩为

$$\tau_m = nBIA = (200)(0.02\text{T})(50\times 10^{-3}\text{A})(12\times 10^{-4}\text{m}^2) = 2.4\times 10^{-4}\text{N}\cdot\text{m}$$

28.70[c]　一任意形状的平面线圈面积为 $\boldsymbol{A}$, 有 n 匝且通过电流为 I, 线圈放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中, 证明该线圈受到的力矩为 $\boldsymbol{\tau} = nI\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

证 ☞ 根据图 28-27 的坐标系, 作用在线圈上的力元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = nI\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}nIB_z\mathrm{d}y - \boldsymbol{j}nIB_z\mathrm{d}x + \boldsymbol{k}nI(B_y\mathrm{d}x - B_x\mathrm{d}y)$$

因为合力为零(28.50 题), 我们可以选一简单的点——原点——来计算力矩. 根据 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, 以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的表达式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & 0 \\ nIB_z\mathrm{d}y & -nIB_z\mathrm{d}x & nI(B_y\mathrm{d}x - B_x\mathrm{d}y) \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}(nIyB_y\mathrm{d}x - nIyB_x\mathrm{d}y) - \boldsymbol{j}(nIxB_y\mathrm{d}x - nIxB_x\mathrm{d}y) + \boldsymbol{k}(-nIxB_z\mathrm{d}x - nIyB_z\mathrm{d}y)$$

对线圈的周长积分, $x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2/2)$, $y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(y^2/2)$ 项都消去, 所以只剩下

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i}nIB_y\oint y\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}nIB_x\oint x\mathrm{d}y$$

但线圈的面积为 $A = \oint x\mathrm{d}y = -\oint y\mathrm{d}x$, 所以

$$\boldsymbol{\tau} = nIA(-\boldsymbol{i}B_y + \boldsymbol{j}B_x) = nIA(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}) = nI(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{k}$ 为平面线圈的面积矢量. 显然(1)与坐标系无关, 写成 $\tau = nIAB\sin\theta$, θ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角.

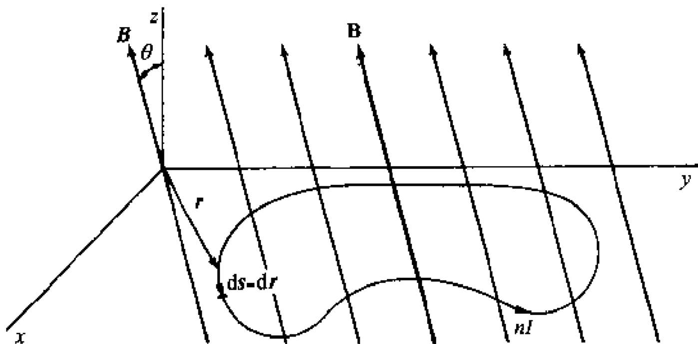


图 28-27

28.71　如图 28-28, n 匝的矩形线圈放在 YZ 面上, 面积为 ab 且通过的电流为 I, 该区域中有一匀强磁场 $\boldsymbol{B}$, 方向余弦为 $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$. 已知 $a = 100$ mm, $b = 150$ mm, $n = 20$, $I = 12$ A, $\beta_1 = 0.49$, $\beta_2 = 0.56$, $\beta_3 = 0.668$, B = 0.4 T, 求线圈所受力矩的大小和方向.

解　☞ $B=(0.4)(0.49i+0.56j+0.668k)$ T,在给定的方向上面积 $A=(ab)\ i=0.015\ i\mathrm{m}^2$.于是

$$\tau=(20)(12)[0.015i\times(0.4)(0.49i+0.56j+0.668k)]$$
$$=-0.962j+0.806k(\mathrm{N\cdot m})$$

所以 $\tau=1.255$ N·m,方向余弦为 $\alpha_1=0,\alpha_2=-0.766,\alpha_3=0.642$.

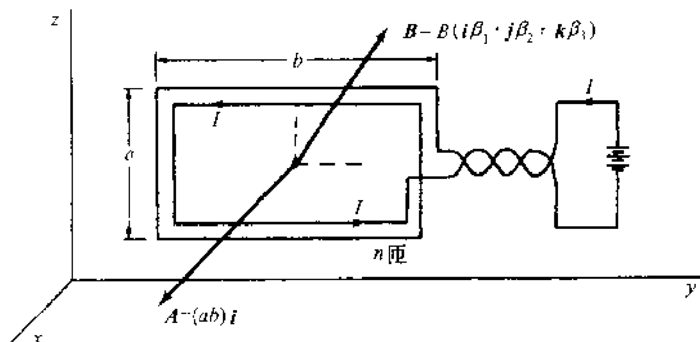


图 28-28

28.72　定义载流线圈的磁矩,并表示出线圈在均匀磁场 B 中所具有的势能.

解　☞ 定义 $\tau=\Pi\times B$,其中 Π 是均匀磁场 B 中线圈或磁铁的磁矩,所以由题 28.70 得 $\Pi=nIA$.(磁矩也常用 M 或 μ 表示.)

把线圈由 $\Pi\perp B$ 的位置转到 Π 与 B 夹角为 θ 的位置,克服力矩作功为

$$U_\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\tau\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\Pi B\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\Pi B\cos\theta=-\Pi\cdot B.$$

此即为势能.

28.73　一平面线圈有 12 匝,通过的电流为 15 A.线圈放在一均匀磁场中,$B=0.2i+0.3j-0.4k$(T),线圈平面面积矢量为 $A=0.04i-0.05j+0.07k(\mathrm{m}^2)$.求(a)线圈的磁矩,(b)线圈在给定方向上的势能,(c)线圈法线方向与磁场方向的夹角.

解　☞ (a)　$\Pi=nIA=(12)(15)(0.04i-0.05j+0.07k)$

$$=7.2i-9.0j+12.6k(\mathrm{A\cdot m^2})$$

(b)　$U_\theta=-\Pi\cdot B=-[(7.2)(0.2)+(-9.0)(0.3)+(12.6)(-0.4)]=+6.3\ (\mathrm{J})$

(c) Π 与 B 间的夹角为 θ, $U_\theta=-\Pi B\cos\theta$,

$$\cos\theta=-\frac{U_\theta}{\Pi B}=\frac{6.3}{(7.2^2+9.0^2+12.6^2)^{1/2}(0.2^2+0.3^2+0.4^2)^{1/2}}=-0.6851$$

$\theta=133.24°$.

28.74　(a)定义通过任意表面 S 的总磁通量 Φ,并把磁通量与电通量作一比较.(b)计算题 28.73 中线圈的磁通量.

解　☞ (a)正如电通量 Ψ 与电场 E 有关一样,磁通量 Φ 也与磁场 B 相联系.所以通过任一面元 $\mathrm{d}S$ 的磁通量为 $\mathrm{d}\Phi=B\cdot\mathrm{d}S$ Wb,则通过面 S 的磁通量为

$$\Phi=\int_S B\cdot\mathrm{d}S\ \mathrm{Wb}$$

国际单位制中磁通量的单位是韦伯,1 Wb=1 T·m^2=1V·s=1 J/A.所以有时 B(磁通量密度)单位也为 Wb/m^2.

与电场类似也可以用"磁场线"或者"磁通线"解释 Φ.然而,对于磁场而言,其高斯定理为 $\Phi_{闭合面}=0$,这意味着磁场线不是终止于某一"磁荷",而是自身是闭合的.(b)对于一均匀磁场和 n 匝的平面线圈而言(有效面积为 nA),

$$\Phi=\int_S B\cdot\mathrm{d}S=B\cdot\int_S\mathrm{d}S=B\cdot nA=B\cdot\frac{1}{I}\Pi=-\frac{U_\theta}{I}$$

代入 $U_\theta=6.3$ J 和 $I=15$ A，得到 $\Phi=-0.42$ Wb. 负号表示磁场线方向与 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反.

28.75 对图 28-14 所示载流线圈，求(a)磁矩的大小和方向，(b)作用在线圈上的力矩.

解 ☞ (a)由右手定则知磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 指向纸内，大小为 $IA=[I(L\sin40°)(L\cos40°)]/2=0.246IL^2$. (b) $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}$, $\tau=\mu B\sin90°=0.246\ IL^2B$.

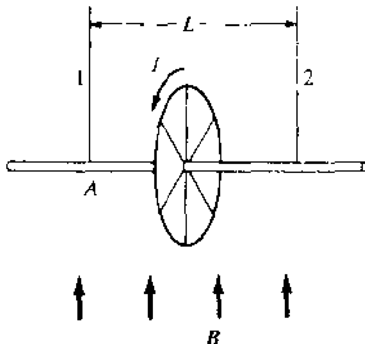


图 28-29

28.76 图 28-29 中有一半径为 b 的环形电流线圈牢牢固定在转轴上，且位于两根支撑杆的中心位置. 当没有外磁场时，两杆上的拉力相等且都为 T_0. (a)求当有一竖直向上的磁场 $\boldsymbol{B}$ 时两杆的拉力，(b)求磁场平行于轴时杆上的拉力.

解 ☞ (a) $\tau=\mu B=\pi b^2IB$，方向为指向纸外，线圈开始转动，杆 2 上的拉力减少了 ΔT. 对 A 点求力矩得到 $L\Delta T=\mu B$，所以 $\Delta T=(\pi b^2IB)/L$，所以 $T_1=T_0+\Delta T$, $T_2=T_0-\Delta T$. (b)因 $\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}=0$，所以杆上的力与没有磁场时一样.

28.77 在氢原子的玻尔模型中电子绕核作圆周运动. 电子的速度为 2.2×10^6m/s，轨道的半径为 5.3×10^{-11}m. (a)证明轨道上的等效电流为 $ev/2\pi r$. (b)证明 $\boldsymbol{\mu}=-(e/2m)\boldsymbol{L}$，其中 $\boldsymbol{L}=mrv$ 是电子在其轨道上的角动量.

证 ☞ (a)因为电子每绕一周通过的电荷为 $-e$, $i=e/T$，其中 $T=(2\pi r)/v$，所以 $i=(ev)/(2\pi r)$. (b)磁矩的大小为

$$\mu=iA=\left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2)=\frac{e}{2m}(mvr)=\frac{e}{2m}L$$

因为电子带负电荷，$\boldsymbol{\mu}$ 方向与 $\boldsymbol{L}$ 反平行.

28.78 (a)一半径为 r 质量为 m 的圆形线圈位于 xy 面内且放在一平面桌上，线圈中的电流为 I. 在该位置处，地磁场 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}$. 则要使电路的一边离开桌面向上，电流 I 应为多少？(b)若 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_z\boldsymbol{k}$ 呢？

解 ☞ (a)电路的磁力矩应等于以线圈的切线为轴的重力力矩. 重力力矩 $=mgr$，磁力矩 $=|\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}|=\mu B\sin90°=\pi r^2IB$. 由两式相等得到 $I=(mg)/[\pi r(B_x^2+B_y^2)^{1/2}]$. (b)只有 B_x 产生力矩，所以 $I=(mg)/(\pi rB_x)$.

28.79 一半径为 r 的环形线圈位于 xy 面内且通过的电流为 I. 线圈放在磁场 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$ 中. 求磁场对线圈产生的力矩. 求出两种可能的答案.

解 ☞ 力矩为 $\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}=I\pi r^2(\pm\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{B}=I\pi r^2[(\pm\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j})]=\pm\pi r^2I(B_x\boldsymbol{j}-B_y\boldsymbol{i})$. $\pm$ 号是由于电流可沿两个方向流动.

28.80 图 28-30 中有一矩形线圈，周围有一磁场 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{i}$. 如果线圈可以移动，$\phi$ 角将增大还是减小？

解 ☞ $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}=[(IA\cos\phi)\boldsymbol{i}-(IA\sin\phi)\boldsymbol{k}]\times B\boldsymbol{i}=(-IAB\sin\phi)\boldsymbol{j}$. $\boldsymbol{\tau}$ 沿 y 轴负方向，使 ϕ 减小，磁矩方向与磁场方向趋于一致.

28.81[c] 如图 28-31 所示的电动机有 N 匝线圈，每匝面积为 a，通过的电流为 i. 证明该电动机输出的功率 $P=4\nu NiaB$，其中 ν 是线圈每秒转动的圈数.

证 ☞ 当磁矩与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 θ，线圈的力矩为 $T(\theta)=NiaB\sin\theta$. 该力矩每半周做的功为

$$\frac{1}{2}\Delta W=\int_0^{\pi}T(\theta)\mathrm{d}\theta=NiaB\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= NiaB(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}) = 2NiaB$$

所以电动机每周输出的功为 $\Delta W = 4NiaB$. 若线圈每秒转动 ν 周，输出功率 $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = \nu\Delta W = 4\nu NiaB$.

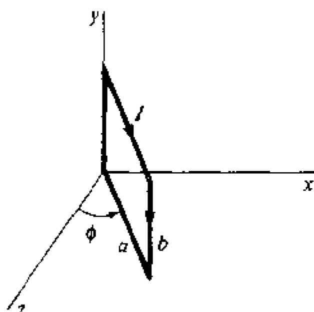


图 28-30

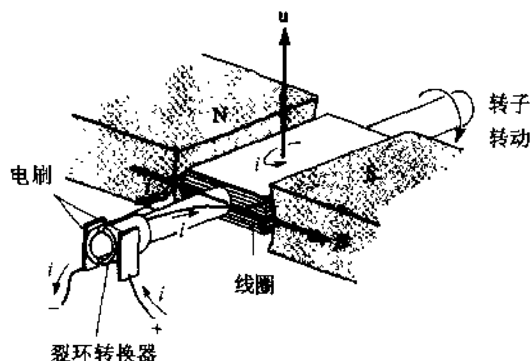


图 28-31

28.82[c] 一均匀带电的圆盘带的总电量为 $|q|$，半径为 r，且以恒定的角速度 ω 转动. 证明磁矩的大小为 $\omega|q|r^2/4$.

证 ☞ 电荷面密度为 $|q|/(\pi r^2)$. 所以在半径为 R 宽为 $\mathrm{d}R$ 的圆环内

$$\mathrm{d}q = \left(\frac{q}{\pi r^2}\right)(2\pi R\mathrm{d}R) = \frac{2q}{r^2}(R\mathrm{d}R)$$

该环产生的电流是电量除以转动周期：

$$\mathrm{d}i = \frac{\mathrm{d}q}{(2\pi/\omega)} = \frac{q\omega}{\pi r^2}(R\mathrm{d}R)$$

所以环产生的磁矩为 $\mathrm{d}M = a|\mathrm{d}i|$，$a$ 为环的面积，即

$$\mathrm{d}M = \pi R^2|\mathrm{d}i| = \frac{|q|\omega}{r^2}(R^3\mathrm{d}R)$$

因为各环产生的磁矩相互平行，所以

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_{R=0}^{r} \frac{|q|\omega}{r^2}(R^3\mathrm{d}R) = \frac{|q|\omega}{r^2}\left(\frac{R^4}{4}\Big|_{R=0}^{R=r}\right) = \frac{|q|\omega r^2}{4} \tag{1}$$

28.83 由 28.82 题，(a)若盘的质量为 m，则角动量为多少？(b)求磁矩与角动量大小的比值. 电荷的符号如何影响这两个矢量的方向之间的关系？

解 ☞ (a)设圆盘有均匀的质量分布，则转动惯量 $I = \frac{1}{2}mr^2$. 所以角动量的大小为 $L = \frac{1}{2}mr^2\omega$. (b)利用 28.82 题的(1)式

$$\frac{M}{L} = \left(\frac{|q|\omega r^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}mr^2\omega}\right) = \frac{|q|}{2m}$$

若电荷 q 为正，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 平行. 若电荷 q 为负，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 反平行. $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{L}$ 的关系可概括为

$$\boldsymbol{M} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L} \tag{1}$$

[注：与 28.77 题相比，只要物体上的电荷密度与质量密度之比为定值，方程(1)对一切宏观物体(不论是否均匀带电)都成立.]

28.84 一半径为 a 的球壳均匀带电，面密度为 σ，且绕一过其中心的轴以频率 f 转动. 证明该球的磁矩为 $\frac{8}{3}\pi^2a^4\sigma f$.

证 ☞ 设均匀表面质量密度为 λ，利用 28.83 题的(1)式，绕转动轴的转动惯量(见图 28-32)为

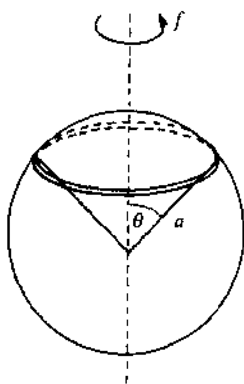


图 28-32

$$I = \int_0^{\pi} (a\sin\theta)^2 \lambda (2\pi a \sin\theta) a\, d\theta$$

$$= 2\pi\lambda a^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\pi\lambda a^4$$

则角动量为 $L = I(2\pi f) = \frac{16}{3}\pi^2\lambda a^4 f$. 于是

$$M = \frac{q}{2m}L = \frac{\sigma}{2\lambda}L = \frac{8}{3}\pi^2\sigma a^4 f$$

28.85　一个电子的内禀(自旋)磁矩大小为 $0.93\times10^{-23}\text{A}\cdot\text{m}^2$, 内禀角动量大小为 $0.53\times10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$. 则磁矩与角动量的比值为多少? 该比值与题 28.83 中得到的一荷质比与电子相等的带电体的比值 $e/2m_e$ 是否相等?

解　☞ 磁矩与角动量的比值为

$$\frac{M_e}{L_e} = \frac{0.93\times10^{-23}\ \text{A}\cdot\text{m}^2}{0.53\times10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}} = 1.8\times10^{11}\ \text{C/kg}$$

而

$$\frac{e}{2m_e} = \frac{1.60\times10^{-19}\text{C}}{2(9.11\times10^{-31}\ \text{kg})} = 0.88\times10^{11}\ \text{C/kg}$$

所以 M_e/L_e 近似等于预料值的两倍. 这是原子系统量子效应的结果.

28.86　由题 28.85, 内禀角动量是由于电子的自旋运动引起的. 假设电子是个自旋运动的球, 计算电子在其轨道上某点的速度, 用角动量和经典半径的值 2.8×10^{-15} m 表示. 为什么说这种模型是不准确的?

解　☞ 均匀球绕过其中心轴的转动惯量为 $I = \frac{2}{5}mr^2$. 所以自旋球的角动量为 $L = I\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega$. 因球上某点速度为 $v = r\omega$, 角动量写成 $L = \frac{2}{5}mrv$. 解关于 v 的方程并代入 $L = 0.53\times10^{-34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $m = 9.11\times10^{-31}$kg, $r = 2.8\times10^{-15}$m, 得

$$v = \frac{5L}{2mr} = \frac{5(0.53\times10^{-34})}{2(9.11\times10^{-31})(2.8\times10^{-15})} = 5.2\times10^{10}(\text{m/s})$$

该速度约为光速的 200 倍. 把电子看成是类似自旋球不准确, 因为出现了超光速, 这是不可能的.

28.4　磁场源; 毕奥-萨伐尔定律

28.87　运动电荷所产生的磁场是多少?

解　☞ 图 28-33 画出了相对于一惯性参考系 x、y、z 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的点电荷. q 的瞬时位置相对于固定观察点 P 而言可写成位置矢量 $\boldsymbol{r}$(或 $-\boldsymbol{r}$). 于是在 P 点存在一磁场, 其瞬时值在惯性系内可

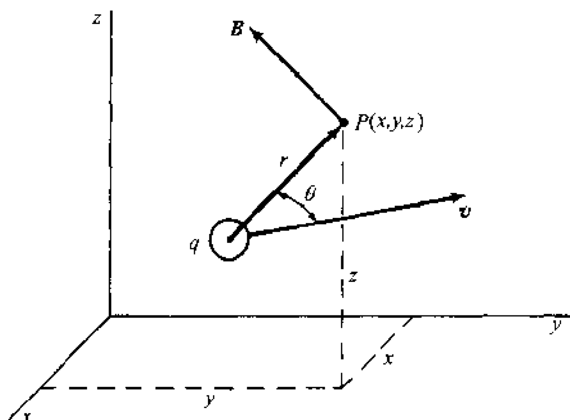


图 28-33

表示为 $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 q}{4\pi r^3}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})$ (T).常数 μ_0 称为真空磁导率,在国际单位制中 μ_0 并不是实验值,而是定义的值:$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$H/m.其中亨利(H)是电感的单位且 1 H/m=1T·m/A.磁场大小为

$$B=\frac{qv\sin\theta}{r^2}\times10^{-7}\mathrm{T}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角(见图 28-33).B 在垂直于 q 瞬时运动方向的转动圆周上是常数,而沿运动方向 B 等于零.

28.88 由运动电荷的磁场表达式写出电流元的磁场表达式.

解 ☞ 研究图 28-34 所示的一根无限长通过电流为 I 的导线的长度元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$.设 $\mathrm{d}q$ 代表一定时间内通过 $\mathrm{d}l$ 的电荷.$\mathrm{d}t$ 是这么多电荷移出 $\mathrm{d}l$ 所需的时间,于是 $I=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$,电荷的速度为 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}t$.由 $I\mathrm{d}t=\mathrm{d}q$ 得 $\mathrm{d}q\boldsymbol{v}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$.由题 28.87 得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\mathrm{d}q}{4\pi r^3}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r})$$

给出在外部一点 P 产生的磁场,其中 $\boldsymbol{r}$ 是电流元上 b 点到 P 点的距离.最后的表达式称为毕奥-萨伐尔定律.

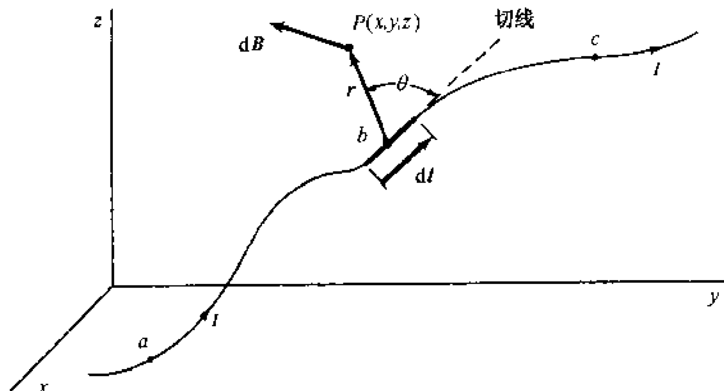


图 28-34

28.89 不用微分而直接用大小和方向来表示题 28.88 中的毕奥-萨伐尔定律.

解 ☞ 图 28-35 中长为 Δl 的电流元在 P 点产生的磁场为 $\Delta\boldsymbol{B}$.$\Delta\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$\Delta B=\frac{\mu_0 I\Delta l}{4\pi r^2}\sin\theta$$

r、θ 如图所示.$\Delta\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 ΔL 和 r 所在的平面(即纸面).在该题中,由右手定则知 $\Delta\boldsymbol{B}$ 指向纸外.当 r 与 Δl 方向一致时,$\theta=0$,$\Delta B=0$,这说明通电直导线在导线上某点产生的磁场为零.

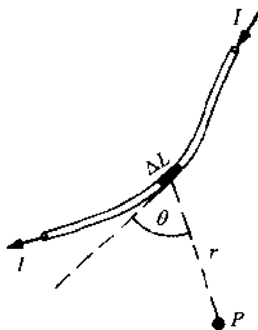


图 28-35

28.90 根据图表求 P 点磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向.(a)P 点位于长直导线外部,(b)P 点位于半径为 a 的 N 匝线圈中间,(c)P 点位于每米有 n 匝的长螺线管内;(d)P 点在有 N 匝线圈的螺绕环内.

解 ☞ 见图 28-36.

28.91 求一通有 3 A 电流的导线在距其 50 mm 的某点产生的磁场.

解 ☞ 设导线很长,$B=(\mu_0 I)/2\pi r$,所以

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m})(3\mathrm{A})}{(2\pi)(0.05\ \mathrm{m})}=1.20\times10^{-5}\mathrm{T}=0.12\ \mathrm{G}$$

28.92 有一 250 匝半径为 40 mm 的线圈通过的电流为 20 mA.求该线圈中心处的磁场.

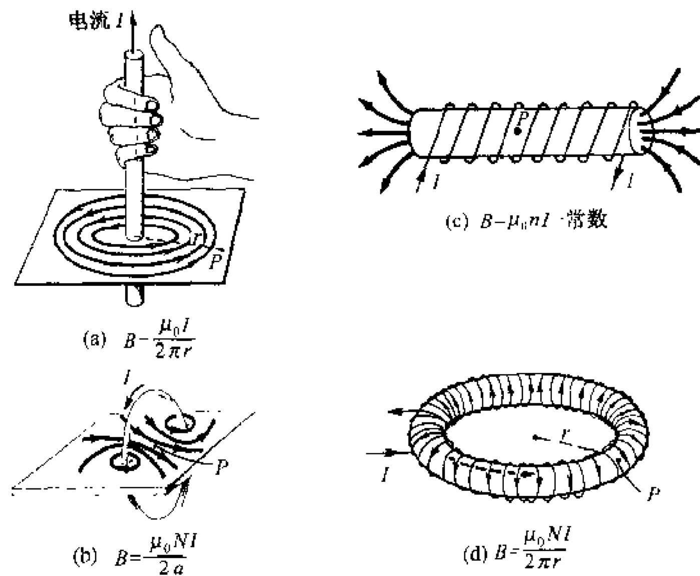


图 28-36

解 ☞ $B=\frac{\mu_0 NI}{2a}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\text{H/m})(250)(20\times10^{-3}\text{A})}{2(0.040\text{ m})}$

$=0.785\times10^{-4}\text{T}=0.785\text{ G}$

28.93 求如图 28-37(a)所示的两根通电导线在 C 点产生的总磁场.(提示:画出俯视图决定各个场强矢量的方向.)

解 ☞ 由导线 1、2 分别产生的磁场的大小为

$$B_1=(2\times10^{-7}\text{ H/m})\frac{5\text{A}}{0.08\text{ m}}=12.5\ \mu\text{T}$$

$$B_2=(2\times10^{-7}\text{ H/m})\frac{10\text{A}}{0.2\text{ m}}=10.0\ \mu\text{T}$$

在图 28-37(b)中,分别以 $r_1=2$ 个单位和 $r_2=5$ 个单位作圆,$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$ 在 C 点与各自的圆周相切.通过量角器和直尺以及矢量叠加原理得到 $B=9.0\ \mu\text{T}$.

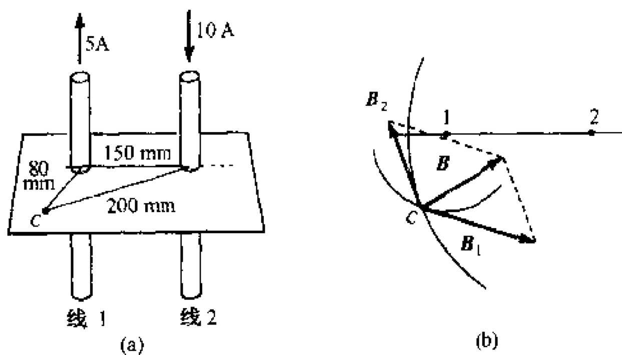


图 28-37

28.94 图 28-38 中有两根平行且相距 180 mm 的长导线.导线 1 中通过电流 8A,导线 2 中通过电流 12A.(a)求在两导线连线上且距线 1 30 mm 距线 2 150 mm 的 A 点的磁场.(b)两导线连线上哪一点的磁场为零?

解 ☞ (a) $B_1=(2\times10^{-7}\text{H/m})\frac{8\text{A}}{0.03\text{ m}}=53.3\mu\text{T}$

$B_2=(2\times10^{-7}\text{H/m})\frac{12\text{A}}{0.150\text{ m}}=16.0\ \mu\text{T}$

$\boldsymbol{B}_1$,$\boldsymbol{B}_2$ 在 A 点的磁场方向相反,所以总磁场的大小为 $B=B_1-B_2=37.3\ \mu\text{T}$.

(b) 要使两导线间一点的磁场为零应满足

$$\frac{I_1}{r_1}=\frac{I_2}{r_2}\quad 即\quad \frac{r_2}{r_1}=\frac{I_2}{r_1}=\frac{12A}{8A}=1.5$$

因为 $r_1+r_2=180\ \text{mm}$,所以 $r_1=72\ \text{mm}$.

图 28-38

28.95 一半径为 200 mm 的线圈通过电流为 0.25 A 时在其中心位置产生的磁场为 0.4 G. 则该线圈有多少匝?

解 ☞ 由 $B=(\mu_0 NI)/(2a)$ 得

$$N=\frac{2aB}{\mu_0 I}=\frac{2(0.200\ \text{m})(0.4\times10^{-4}\text{T})}{(4\pi\times10^{-7}\ \text{H/m})(0.25\text{A})}=51$$

28.96 图 28-39 给出两个半径分别为 2 cm 和 7 cm 的同心线圈. 每个线圈有 100 匝,大线圈中电流为 5 A,则小线圈中电流为多大时才能使中心处的磁场为:(a) 9.0 mT,(b) 2.0 mT,(c)零. 在各种情况下决定小线圈的电流方向与大线圈中电流方向相同还是相反.

解 ☞ $B_1=\dfrac{\mu_0 NI_1}{2a_1}=\dfrac{(4\pi\times10^{-7}\ \text{H/m})(100)(5\text{A})}{2(0.07\ \text{m})}=4.49\ \text{mT}$

$B_2=\dfrac{\mu_0 NI_2}{2a_2}=\dfrac{(4\pi\times10^{-7}\ \text{H/m})(100)I_2}{2(0.02\ \text{m})}=(3.14\ \text{mT/A})I_2$

(a)因为 $B>B_1$,$B_2=B-B_1=4.51\ \text{mT}$　$I_2=(4.51\ \text{mT})/(3.14\ \text{mT/A})=1.44\text{A}$ 与 I_1 的方向相同. (b)因为 $B<B_1$,$B_2=B_1-B=2.49\ \text{mT}$,$I_2=(2.49\ \text{mT})/(3.14\ \text{mT/A})=0.793\ \text{A}$ 与 I_1 的方向相反. (c) $B_2=4.49\ \text{mT}$,$I_2=(4.49\ \text{mT})/(3.14\ \text{mT/A})=1.43\ \text{A}$ 与 I_1 的方向相反.

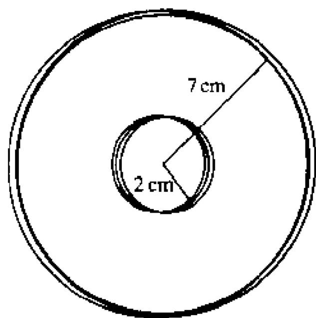


图 28-39

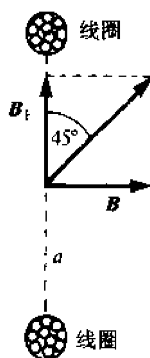


图 28-40

28.97 把由十根导线组成的半径为 120 mm 的线圈平行地磁场放置. 导线中的电流为 0.45 A 时,线圈中心处的指南针与线圈的平面成 45°. 求地磁场的磁感应强度.

解 ☞ 首先求出电流在线圈中心处产生的磁场 $\boldsymbol{B}$

$$B=\frac{2\pi NI}{10^7 a}=\frac{2\pi(10)(0.45)}{10^7(0.12)}=24\ (\mu\text{T})$$

由磁场的矢量图(图 28-40),因为指南针 N 极指向合磁场的方向,$\boldsymbol{B}_E+\boldsymbol{B}$,所以 $B_E=B=24\ \mu\text{T}$.

28.98 在纸面上放一个小指南针,把一根导线平行放置在指南针的上方. 如果导线中加上向北的电流,则磁针的 S 极指向哪个方向?

解 ☞ 由右手定则知,电流的磁场方向指向西,而小磁针的 S 极与磁场方向相反,所以指向东.

28.99 一 2000 匝的螺线管长 0.5 m,螺线圈内部磁场为 0.08 T. 求螺线管上的电流.

解 ☞ 对于长螺线管来说,$B=\mu_0 nI$,即

$$I=\frac{B}{\mu_0 n}=\frac{0.08\ \text{T}}{(4\pi\times10^{-7}\text{H/m})(4000\ \text{m}^{-1})}=16\ \text{A}$$

28.100 一 30 匝的圆形电路半径为 50 mm，通过电流为 0.5 A. 求线圈中间位置的磁场.

解 ☞ $$B=\frac{2\pi IN}{10^7 a}=\frac{2\pi(0.5)(0.3)}{10^7(0.050)}=190\ (\mu\text{T}).$$

28.101 一平面圆形线圈有 40 匝且直径为 320 mm. 当导线中通过多大电流的时候在线圈中间产生的磁感应强度为 300 $\mu\text{Wb/m}^2$?

解 ☞ $$B=\frac{\mu_0 NI}{2r},\text{即 } 3\times10^{-4}\text{T}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\text{T·m/A})(40)I}{0.320\ \text{m}}$$

所以 $I=1.9\ A$.

28.102 五根长直导线捆在一起形成一个小电缆. 导线上的电流分别为 $I_1=20$ A, $I_2=-6$A, $I_3=12$ A, $I_4=-7$A, $I_5=18$A(负电流的方向与正电流的方向相反). 求距电缆 10 cm 处的磁场强度 B.

解 ☞ 由叠加原理知这一磁场为各个电流所产生的磁场之和. 由于电流的方向平行或者是反平行，所以在 $r=10$ cm 处磁场的方向也是平行或者反平行. 所以

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi r}(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5)$$
$$=(2\times10^{-7}\ \text{H/m})(37\text{A})/(0.10\text{m})=74\mu\text{T}$$

28.103 一水平导线沿南北方向放置. 有一小磁针放置在导线上方，当导线中通过电流时，小磁针的 N 极指向西. 则导线中电子沿哪个方向运动?

解 ☞ 小磁针 N 极指向西表示导线上方的磁场指向西. 由右手定则，要产生该方向的磁场，导线中的电流必须从北指向南. 因为电子(带负电)的运动方向与电流方向相反，所以电子向北运动.

28.104 一长直绝缘线的带电密度为 40 μC/m，沿着其长度方向以 300 m/s 的速度运动. 求距运动细线 5 mm 处的磁场.

解 ☞ 运动带电细线等效于电流 $I=(40\times10^{-6}\ \text{C/m})(300\text{m/s})=1.2\times10^{-2}$A.

于是 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{(2\times10^{-7})(1.2\times10^{-2})}{0.005}=4.8\times10^{-7}(\text{T})$$

28.105 两根固定的长平行导线 A, B 在空中相距 10 cm，且沿相反的方向分别通过电流 40 A 和 20 A. 求总的磁感应强度(a)在两导线之间且与这两根导线平行的线上，(b)在距离 A 8 cm而距 B18 cm 的直线上.

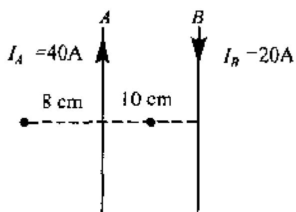


图 28-41

解 ☞ (a)在两导线之间(图 28-41)，磁场都指向纸内，所以

$$B=B_A+B_B=\frac{(2\times10^{-7})(40+20)}{0.05}$$
$$=2.4\times10^{-4}(\text{T})$$

(b) B_A 指向纸外而 B_B 指向纸内，所以

$$B=(2\times10^{-7})\left(\frac{40}{0.08}-\frac{20}{0.18}\right)=7.8\times10^{-5}(\text{T})$$

指向纸外.

28.106 一真空螺线管有 2000 匝，长 600 mm. 直径为 20 mm. 若通过的电流为 5 A，求螺线管内的磁感应强度.

解 ☞ $$B=\mu_0 nI=(4\pi\times10^{-7}\ \text{H/m})\left(\frac{2000}{0.6\text{m}}\right)(5\text{A})=0.021\ \text{T}$$

这样长螺线管(长度与直径比为 30:1)内部磁场为 21 mT.

28.107 在氢原子的玻尔模型中电子绕核做圆周运动半径为 $a\approx5.3\times10^{-11}$ m. 每秒转动的圈数为 $f\approx6.6\times10^{15}$r. 求原子核处的磁场.

解 ☞ 绕动的电子形成一强度为 I 的环形电流，其中

$$I=ef=(1.6\times10^{-19})(6.6\times10^{15})=1.06\times10^{-3}(\text{A})$$

$$B_0 = \frac{(4\pi\times10^{-7})(1.06\times10^{-3})}{2(5.3\times10^{-11})} \approx 13(\text{T})$$

28.108 一长直导线通过 20 A 的电流且位于一长螺线管的轴上.螺线管内部的磁场为4 mT.求距轴 3 mm 处的合磁场.

解 ☞ 如图 28-42 所示,螺线管的磁场 $\boldsymbol{B}_s$ 与导线平行.长直导线产生的磁场 $\boldsymbol{B}_w$ 环绕导线且与 $\boldsymbol{B}_s$ 垂直. $B_s = 4$ mT, $B_w = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi\times10^{-7}\text{T·m/A})20\text{A}}{2\pi(3\times10^{-3}\text{m})} = 1.33$ mT 因为 $\boldsymbol{B}_s$ 与 $\boldsymbol{B}_w$ 垂直,它们的合磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B = \sqrt{4^2+1.33^2} = 4.2\ (\text{mT})$$

与轴所成的角为 $\arctan(1.33/4) = 18.4°$

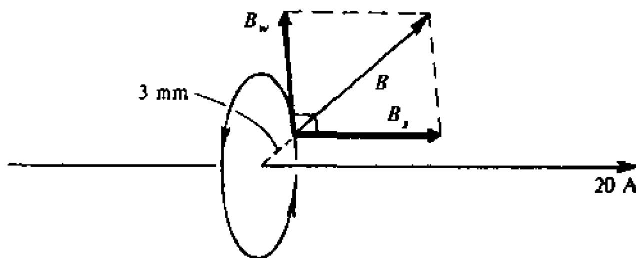


图 28-42

28.109 两根长直导线分别沿 x 轴和 y 轴,且通过的电流为 5 A.求点(40, 20, 0) cm 处的磁场的大小和方向.

解 ☞ 设 x、y、z 轴形成右手系, $\boldsymbol{B} = (\mu_0 I/2\pi)(\boldsymbol{k}/0.20 - \boldsymbol{k}/0.40) = 2.5\boldsymbol{k}(\mu\text{T})$.

28.110 两根长直导线平行放在 xy 面内且与 y 轴平行.其中一根导线与 y 轴重合,另一导线过一点 $x = 20$ cm, $y = z = 0$.两导线均有沿 $+y$ 方向的电流 5 A.求 $\boldsymbol{B}$ (a) (30, 0, 0) cm 处,(b) (5, 0, 0) cm 处.

解 ☞ (a) $\boldsymbol{B} = [(\mu_0 I)/2\pi][(-\boldsymbol{k}/0.3)+(-\boldsymbol{k}/0.1)] = -13.3\boldsymbol{k}(\mu\text{T})$. (b) $\boldsymbol{B} = [(\mu_0 I)/(2\pi)][(-\boldsymbol{k}/0.05)+(+\boldsymbol{k}/0.15)] = -13.3\boldsymbol{k}(\mu\text{T})$.

28.111 对 28.110 题中的两根导线,求在点(10, 0, 5) cm 处的磁场 $\boldsymbol{B}$.

解 ☞ 在图 28-43 中 y 轴指向纸内.每根导线产生的磁场 B 为$[(\mu_0 I)/2\pi]/(0.11) = 8.9\ \mu$T.磁场在竖直方向上抵消,在水平方向上相加.所以 $B_x = B = 2\ (8.9)\sin\theta = 8.0\ (\mu\text{T})$.

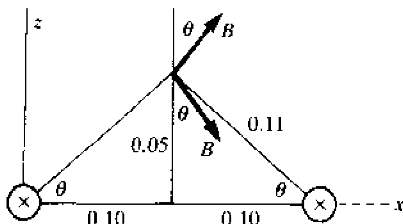


图 28-43

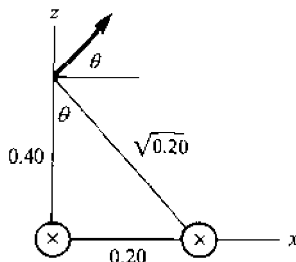


图 28-44

28.112 对 28.110 题中的两根导线,求在点(0, 0, 40) cm 处 $\boldsymbol{B}$ 的分量.

解 ☞ 见图 28-44.通过原点的导线产生的 B 为$[(\mu_0 I)/(2\pi)]/(0.4) = 2.5\ \mu$T,沿 x 方向.另一导线产生的 B 为$[(\mu_0 I)/(2\pi)]/\sqrt{0.20} = 2.24\ \mu$T,与 x 轴成 θ 角.于是 $B_x = 2.5 + 2.24\cos\theta = 4.5\ \mu$T.

$B_z = 2.24\sin\theta = 1.0\ \mu$T. $\boldsymbol{B} = (4.5\boldsymbol{i} + 1.0\boldsymbol{k})\mu$T

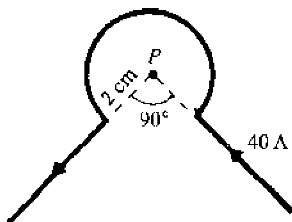


图 28-45

28.113　图 28-45 中的导线中通过的电流为 40 A. 求 P 点的磁场强度.

解　☞ 因为 P 点在两直导线上, 两导线在 P 点不产生磁场. 半径为 r 的环形线圈在中心产生的磁场为 $B=\mu_0 I/2r$. 这里仅有圆周长的 3/4, 所以

P 点的 $B=\frac{3\mu_0 I}{4\ 2r}=\frac{3(4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m})(40\mathrm{A})}{4(2)(0.02\mathrm{m})}=0.94$ mT

该场方向指向纸外.

28.114　在图 28-33 中, 令 $q=35\ \mu\mathrm{C}$, $r=50$ mm, $v=2\times10^6$ m/s, $\theta=60°$. 求 P 点的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小.

解　☞ $B=\frac{qv\sin\theta}{r^2}\times10^{-7}$, 所以 $B=\frac{(35\times10^{-6})(2\times10^6)(\sin60°)}{10^7(50\times10^{-3})^2}=2425(\mu\mathrm{T})$

28.115　在图 28-33 中, 设 q 到 $p(x,y,z)$ 的位置矢量 $\boldsymbol{r}=50\boldsymbol{i}+80\boldsymbol{j}+70\boldsymbol{k}$ (mm). $q=400$ μC, $\boldsymbol{v}=(3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})\times10^6$ m/s. 求 p 点处的 B_x、B_y、B_z 及角 θ.

解　☞ $\boldsymbol{r}$ 的大小为 $r=(50^2+80^2+70^2)^{1/2}(10^{-3})=0.1175(\mathrm{m})$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{10^{-7}(400\times10^{-6})}{0.1175^3}(10^6)(10^{-3})(3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})\times(50\boldsymbol{i}+80\boldsymbol{j}+70\boldsymbol{k})$$

$$=(-2.183\boldsymbol{i}+0.592\boldsymbol{j}+1.332\boldsymbol{k})(10^{-2})(\mathrm{T})$$

所以 $B_x=-28130\ \mu T$,　$B_y=5920\ \mu\mathrm{T}$,　$B_z=13320\ \mu\mathrm{T}$

$\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=[28130^2+5920^2+13320^2]^{1/2}=31682(\mu T)$$

$\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$v=(3^2+6^2+9^2)^{1/2}(10^6)=11.225\times10^6(\mathrm{m/s})$$

所以

$$\sin\theta=\frac{10^7r^2B}{qv}=\frac{10^7(0.1175^2)(31682\times10^{-6})}{(400\times10^{-6})(11.225\times10^6)}=0.974,\quad\theta=76.8°$$

28.116　一根均匀导线制成一等边三角形. 电流从其中一角流入从另一角流出, 如图28-46所示. 证明通电的三角形三边在中心 O(中线的交点)处产生的磁场为零.

证　☞ 导线 A、B 串联后再与 C 并联. 因为每段电阻相同, 电流 $i_C=(2i)/3$, 而 $i_A=i_B=i/3$. O 点距 A、B、C 等距. 所以导线 A、B 在 O 点产生的磁场相等. 由右手定则, 这两个磁场指向纸内. 而 C 在 O 点产生的磁场大小等于 A 或 B 的两倍, 由右手定则知导线 C 产生的磁场指向纸外, 与另两根导线产生的磁场抵消.

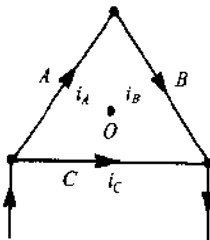


图 28-46

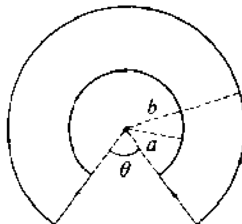


图 28-47

28.117　由图 28-47, 求中心处的磁场 B.

解　☞ 直线段在中心处不产生磁场; 圆周部分产生的磁场由毕奥-萨伐尔定律

$$\Delta B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{a(2\pi-\theta)}{a^2}-\frac{b(2\pi-\theta)}{b^2}\right]=\frac{\mu_0 I(b-a)(2\pi-\theta)}{4\pi ab}$$

28.118　一半径为 R 的唱片均匀分布电荷 Q,以恒定的角速度 ω 转动.证明盘中心的磁场为 $B=(\mu_0\omega Q)/(2\pi R)$.

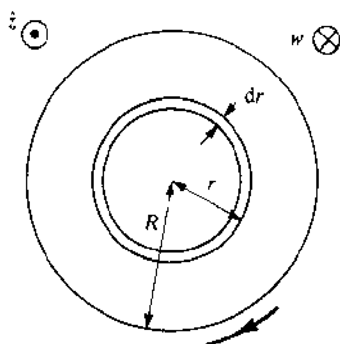


图 28-48

证　☞ 在图 28-48 中,可以看到唱片沿顺时针方向(俯视)转动.在 r 与 $r+\mathrm{d}r$ 间的圆环带电量为 $\mathrm{d}q$,形成电流为 $\mathrm{d}i=(\mathrm{d}q)/T$,其中 $T=(2\pi)/\omega$ 为圆盘的转动周期.因圆盘均匀带电,有

$$\frac{\mathrm{d}q}{Q}=\frac{2\pi r\mathrm{d}r}{\pi R^2},\quad \mathrm{d}q=\frac{2Qr\mathrm{d}r}{R^2}$$

利用 28.90 题(b)的结论,圆环在中心产生的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}i}{2r}=\frac{\mu_0}{2}\frac{\omega}{2\pi}\frac{2Qr\mathrm{d}r}{rR^2}=\frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R^2}\mathrm{d}r$$

则中心处总磁场为

$$B=\frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R^2}\int_0^R\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R}$$

当 $Q>0$,磁场沿 $-\hat{z}$ 方向.

28.5　复杂磁场;安培定律

28.119　计算环形电流线圈在其轴上某一点处的磁场.

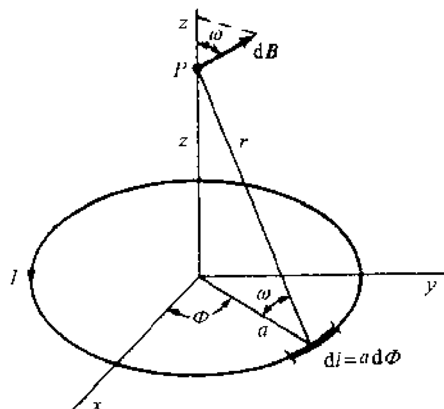


图 28-49

解　☞ 选取如图 28-49 所示的坐标系,由对称性知 P 点的磁场沿 Z 方向,所以

$$\mathrm{d}B_z=(\mathrm{d}B)\cos\omega=\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\mathrm{d}lr\sin 90^\circ\right)\cos\omega$$

$$=\frac{\mu_0 Ia^2}{4\pi r^3}\mathrm{d}\Phi=\frac{\mu_0 Ia^2}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\Phi\quad(1)$$

沿电路对所有磁场求和,实际上就是对 $\mathrm{d}\Phi$ 求和有

$$B_z=B=\frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\quad(2)$$

在线圈的中心($z=0$)　$B_0=(\mu_0 I)/(2a)$.

28.120　图 28-50(a)所示的两圆形线圈匝数相同,且通以相同的电流.它们的直径不同但对 P 所张的角相等.(a)哪个线圈在 P 点产生的磁场大?(b)若小线圈在 P 点与大线圈的中间,求大线圈与小线圈在 P 点产生的磁场的比.

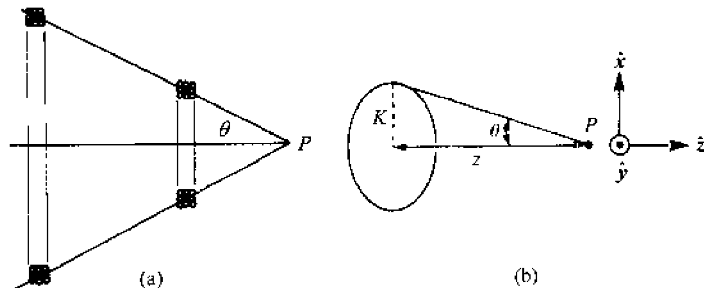


图 28-50

解 ☞ (a)由图 28-50(b)并利用题 28.19 的等式(2)，得到图中线圈在 P 点产生的磁场为 $\boldsymbol{B}=\frac{N\mu_0 i}{2}\frac{k^2}{(z^2+k^2)^{3/2}}\hat{z}$ 因为 $k/(z^2+k^2)^{1/2}=\sin\theta$，所以 $\boldsymbol{B}=\hat{z}\frac{N\mu_0 i}{2k}\sin^3\theta$. 这表明半径小的线圈产生的磁场大.

(b) 如果 $k_2=2k_1$，我们就有 $\frac{B_1}{B_2}=\frac{k_2}{k_1}=2$.

28.121[c] 一半径为 R 的球壳带有电荷密度为 σ 的均匀表面电荷. 球壳绕其轴以频率 f 转动. (a)把球面分成共轴的圆环，证明每个宽 $Rd\theta$ 的圆环所带的电流为 $2\pi\sigma fR^2\sin\theta d\theta$，(b)证明转动电荷在球心产生的磁场为 $B=(4\pi\mu_0\sigma fR)/3$.

证 ☞ (a)球面上极角为 θ 的圆环的面积为 $dA=2\pi R^2\sin\theta d\theta$，所带的总电荷为 σdA. 环上的电流为 $dI=(\sigma dA)/T=(\sigma dA)f=2\pi R^2 f\sigma\sin\theta d\theta$. (b)为求球心处的磁场 B，我们运用28.119题中的算式(2)及 $a=R\sin\theta$，$(a^2+z^2)^{1/2}=R$. 极角为 θ 的圆环产生的磁场为 $dB=[\mu_0 dI(R\sin\theta)^2]/2R^3=\pi\mu_0\sigma f\sin^3\theta d\theta$. 对 $\sin^3\theta d\theta$ 从 0 到 π 积分得 $\frac{4}{3}$，所以 $B=(4\pi\mu_0\sigma fR)/3$.

28.122[c] (a)图 28-51 中，AB 是通有电流 i 的有限长导线. 求 P 点的磁场，(b)导出无限长直导线在 P 点产生的磁场.

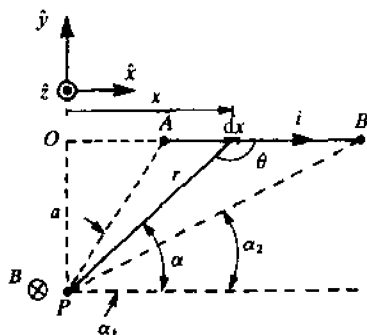


图 28-51

解 ☞ (a)毕奥-萨伐尔定律给出 x 处的导线元 dx 在 P 点产生的磁场 $d\boldsymbol{B}$ 为

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 i dx}{4\pi r^3}\hat{x}\times(-\hat{x}x-\hat{y}a)$$

$$=-\frac{\hat{z}\mu_0 ia dx}{4\pi r^3}\tag{1}$$

由图得 $\tan\theta=-a/x$，所以 $x=-a\cot\theta$ 以及 $dx=(a\csc^2\theta)d\theta$. 而且 $r=a/\sin\theta=a\csc\theta$. 所以(1)式可以写为

$$d\boldsymbol{B}=-\frac{\hat{z}\mu_0 i}{4\pi}\frac{(a^2\csc^2\theta)d\theta}{a^3\csc^3\theta}$$

$$=-\frac{\hat{z}\mu_0 i}{4\pi a}\sin\theta d\theta\tag{2}$$

合磁场为对导线段从 A 点($\theta=\pi-\alpha_1$)到 B 点($\theta=\pi-\alpha_2$)积分：

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\hat{z}\mu_0 i}{4\pi a}\int_{\pi-\alpha_1}^{\pi-\alpha_2}\sin\theta d\theta=-\frac{\hat{z}\mu_0 i}{4\pi a}[-\cos\theta]\Big|_{\pi-\alpha_1}^{\pi-\alpha_2}$$

$$=-\frac{\hat{z}\mu_0 i}{4\pi a}[-\cos(\pi-\alpha_2)+\cos(\pi-\alpha_1)]=-\frac{\hat{z}\mu_0 i}{4\pi a}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\tag{3}$$

等式(3)是所求结果. (b)对于无限长直导线，$\alpha_1=\pi$ 及 $\alpha_2=0$，所以 $\cos\alpha_1=-1$ 及 $\cos\alpha_2=1$. $\boldsymbol{B}=-\hat{z}[(\mu_0 i)/(2\pi a)]$，即为所求结果.

28.123 利用 28.122 题的结果证明边长为 l 的正方形线框[如图 28-52(a)所示]，当通过电流 i 时在中心处产生的磁场为 $[(\mu_0 i)/(\pi L)]2\sqrt{2}$.

证 ☞ 图 28-52(b)画出一边长为 l 的正方形线框，与图 28-51 类似标出角度. 由 28.122 题的结果，上边在 C 点产生的磁场大小为

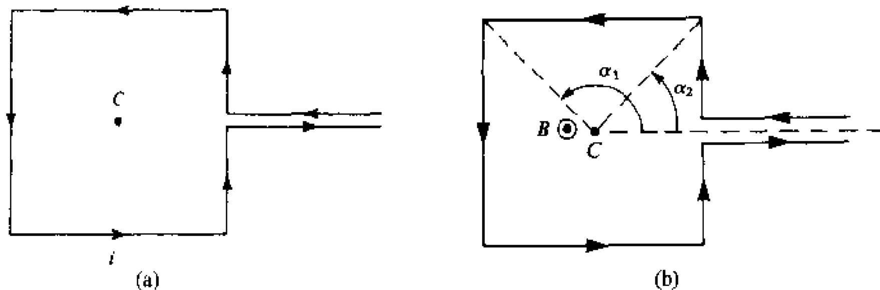


图 28-52

$$B_1=\frac{\mu_0 i}{4\pi a}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1) \tag{1}$$

因 $a=l/2, \alpha_1=135°, \alpha_2=45°$,由等式(1)得

$$B_1=\frac{\mu_0 i}{4\pi(l/2)}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{\mu_0 i\sqrt{2}}{2\pi l} \tag{2}$$

运用右手定则并考虑对称性,我们得到总磁场 $\boldsymbol{B}_4$ 指向纸外且大小

$$B_4=4B_1=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi l} \tag{3}$$

28.124 一根长 L 且通以电流为 i 的导线被做成圆形或方形线圈,每种线圈只有一匝,哪种情况下在线圈中心处的磁场大?求 B_g(大磁场)与 B_s(小磁场)的比值.

解 ☞ 周长为 L 的正方形边长 $l=L/4$,由 28.123 题的等式(3)得

$$B_4=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi(L/4)}=\frac{8\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi L}=\frac{3.60\mu_0 i}{L}$$

周长为 L 的圆周半径为 $r=L/(2\pi)$.于是

$$B_c=\frac{\mu_0 i}{2r}=\frac{\mu_0 i}{2[L/(2\pi)]}=\frac{\pi\mu_0 i}{L}=\frac{3.14\mu_0 i}{L}$$

所以正方形中心处的磁场比圆周中心的磁场大(周长相等).比值为

$$\frac{B_g}{B_s}=\frac{B_4}{B_c}=\frac{8\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi L}\frac{L}{\pi\mu_0 i}=\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}=1.15$$

28.125[c] 证明有限长度的螺线管在其轴上的一点 P 产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 大小为$(\mu_0/2)ni(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)$.角度如图 28-53(a)所示,$n$ 为单位长度的匝数.

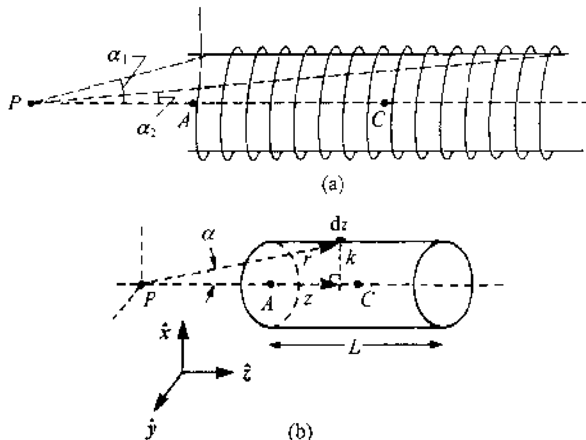


图 28-53

证 ☞ 设螺线管的半径为 k,z 轴和 α 如图 28-53(b)所示.由 28.119 题以及叠加定理,求出通过电流为 i 的 dN 匝圆线圈在轴上产生的磁场

$$dB=\frac{\mu_0 ik^2}{2}\frac{dN}{(z^2+k^2)^{3/2}} \tag{1}$$

对于螺线管,$dN=n\,dz$,n 为单位长度线圈的匝数.由图 28-53(b)可见,$z=k/\tan\alpha$,所以

$$dz=\frac{k\,d\alpha}{\sin^2\alpha},\quad (z^2+k^2)^{3/2}=k^3(\cot^2\alpha+1)^{3/2}=k^3\csc^3\alpha$$

因为所有线圈在 P 点产生的磁场均沿着轴线的方向,对等式(1)积分有

$$B=\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mu_0 ik^2}{2}\frac{n\,dz}{(z^2+k^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 nik}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{-k\,d\alpha}{\sin^2\alpha(k^3\csc^3\alpha)}$$

$$=\frac{\mu_0 ni}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(-\sin\alpha)d\alpha=\frac{\mu_0 ni}{2}\left(\cos\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}\right)=\frac{\mu_0 ni}{2}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1) \tag{2}$$

28.126 根据 28.125 题,螺线管一端外轴线上一点 A 的磁场 B 是多大?

解 ☞ 设 L 为螺线管的长度. 让 P 与 A 点重合, 则 $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\arctan(k/L)=\arccos(L/\sqrt{L^2+k^2})$. 所以 A 点的磁场

$$B_A=\frac{\mu_0 ni}{2}\left(\frac{L}{\sqrt{L^2+k^2}}-0\right)=\frac{\mu_0 niL}{2\sqrt{L^2+k^2}}$$

28.127　在 28.125 题中求中心轴上 C 点处的磁场 B(见图 28-53).

解 ☞ 让 P 点与 C 重合, 有

$$\cos\alpha_1=\frac{-L/2}{\sqrt{(L/2)^2+k^2}},\quad \cos\alpha_2=\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+k^2}}$$

所以 C 点的磁场为

$$B_C=\frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2+k^2}}-\frac{-L/2}{\sqrt{(L/2)^2+k^2}}\right]=\frac{\mu_0 niL}{2\sqrt{(L/2)^2+k^2}}=\frac{\mu_0 niL}{\sqrt{L^2+4k^2}}$$

28.128　证明对一长螺线管中的磁场, 由 28.125 题求出的结果与常见的公式一致.

证 ☞ 设 $L\to\infty$, 对于螺线管中的一点, α_1、α_2 分别近似于 π 和 0. 由等式(2)得

$$B\to\frac{\mu_0 ni}{2}[\cos 0-\cos(\pi)]=\mu_0 ni$$

28.129[c]　亥姆霍兹线圈(图 28-54)有时用来获得不能采用螺线圈时的近似均匀磁场. 证明在两线圈中央的轴线上该结论成立且展开式中与 x 相关的前三项可省略.

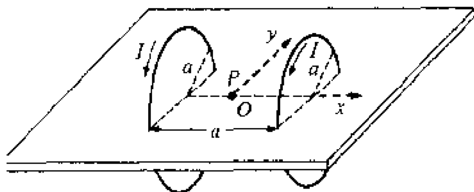


图 28-54

证 ☞ 由 28.119 题, 沿 x 轴的磁场为

$$B(x)=\frac{\mu_0 Ia^2}{2}\left\{\left[a^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2\right]^{3/2}+\left[a^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2\right]^{3/2}\right\}$$

这是关于 x 的偶函数, $B'(0)=B'''(0)=0$. 而且,

$$B''(x)=6\mu_0 Ia^2x\left\{\left[a^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2\right]^{-7/2}(a+x)-\left[a^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2\right]^{-7/2}(a-x)\right\}$$

这说明 $B''(0)=0$. 在 O 点附近, $B(x)\approx B_0+B_4x^4$ 是一个近似不变的函数.

28.130　一个由导线绕成的多层线圈, 截面图如图 28-55 所示. 导线间空隙很小. 如果线圈上消耗的电功率一定, 求磁场强度与导线直径 d 的关系.

解 ☞ 因为几何形状确定, 磁场与 Ni 成正比, 其中 N 是导线的匝数, i 是通过的电流. 每层的匝数与 $1/d$ 成正比, 而层数也与 $1/d$ 成正比. 所以 $N\propto 1/d^2$.

该题中, i^2R 是恒定的, 其中 R 是电阻. 所以 i 与 $R^{-1/2}$ 成正比. 而对任一导电材料 R 与 l/d^2 成正比. 因为 $l\propto N\propto 1/d^2$, $l/d^2\propto 1/d^4$, 所以 $i\propto R^{-1/2}\propto d^2$. 所以 $B\propto Ni\propto(1/d^2)(d^2)\propto d^0$. 也就是说, 功率一定时, B 与 d 无关.



图 28-55

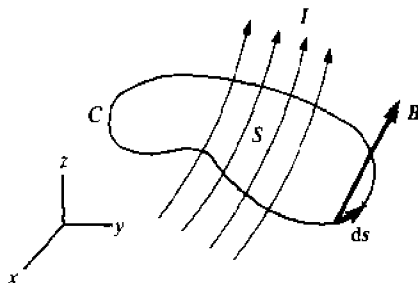


图 28-56

28.131[c] 阐述安培环路定理.它与毕奥-萨伐尔定律有何关系？

解 ☞ 图28-56表示一闭合环路 C 及其围成的非闭合表面 S.穿过面 S 的电流为 I，I 可以是集中也可以是分散的，对于后者，$I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度矢量.该电流产生的磁场遵守安培定律即 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\mu_0 I$，积分路径沿闭合曲线 C.

因为安培环路定理和毕奥-萨伐尔定律都建立了电流与磁场的联系，所以它们是等价的(这可以通过矢量运算写出数学形式来证明).

28.132[c] 一根沿 Z 方向的直导线，如图28-57所示，通过的电流为 I.分别用(a)毕奥-萨伐尔定律，(b)安培环路定理求 ab 段导线(长度为 l_1+l_2)在 P 点产生的磁场.

解 ☞ (a)可得出任一电流元 Idl 在 P 点产生的磁场 $d\boldsymbol{B}$ 沿 $-\boldsymbol{i}$ 方向.所以

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}dz(-\boldsymbol{i})$$

但
$$r^2=R^2+z^2,\ \sin\theta=\cos(\theta-90^\circ)=\frac{R}{r}$$

所以
$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}dz(-\boldsymbol{i})$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}(-\boldsymbol{i})\int_{-l_2}^{l_1}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\frac{l_1}{(R^2+l_1^2)^{1/2}}+\frac{l_2}{(R^2+l_2^2)^{1/2}}\right](-\boldsymbol{i})$$

由圆柱体的对称性知圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上点的磁场 $\boldsymbol{B}$ 大小恒定且沿圆周的切线方向.(b)对圆周 $x^2+y^2=R^2$ 运用安培环路定理，考虑(a)中的对称性，有

$$B(2\pi R)=\mu_0 I,\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

在 P 点
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(-\boldsymbol{i})$$

(确定该答案前先参考28.133题.)

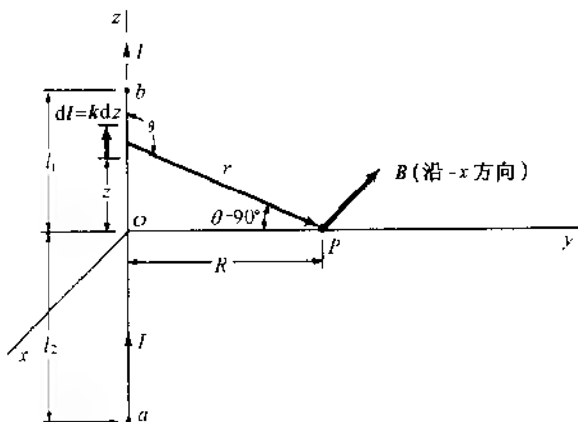


图 28-57

28.133 解释28.132题(a)、(b)的矛盾之处.

解 ☞ 电流不可能真的从a点出发到b点终止；必须有一个从b到a的回路.如果在(a)中对整个闭合电路积分，就会得到一个不同的结果 $\boldsymbol{B}$.当然，对称性不再成立，(b)中得到的结果也将不同.而两个新的结果是一样的.假设电路在无穷远处闭合.令(a)中 $l_1\to\infty$ 以及 $l_2\to\infty$ 且 R 一定(使无穷远处磁场可被忽略)

$$\frac{l_1}{(R^2+l_1^2)^{1/2}}\to 1,\quad \frac{l_2}{(R^2+l_2^2)^{1/2}}\to 1 \text{ 所以 } \boldsymbol{B}\to\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(-\boldsymbol{i})$$

该结果与(b)中的结论一致，所以对于无限长的直导线，该结果是正确的.

28.134　图 28-58 表示一半径 $R=30\text{mm}$ 的长金属杆的截面. 该杆中通以指向纸外的电流 $I=5\text{kA}$. 求 P 点($r=20\text{mm}$)的磁场以及杆表面的磁场, 设金属的磁导率近似为 μ_0.

解　☞ 设电流均匀分布在截面上, 磁场线为与杆表面同心的圆周. 给定圆周内的电流为

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2}I=\frac{r^2}{R^2}I$$

由对称性以及安培环路定理得

$$B(2\pi r)=\mu_0\frac{r^2}{R^2}I,\quad B=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right)r$$

代入数值, $B_p=22.2\ \text{mT}$, $B_s=\frac{3}{2}B_p=33.3\ \text{mT}$.

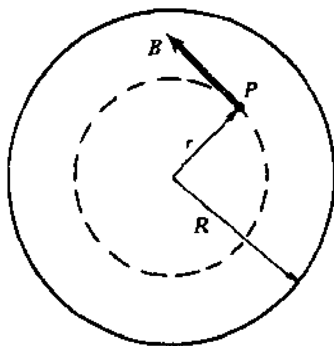


图 28-58

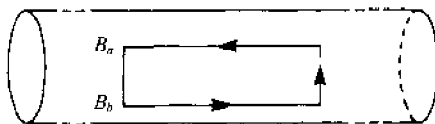


图 28-59

28.135　对任意形状的路径运用安培环路定理, 证明任一截面的长螺线管内部的磁场是均匀的.

证　☞ 该螺线管如图 28-59 所示. 螺线管内任一点的磁场都与中心轴平行因其垂直方向的分量由于左右对称性而相互抵消. 当理想的螺线管无限长时, 磁场的平行分量在一给定的轴线上处处相等. 如图所示, 在螺线管内取一长 L 的矩形的路径, 其长与轴平行. 因没有电流穿过该路径, 运用以前的结论, 安培环路定理可写成

$$B_bL-B_aL=0\ \text{或}\ B_b=B_a$$

因可以取任意的矩形, 所以得证.

28.136　如图 28-60 所示的同轴电缆, 一半径为 a 的直导线通过的电流为 I_1 且与内径为 b 外径为 c 的金属管同轴. 该管中通有与导线电流方向相反的电流 I_1. 求 $a<r<b$ 以及 $r>c$ 处的 B.

解　☞ 运用安培环路定理当 $a<r<b$, $\mu_0I_1=2\pi rB$, 所以 $B=(\mu_0I_1)/(2\pi r)=[(2\times10^{-7})I_1]/r$. 对于 $r>c$, $\mu_0(I_1-I_1)=2\pi rB$, 所以 $B=0$.

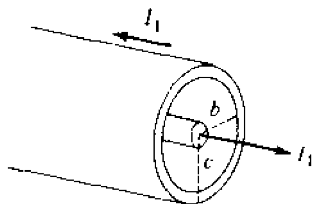


图 28-60

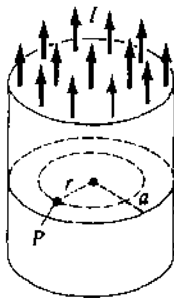


图 28-61

28.137　若外管中的电流为 I_2, 分别求 I_1 和 I_2 反向及 I_1 和 I_2 同向时题 28.136 中的磁场.

解 ☞ 当 $a<r<b, B=[(2\times10^{-7})I_1]/r$ 而当 $r>c, B=[(2\times10^{-7})(I_1\mp I_2)]/r$.

28.138[c] 根据图 28-61.设导线中电流密度随 r 变化的关系为 $J=kr^2$,其中 k 是常数.求(a) $r>a$ (b) $r<a$ 时的 B 的值.

解 ☞ 在导体上选择一与导体共轴的圆形回路并运用安培环路定理.(a)为了求出通过该闭合路径的电流,对 $JdA=(kr^2)(2\pi r dr)$ 从 0 到 a 积分,得 $I=(\pi ka^4)/2$.磁场 $B=(\mu_0 I)/2\pi r=(\mu_0 ka^4)/4r$.(b)对 JdA 从 0 到 r 积分,$I=(\pi kr^4)/2$.所以 $B=(\mu_0 kr^3)/4$.

28.139 一根长导线管的内径为 a 外径为 b.沿导线管方向的电流 I 在 $a\leqslant r\leqslant b$ 的截面上均匀分布.求下列区域内的磁场(a) $r<a$,(b) $a\leqslant r\leqslant b$,(c) $r>b$.

解 ☞ 在每个区域运用环路定理.(a) $B2\pi r=\mu_0(0)$,$B=0$;路径中没有闭合电流.(b) $B2\pi r=[\mu_0 I(r^2-a^2)]/(b^2-a^2)$;只有一部分电流在闭合路径内.(c) $B2\pi r=\mu_0 I$,$B=(\mu_0 I)/(2\pi r)$;所有电流都闭合在路径内.

28.140 证明图 28-62 中磁铁两边的边缘都有磁场存在.

证 ☞ 对矩形路径 $ABCD$ 运用安培环路定理.因为该路径中不含电流,我们有 $\sum\equiv\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=0$.假设 $\boldsymbol{B}$ 与 BC 边和 DA 边垂直,沿 CD 的磁场 $B=0$.所以 $\sum=\int_{AB}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$.但 $\boldsymbol{B}$ 与 AB 边反平行且不为零.这说明 $\sum\neq0$,与安培环路定理违背.所以假设 $\boldsymbol{B}$ 很快变为零(在两磁极间的外侧区域)是错误的

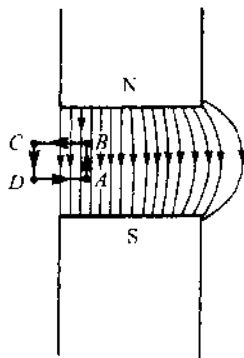
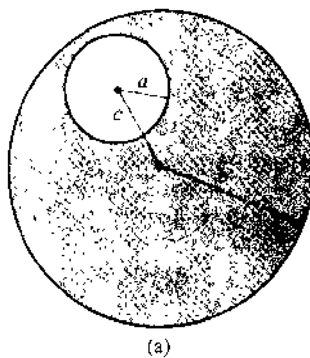


图 28-62



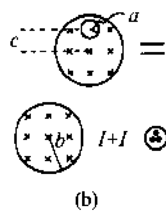


图 28-63

28.141 如图 28-63(a)所示,一根长直金属杆内有一与杆轴平行的半径为 a 的圆柱孔.若金属杆中的电流为 I,证明 B 的值(a)在杆轴上为 $(\mu_0 Ia^2)/[2\pi C(b^2-a^2)]$,(b)在孔的轴上为 $(\mu_0 IC)/[(2\pi)(b^2-a^2)]$(提示:假设所求的磁场是由两圆柱状导体的磁场合成的.)

证 ☞ 金属杆中 $J=I/[\pi(b^2-a^2)]$.可以把金属杆看成由一通过电流为 $J\pi b^2$ 的杆和另一通以相反方向电流 $J\pi a^2$ 的杆构成[见图 28-63(b)] 实际的磁场为这两根杆产生的磁场之和.(a)只有小杆产生磁场,$B=[\mu_0(J\pi a^2)]/(2\pi C)$.(b)在孔轴上仅有大杆产生磁场;$B=[\mu_0(J\pi c^2)]/(2\pi c)=(\mu_0 Ic)/[2\pi(b^2-a^2)]$.

28.142 对于题 28.141 的情况,求下列条件下的 P 点的磁场(a)点所在圆周半径 $R>b$,(b)点所在圆周半径 $R<b$ 但不在孔内.

解 ☞ (a)图 28-64 中 D 点、E 点的磁场方向相反.运用 28.141 题中的方法有,实际的磁场为 $B=[\mu_0(J\pi b^2)]/(2\pi R)-[\mu_0(J\pi a^2)]/[2\pi(R\pm C)]$.(b)在点 F 和 H,$B=[\mu_0(J\pi R^2)]/(2\pi R)-[\mu_0(J\pi a^2)]/[2\pi(R\pm C)]$.在点 G,$B=(\mu_0 JR)/2+(\mu_0 Ja^2)[2(C-R)]$为两通电杆磁场之和;在点 k 的磁场为两通电杆磁场之差 $B=[(\mu_0 J)/2][R-a^2/(C+R)]$其中 $J=I/[\pi(b^2-a^2)]$.

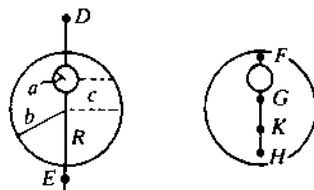


图 28-64

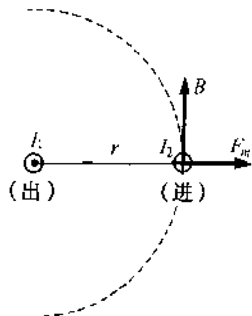


图 28-65

28.143 证明两根长平行导线单位长度受到的力为 $f=-(\mu_0 I_1 I_2)/(2\pi r)$，其中 I_1 和 I_2 是两导线上的电流，r 是两导线间的距离.(负号表示两导线中的电流相反时导线相互吸引而当电流方向相反时导线相互排斥)

证 ☞ 根据图 28-65，与通过电流 I_1 的导线相距 r 处的磁场为 $B-(\mu_0 I_1)/(2\pi r)$.该场与另一根导线垂直.所以第二根导线上长为 l 的一段受到的力为 $F_m=BI_2 l$ 所以单位长度上的力为 $f=\frac{F_m}{l}=BI_2=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

根据右手定则可以看出当 I_1 和 I_2 方向相反时作用在导线 2 上的力是排斥力；而当 I_1 和 I_2 同向时是吸引力.按照常用的符号习惯写成

$$f=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \tag{1}$$

当 I_1 和 I_2 同号时 f 为负(吸引力)，当 I_1 和 I_2 异号时 f 为正(排斥力).

28.144 求图 28-66 中两导线间单位长度的作用力.

解 ☞ 因两导线中电流方向相反，利用 28.143 题结果

$$f=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}=-\frac{\mu_0(25\text{A})(-35\text{A})}{2\pi(0.25\text{m})}-+7.0\times10^{-4}\text{N/m}$$

该力是斥力.

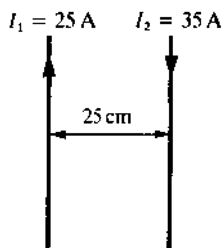


图 28-66

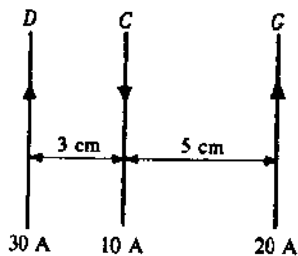


图 28-67

28.145 考虑图 28-67 中三根长平行直导线.求 25 cm 长的 C 导线受到的力.

解 ☞ 导线 D、G 在导线 C 处的磁场分别为

$$B_D-\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A})(30\text{A})}{2\pi(0.03\text{m})}-2\times10^{-4}\text{T}$$

指向纸内

$$B_G=\frac{(4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A})(20\text{A})}{2\pi(0.05\text{m})}=0.8\times10^{-4}\text{T}$$

指向纸外.所以导线 C 处的磁场

$$B=2\times10^{-4}-0.8\times10^{-4}=1.2\times10^{-4}(\text{T})$$

指向纸内.作用在 25 cm 长的导线 C 上的力为

$$F = ILB\sin\theta = (10A)(0.25m)(1.2\times10^{-4}T)(\sin 90°) = 3\times10^{-4}N$$

运用右手定则知作用在导线 C 上的力向右.

28.146 在图 28-68 中,求作用在矩形线圈的 MN 边上力以及该线圈上的力矩.

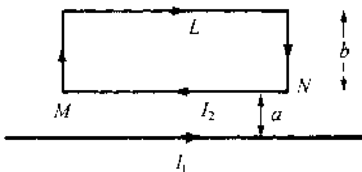


图 28-68

解 ☞ I_1 在 MN 上的磁场为 $(\mu_0 I_1)/(2\pi a)$. I_1 对 MN 的力背离 I_1,大小为 $I_2LB = (\mu_0 I_1 I_2 L)/(2\pi a)$. I_1 对线圈的力在线圈平面上产生的力矩为零.这些力压缩线圈.

28.147 对于图 28-68 中的情况,求线圈电流对长直导线的作用力.(提示:假设力的相互作用定律成立.)

解 ☞ 由题 28.146,作用在线圈上侧边的力为 $(\mu_0 I_1 I_2 L)/[2\pi(a+b)]$ 指向 I_1.由牛顿第三定律,线圈对直导线的作用力为 $[(\mu_0 I_1 I_2 L)][1/a - 1/(a+b)]$,为排斥力.

28.148 解释为何真空中的磁导率为 $4\pi\times10^{-7}$(在国际单位制中).

解 ☞ 由题 28.143 的等式(1)来定义安培.即:当 r 为 1 m,测得 f 为 2×10^{-7} N/m(一个合适的值),由 $I_1 = I_2 = I$,因此 $I = 1$A.这样就得到 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$.

28.149 图 28-69(a)所示两个无限大的面板通有指向纸外的电流,单位宽度上电流为 j 安培.求点 P 和 Q 处的磁场.

解 ☞ 考虑其中一板由图 28-69(b)所示.板两边的磁场如图中所示.对虚线路径运用环路定理,所以 $2BL = \mu_0 jL$,即

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} \tag{1}$$

考虑两板产生的磁场,在 P 点相互抵消 $B = 0$;在 Q 点两磁场相加,故 $B = \mu_0 j$.

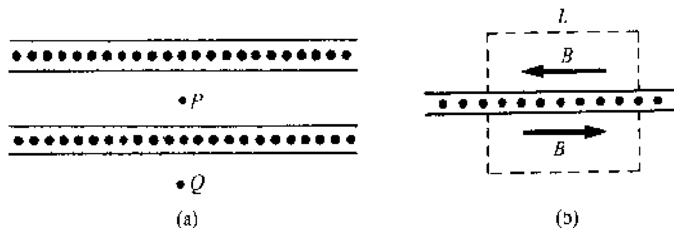


图 28-69

28.150 在 28.149 题中,求上板电流在下板单位面积上的作用力.

解 ☞ 下板长 L 的方框受到向上的力为 $F = BIL$, $I = jL$.运用题 28.149 等式(1), $f = [(\mu_0 j)/2](jL)L = (\mu_0 j^2 L^2)/2$.单位面积上的力为 $F/L^2 = (\mu_0 j^2)/2$.

28.151 一平面环形线圈由 10 匝导线构成,直径为 20 mm,通过的电流为 0.5 A.该线圈放在有 200 匝导线的长为 250 mm 的长螺线管中.螺线管导线中的电流为2.4A.计算环形线圈的轴与螺线管的轴垂直时受到的力矩.

解 ☞ 用下标 s 和 c 分别代表螺线管和线圈.所以 $\tau = N_c I_c A_c B_s \sin 90°$, $B_s = \mu_0 n I_s = \mu_0 (N_s/L_s) I_s$,所以

$$\begin{aligned}\tau &= \mu_0 N_s N_c I_c I_s (\pi r_c^2)/L_s \\ &= (4\pi\times10^{-7}\ \text{H/m})(10)(200)(0.5A)(2.4A)\pi(0.01m)^2/(0.25m) \\ &= 3.8\times10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

第二十九章　物质的磁性

29.1　*H* 和 *M* 场;磁化率;相对磁化率

29.1　定义磁极强度、磁偏角、下倾角、相对磁导率、居里温度、磁滞效应.

解　☞ 磁极强度定义为条型磁铁的磁矩与两极之间距离(近似等于磁铁长度)之比.

磁偏角是指地球上任意一点水平放置的指南针的指向与正北方向之间的夹角.

下倾角是指自由放置的指南针与水平方向之间的夹角.材料的相对磁导率是当一螺线管中充满该材料时所产生的磁感应强度与螺线管内为真空(或空气)时的磁感应强度之比值.居里温度是一临界温度,高于此温度,铁磁材料完全失去它的铁磁特性.磁滞效应是指磁性材料的下列现象:当磁场 $\boldsymbol{H}$ 加上后再去除时,材料并不完全失去磁化,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 不成正比,它们之间的关系是一条磁滞回线.

29.2　阐述磁感应强度 $\boldsymbol{B}$、磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 之间的关系.

解　☞ 真空中的磁现象可用磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 描述.在介质内,$\boldsymbol{B}$ 仍为矢量场,它解释作用在运动电荷上的力;而引入的两个新矢量 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系为 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}$.$\boldsymbol{H}$ 称做磁场强度,满足下列毕奥-萨伐尔定律和安培环路定律:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi r^3}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}),\quad \oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=I$$

式中 I 是传导电流,即介质里电荷的宏观运动.($\boldsymbol{B}$ 的毕奥-萨伐尔定律中的电流可以是任意电流,包括原子的磁偶极矩的排列产生的磁化电流.)在真空中,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0$.所以,在介质内,$\boldsymbol{H}$(或 $\mu_0\boldsymbol{H}$)只是 $\boldsymbol{B}$ 与介质的微观性质无关的部分.SI 制中 $\boldsymbol{H}$ 的单位是 A/m.$\boldsymbol{H}$ 场与 $\boldsymbol{B}$ 场一样有其它名称(如磁化场).$\boldsymbol{M}$ 称做磁化强度、磁极化强度或单位体积内的磁偶极矩.正如其第三个名称所包括的那样,它是材料单位体积内的电子自旋、核自旋、电子的轨道运动产生的磁偶极矩之和.真空中 $\boldsymbol{M}=0$,所以 $\boldsymbol{M}$(或 $\mu_0\boldsymbol{M}$)是 $\boldsymbol{B}$ 依赖于介质的微观特性的部分.$\boldsymbol{M}$ 的单位是 A/m 或 $\mathrm{J/T\cdot m^3}$.有下列等价关系:

$$1\ \mathrm{A/m}=1\ \mathrm{N/Wb}=1\ \mathrm{Wb/H\cdot m}=1\ \mathrm{J/T\cdot m^3}$$

29.3　借助于 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{M}$ 阐述材料的磁化率和磁导率.

解　☞ 对于各向同性的介质,$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{M}$ 方向相同.有

$$B=\mu_0(H+M)=\mu_0(H+\chi_m H)=\mu H,\ \mu=\mu_0(1+\chi_m)$$

无量纲的量 χ_m 叫做介质的磁化率;而 μ 是材料的磁导率,其单位与 μ_0 相同,为 H/m.比率 $\mu_{rel}=\mu/\mu_0$ 是无量纲的量,叫相对磁导率,有时用 K_m 表示.按照磁化率的大小,磁介质分类如下:抗磁材料:χ_m 是一很小的负数;顺磁材料:χ_m 是一很小的正数,与绝对温度成正比;铁磁材料:χ_m 是远大于 1 的正数,且与 H 有关,所以 M 与 H 不成正比.

29.4　计算磁场强度 H 和磁感应强度 B.(a)在离长直导线 105 mm 处,导线中电流强度为 15 A,(b)在一长 0.24 m,2000 匝的螺线管中通以 1.6 A 电流.

解　☞ (a)

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{2I/10^7r}{4\pi/10^7}=\frac{I}{2\pi r}=\frac{15}{(2\pi)(0.105)}=22.7(\mathrm{A/m})$$

$$B=\frac{(2)15}{10^7\times0.105}=28.57(\mu\mathrm{T})$$

(b)

$$H=nI=\frac{2000}{0.24}1.6=13333(\mathrm{A/m}),\ B=\frac{4\pi}{10^7}\left(\frac{2000}{0.24}\right)1.6=0.0168(\mathrm{T})$$

29.5[c]　图 29-1 所示为一磁铁磁化曲线,求微分相对磁导率的最大值,又:当 B_0 为多少时出现最大值?

解　☞ 微分磁导率定义为 $\mu'=\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}$,所以微分相对磁导率定为

$$K'_m=\frac{\mu'}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}B_0}$$

从图 29-1 中读出斜率最大点在 $B_0\approx0.13$ mT 处,该处测得 $K'_{m(\max)}\approx3000$.

29.6　电磁铁的螺线管长 225 mm,共 900 匝.(a)问当通以 0.8 A 电流时,螺线管中央磁场强度 H 为多少?(b)当螺线管相对磁导率为 350 时,磁感应强度 B 为多少?

解　☞ $H=nI=\frac{900}{0.225}0.8=3200(\mathrm{A/m})$

$$B=\mu_0K_mH=(4\pi\times10^{-7})(350)(3200)=1.41(\mathrm{T})$$

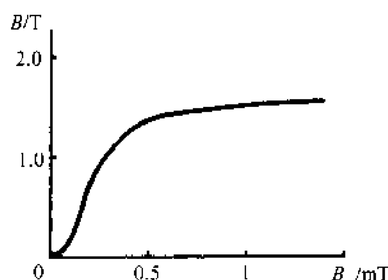


图 29-1

29.7　一真空螺线管每厘米上有 20 匝导线,中间通以 0.18 A 电流,求 H 和 B.

解　☞ $H=nI=(2000\ \mathrm{m}^{-1})(0.18\ \mathrm{A})=360\ \mathrm{A/m}$

$$B=\mu_0H=(4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m})(360\ \mathrm{A/m})=0.45\ \mathrm{mT}$$

29.8　若上题中螺线管中有铁芯,其绝对磁导率为 $6\times10^{-3}\ H/m$,又怎样?

解　☞ $H=360\ \mathrm{A/m}$, $B=\mu H=(6\times10^{-3}\ \mathrm{H/m})(360\ \mathrm{A/m})=2.16\ \mathrm{T}$

29.9　一螺绕环的导线绕在一环形塑料圈上($K_m=1$),塑料圈直径为 10 cm,圈上共有 200 匝导线,问若要使圈中磁感应强度 $B=0.01$ T,必须通以多大电流?这时 H 为多大?

解　☞ $B=\frac{4\pi nI}{10^7}$,其中 $n=\frac{200}{2\pi(0.1)}=318.5$ 匝/m,所以

$$0.01=\frac{4\pi}{10^7}(381.5)I,\ 得\ I=25\mathrm{A}$$

$$H=nI=318.5(25)=7960(\mathrm{A/m})$$

29.10　一螺绕环周长 0.5 m,导线 500 匝,通以 0.15 A 电流.(a)当螺绕环内为空气时,求 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{H}$,(b)当中心加入相对磁导率为 5000 的铁芯时,求 B 和磁化强度 M.

解·☞ 对于螺绕环,$H=nI$, $B=(4\pi/10^7)(K_mH)=\mu H$,因此

(a)　$H=nI=\frac{500}{0.5\mathrm{m}}0.15\mathrm{A}=150\mathrm{A/m}$

$$B=(4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m})(150\ \mathrm{A/m})=0.188\ \mathrm{mT}$$

(b)　$B=5000(0.188\ \mathrm{mT})=0.94\mathrm{T}$

利用 $B/\mu_0=H+M$,得 $\frac{0.94}{4\pi\times10}=150+M$

$$M=7.5\times10^5\mathrm{A/m}$$

29.11　在上题上算出每个铁原子的平均磁矩.设铁密度为 7850 kg/m³.

解　☞ 1 kmol(55.85 kg)铁有 6.02×10^{26} 个原子,因此在 1 m³ 铁中有 $7850(6.02\times10^{26})/55.85=8.46\times10^{28}$ 个铁原子.因此,每个原子的平均磁矩为

$$\frac{7.5\times10^5\ \mathrm{A\cdot m^2/m^3}}{8.46\times10^{28}\ /\mathrm{m^3}}=8.9\times10^{-24}\ \mathrm{Am^2}$$

29.12　由图 29-2 计算铬钾矾(chromium potassium alum)的居里常数.

解　☞ 根据居里定律:磁导率 $\chi=C/T$,因此,$C=\chi T$.根据图 29-2,我们可知 $\chi=0.5$ 对应 $1/T=8.0\times10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$,$T=125$ K.根据这些数值,铬钾矾的居里常数为

$$C=(0.5)(125)=63\ (\mathrm{K})$$

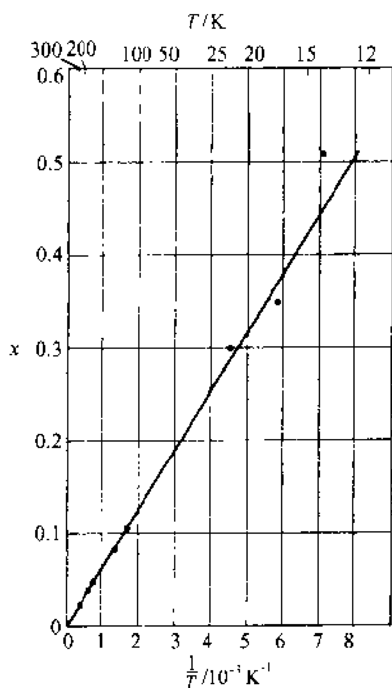


图 29-2

29.13　根据图 29-3，计算钆的居里常数和居里温度.

解　☞ 根据居里-外斯(Curie-Weiss)定律，$\chi = C/(T - T_c)$，因此

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T - T_c}{C} \tag{1}$$

这里 T_c 是直线在水平轴上的截距。由图可见，$T_c = 310$ K，而且，$1/\chi = 26.8$ 时，对应 $T = 1400$ K；$\frac{1}{\chi} = 2.0$ 时，对应 $T = 400$ K。且从(1)式知

$$\frac{\Delta(1/\chi)}{\Delta(T)} = \frac{1}{C} \tag{2}$$

所以

$$C = \frac{\Delta(T)}{\Delta(1/\chi)} = \frac{(1400 - 400)\text{K}}{(26.8 - 2.0)} \approx 40\text{K}$$

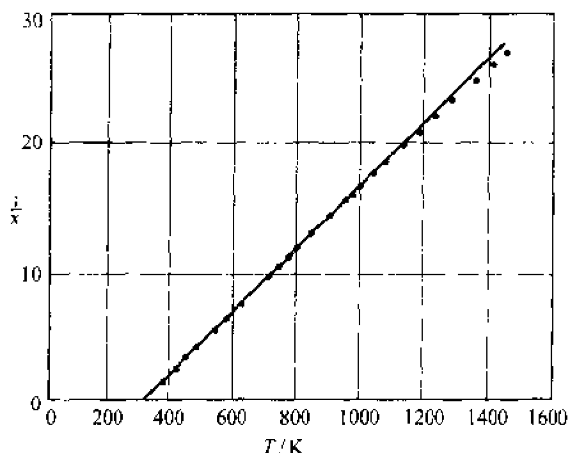


图 29-3

29.14　一 0.6 m 长的螺线管，上面绕有 1800 匝铜导线，螺线管中有一相对磁导率为 500 的铁芯. 当导线中通以 0.9 A 电流时，铁芯中的磁感应强度 B 为多少？每单位长度上的 H 和 M 各为多少？并求出每个铁原子对磁化的平均贡献.

解　☞ $H = nI = \frac{1800}{0.6}(0.9) = 2700$ A/m

$B = K_m\mu_0 H = 500(4\pi\times10^{-7})(2700) = 1.69$ T

$M = (K_m - 1)H = (499)(2700) = 1.35$ MA/m

由题 29-11 知

$$\frac{\text{磁矩}}{\text{原子数}} = \frac{1.35\times10^6\ \text{A}\cdot\text{m}^2/\text{m}^3}{8.48\times10^{28}\text{atoms/m}^3} = 1.59\times^{-23}\text{A}\cdot\text{m}^2$$

29.15　一铁环横截面积为 80 mm^2，平均直径为 0.25 m，绕有 900 匝铜导线. 若铁芯的相对磁导率为 250，导线内电流为 4 A，求铁芯内部的磁感应强度 B.

解　☞ $n = \frac{900}{0.25\pi} = \frac{3600}{\pi}$匝/m，$B = \frac{40}{10^7}K_m nI = \frac{4\pi}{10^7}(250)\frac{3600}{\pi}(4) = 1.44$ T

29.16　一螺线管有 $N = 20$ 匝导线，通电 $i = 20$ A，中有铁芯，平均长度 $l = 25$ cm，且相对磁导率 $K_m = 1000$，求铁芯中磁场 B.

解　☞

$$B = K_m\mu_0\frac{Ni}{l} = \frac{(1000)(4\pi\times10^{-7}\text{H/m})(20)(10\text{A})}{(0.25\ \text{m})} = 1.01\ \text{T} \tag{1}$$

29.17　在上题中假设铁芯长 $l_1 = 1.0$ cm 的部分被锯掉，用以测量磁场，如图 29-4. 求铁芯中的 B 值以证明 B 大大减小了.

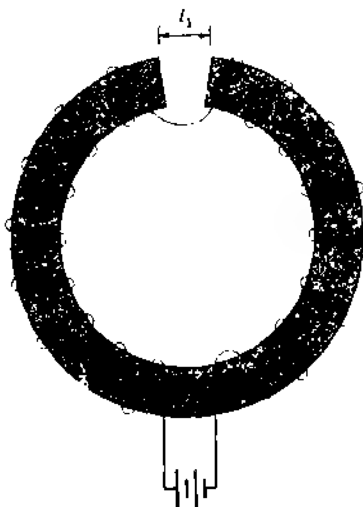


图 29-4

解 ☞ 根据安培环路定理,定义 $l_2 = l - l_1$,则

$$H_1 l + H_2 l_2 = Ni$$

因为磁通量连续而气隙很小,所以 $B_1 = B_2 = B$, $\frac{B}{\mu_0} l_1 + \frac{B}{K_m \mu_0} l_2 = Ni$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{l_1 + l_2/K_m} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(20)(10)}{0.01 + (0.24/1000)}$$

$$= 2.45 \times 10^{-2}(\text{T})$$

这只是上题结果的约 3%.

29.18 一螺线管长 40 cm,横截面积 8 cm^2,共绕 300 匝导线,通以 1.2 A 电流,铁芯的相对磁导率为 600.计算(a)铁芯内部磁感应强度 B,(b)磁通量 Φ.

解 ☞ (a)对长螺线管

$$B_v = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{T} \cdot \text{m/A})(300)(1.2A)}{0.40\ \text{m}} = 1.13 \times 10^{-3}\ \text{T}$$

$$B = K_m B_v = (600)(1.13 \times 10^{-3}\text{T}) = 0.68\ \text{T}$$

(b)因为磁场垂直于螺线管的横截面,所以

$$\Phi = B_\perp A = BA = (0.68\text{T})(8 \times 10^{-4}\text{m}^2) = 5.4 \times 10^{-4}\text{Wb}$$

29.19 一螺绕环中的空气被其它物质取代时内部磁通量从 0.65 mWb 变化到 0.91 mWb,求该物质的相对磁导率和磁导率.

解 ☞

$$K_m = B/B_0, \Phi = B_\perp A,$$

所以相对磁导率

$$K_m = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{0.91\ \text{mWb}}{0.65\ \text{mWb}} = 1.40$$

磁导率

$$\mu = K_m \mu_0 = (1.40)(4\pi \times 10^{-7}\text{H/m}) = 5.6 \times 10^{-7}\text{H/m}$$

29.20 导出磁路方程,证明它与欧姆定律形式相仿.

解 ☞ 考虑一螺绕环,中间带有铁芯,铁芯内 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 各处均匀.安培环路定理给出 $Hl = NI$,其中 l 为铁芯的周长,N 为线圈的匝数.内部磁通量 $\Phi = BA = \mu HA$,A 为横截面积.因为电流和磁通量关系为

$$NI = \Phi \frac{l}{\mu A} \text{ 或 mmf} = \Phi \mathcal{R} \tag{1}$$

这里定义 NI 为磁动势(mmf),$l/\mu A$ 为磁阻,习惯上常将磁动势(mmf)叫做安匝数(A),而磁阻的单位为亨利的倒数(H^{-1}).将式(1)将欧姆定律类比

磁动势←→电动势　磁通量←→电流　磁阻←→电阻

由此可看出两种形式相仿.不过,对于铁磁质,类比在下列方面具有重要区别:电阻 $R = l/(\sigma A)$ 与电动势无关,而磁阻 $R = l/(\mu A)$ 与磁动势有关,因为铁磁质 μ 随电流 I 变化.这时,(1)式为一非线性方程,须用迭代或图解法求解.

29.21 一螺绕环有 1500 匝,线圈横截面积为 360 mm^2,周长为 0.75 m,相对磁导率为 1500,中间通以 0.24 A 电流.求(a)磁场强度为 H,(b)磁动势 mmf,(c)磁感应强度 B,(d)磁通量 Φ,(e)磁阻.

解 ☞ (a) $H = nI = \frac{1500}{0.73} 0.24 = 480\ (\text{A/m})$

(b) $\text{mmf} = Hl = (480\ \text{A/m})(0.75\ \text{m}) = 360\ \text{A}$

(c)　$B=\frac{4\pi K_m nI}{10^7}=\frac{4\pi}{10^7}(1500)(480)=0.905(\mathrm{T})$

(d)　$\Phi=BA=(0.905\ \mathrm{Wb/m^2})\left(\frac{360\ \mathrm{m^2}}{10^6}\right)=3.26\times10^{-4}\ \mathrm{Wb}$

(e)　$\mathscr{R}=\frac{\mathrm{mmf}}{\Phi}=\frac{360}{3.26\times10^{-4}}=1.1\times10^{6}(\mathrm{H})^{-1}=1.1(\mu\mathrm{H}^{-1})$

29.22　如图 29-5 所示的磁路数据如下：面积 $A_1=1200\ \mathrm{mm^2}$，$A_2=800\ \mathrm{mm^2}$；长度 $l_1=210$ mm，$l_2=430$ mm，气隙长度 $l_a=2$ mm；下部分铁芯的相对磁导率$(\mu_{rel})_1=200$，其余部分$(\mu_{rel})_2=300$，总共绕 $N=1000$ 匝，$I=2.5$ A. 计算(a)磁动势 mmf，(b)总的磁阻.

解　☞ (a)　mmf $=NI=2500$ A·匝

(b)　磁阻的串、并联公式与电阻串、并联公式相同，所以

$$\mathscr{R}_1=\frac{l_1}{\mu_1 A_1}=\frac{210\times10^{-3}}{(250\times4\pi\times10^{-7})(1200\times10^{-6})}=0.6963(\mu\mathrm{H}^{-1})$$

$$\mathscr{R}_2=\frac{l_2}{\mu_2 A_2}=1.426\ \mu\mathrm{H}^{-1},$$

$$\mathscr{R}_a=\frac{l_a}{\mu_0 A_2}=1.989\ \mu\mathrm{H}^{-1},$$

$$\mathscr{R}_{总}=\mathscr{R}_1+\mathscr{R}_2+\mathscr{R}_a=4.11\mu\mathrm{H}^{-1}$$

上面我们已经假设气隙的有效面积为 A_2(忽略边缘效应). 注意：气隙的磁阻与所有铁芯的磁阻相当.

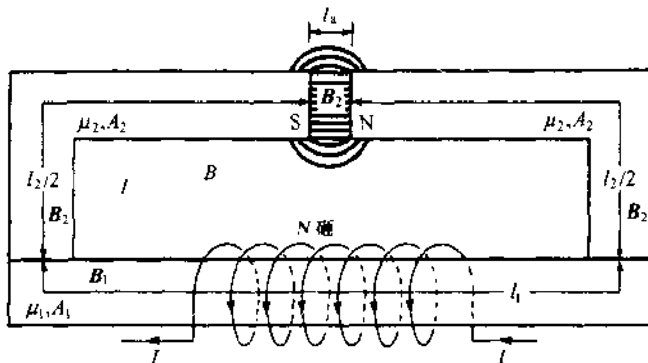


图 29-5

29.23　求上题中总的磁通量和磁通密度.

解　☞ a) $\Phi=\frac{\mathrm{mmf}}{\mathscr{R}_{总}}=\frac{2500}{4.11}=608\ (\mu\mathrm{Wb})$

(b) $B_1=\frac{\Phi}{A_1}=\frac{608\times10^{-6}}{1200\times10^{-6}}=0.507(\mathrm{T})$，$B_2=B_a=\frac{\Phi}{A_2}=\frac{608\times10^{-6}}{800\times10^{-6}}=0.76(\mathrm{T})$

29.24　试写出磁导率为 μ 的介质中磁场能量密度的表达式.

解　☞ 单位体积内的磁场能量为 $\varepsilon=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{J/m^3}$，若介质内 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 平行，则 $\varepsilon=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2\mu}B^2=\frac{\mu}{2}H^2\mathrm{J/m^3}$.

29.25　一螺线管有 $N=1200$ 匝，平均长度 $l=80$ cm，横截面积 $A=60\ \mathrm{cm^2}$，通以电流 $I=1.5$ A，计算 B、H、Φ、ε.

解　☞ $B=\mu_0 nI=(4\pi\times10^{-7})\frac{1200}{0.8}1.5=2.8274334(\mathrm{mT})$，$H=\frac{B}{\mu_0}=nI=2250\ \mathrm{A/m}$

$\Phi=BA=16.964598\ \mu\mathrm{Wb}$，$\varepsilon=\frac{1}{2}BH=3.1808626\ \mathrm{J/m^3}$

29.26　若上题中管内有一铋芯($\chi_m=-2\times10^{-6}$)，结果如何？

解　☞ $\mu=\mu_0(1+\chi_m)=1.2566345\times10^{-6}\ \mathrm{H/m}$，　$B=\mu H=2.8274276\ \mathrm{mT}$，

$$\Phi = BA = 16.964566\ \mu\text{Wb}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}BH = 3.1808567\ \text{J/m}^3$$

容易看出,抗磁质引起 B、Φ、ε 值比真空时略有减少,而假如是顺磁质,其值则比真空时略有增加.

29.27 金属中的某一自由电子的自旋磁矩原取向与外磁场 B_0 方向相反.外磁场由一脉冲线圈产生,其磁感应强度 $B_0 = 35.0$ T,并可视为不变.在实验中,磁矩 $\boldsymbol{m}_B$ 方向转动 180°,最终保持与 $\boldsymbol{B}_0$ 方向相同.求实验中电子自旋磁矩的取向势能由外磁场引起的变化 $\Delta U = U_f - U_i$.分别用 J 和 eV 表示.($m_B = 9.27\times10^{-24}\text{A}\cdot\text{m}^2$)

解 ☞ 用公式 $U = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$,由题知,$\boldsymbol{m}_B$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 一开始是反平行的,所以初始能量为

$$U_i = -m_B B = (9.27\times10^{-24}\text{A}\cdot\text{m}^2)(35.0\ \text{T}) = 3.24\times10^{-22}\text{J}$$

磁矩翻转 180°后,$\boldsymbol{m}_B$ 与外磁场平行,故

$$U_f = -U_i = -3.24\times10^{-24}\text{J}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -6.48\times10^{-22}\text{J} = -4.06\times10^{-3}\text{eV}$$

29.28 参见上题,假设自由电子是在室温(300K)的金属中,那么是否可能达到饱和状态?即所有自由电子的自旋磁矩可以都与外磁场方向相同吗?又问这种饱和在 $T = 0.10$ K 时能否发生?

解 ☞ 当 $T = 300$ K 时

$$\frac{\Delta U}{kT} = \frac{6.5\times10^{-22}\text{J}}{4.2\times10^{-21}\text{J}} = 0.15$$

这就是说,有更多的能量用于自由热运动,相比之下与外磁场保持一致的趋势就较小,因此,这时电子的自旋磁矩不一定与外磁场平行.当 $T = 0.10$ K 时

$$\frac{\Delta U}{kT} = \frac{6.5\times10^{-22}\text{J}}{1.4\times10^{-22}\text{J}} = 460$$

这显示,当 $T = 0.10$ K 时,热运动呈明显弱势,故可能所有电子自旋磁矩方向与外磁场方向一致.

29.29 (a)证明磁矩单位可用 J/T 表示,(b)在玻尔氢原子理论中,电子轨道角动量的量子化单位为 $h/2\pi$,$h = 6.626\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ 是普朗克常数.试计算原子的磁矩的最小允许值(此值称为玻尔磁子)为多少 J/T.

解 ☞ (a) $U_\theta = -\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{B}$,因 U_θ 单位为 J,$\boldsymbol{B}$ 单位为 T,所以磁矩的单位是 J/T.

(b)磁矩 Π 正比于电子轨道角动量的大小 mvr

$$\Pi = IA = \frac{e}{2\pi r/v}\cdot\pi r^2 = \frac{e}{2m}mvr$$

因此,玻尔磁子为

$$\Pi_{\min} = \frac{e}{2m}\cdot\frac{h}{2\pi} = \frac{1.602\times10^{-19}\text{C}}{2(9.109\times10^{-31}\text{kg})}\cdot\frac{6.626\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{2\pi}$$

$$= 9.27\times10^{-24}\text{C}\cdot\text{J}\cdot\text{s/kg} = 9.27\times10^{-24}\ \text{J/T}$$

29.30 一螺绕环,其中为一铁芯,导线电流 $NI = 12000$ A·匝,已知铁环半径 $R = 150$ mm,$B = 1.8$ T.计算 H、M(设为常数),χ_m 以及由铁芯的磁偶极子贡献的等效安匝数.

解 ☞ $H = \dfrac{NI}{2\pi R} = \dfrac{12000}{2\pi(0.150)} = 12.732(\text{kA/m})$

$B = \mu H$,$\mu = 1.8/12.732\times10^3 = 1.4137\times10^{-4}(\text{H/m})$

$\mu = \mu_0(1+\chi_m)$,$\chi_m = 111.5$,$M = \chi H = (111.5)(12.732\times10^3) = 1420$ kA/m

注意,这里 $B = \mu_0(H+M) = \mu_0(1+\chi_m)H$.设有铁芯时,$B_0 = \mu_0 H$,我们可算出铁芯产生的等效安匝数为

$$\chi_m(NI) = 1.338\times10^6$$

此结果比电流的磁动势大了 100 多倍.这一等效电流称为磁化电流,或安培表面电流.若要在空气芯中建立 $B = 1.8$ T 的磁场,需要 $12000 + 1.338\times10^6 = 1.35\times10^6$(A·匝).

29.31 铁中每平方米含原子 8.5×10^{28}个(见题 29.11),假设每一个原子磁矩等于玻尔磁矩,

在上题的螺绕环中 $NI=3000$，其余量不变，且有$\frac{1}{4}$磁矩与 $\boldsymbol{H}$ 方向相同．求 M、χ_m、μ、B．

解　☞ 由题 29.29 中玻尔磁子的值，得

$$M=\frac{1}{4}(8.5\times10^{28})(9.27\times10^{-24})=1.97\times10^{5}(\text{J/T}\cdot\text{m}^3)$$

$$H=\frac{3000}{2\pi(0.13)}=3.1831(\text{kA/m}),\ \chi_m=\frac{M}{H}=61.9$$

$$\mu=\mu_0(1+\chi_m)=7.9\times10^{-5}\text{H/m},\ B=\mu H=0.25\ \text{T}$$

29.32[c]　一长直导线，由非磁性材料构成($K_m=1$)，半径为 a，中间通以电流 i，均匀分布．计算单位长度导线中的磁场能量．

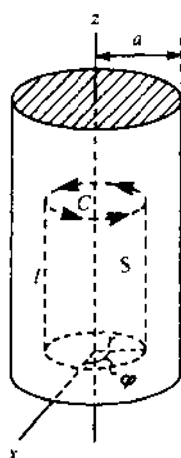


图 29-6

解　☞ 如图 29-6，在柱坐标系(r,φ,z)中由于电流沿 z 轴方向，故 $B_z=0$，由对称性分析知，$\boldsymbol{B}$ 的 r 和 φ 分量只与 r 有关，所以 $\boldsymbol{B}=B_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}+B_\varphi(r)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$．下面运用高斯定理(选取同轴的柱面 s 为高斯面，其长为 l，半径为 r，如图所示)得

$$0=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=B_r(r)2\pi rl$$

因此，$B_r(r)=0$．再对回路 C 运用安培环路定理，得

$$\oint_C\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\pi rB_\varphi(r)=\mu_0 i(r)\qquad(1)$$

式中 $i(r)$是回路 C 内通过的电流，因为电流均匀分布

$$\frac{i(r)}{i}=\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\ \text{即：}i(r)=\frac{r^2 i}{a^2}\qquad(2)$$

由(1)，(2)知，$B_\varphi(r)=(\mu_0 ir)/(2\pi a^2)$．下面计算磁场能量．在长为 l，内外半径分别为 r，$r+\mathrm{d}r$ 的圆柱壳中的磁场能量为

$$\mathrm{d}U_m=\varepsilon_m\mathrm{d}V=\frac{B_\varphi^2(r)}{2\mu_0}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi a^4}r^3\mathrm{d}r$$

因此，单位长度导线中的磁场能量为

$$\frac{U_m}{l}=\frac{1}{l}\int\mathrm{d}U_m=\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a^4}\left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^a\right)=\frac{\mu_0 i^2}{16\pi}$$

29.33　设半径为 R 的球形物体置于真空中，球心处为一磁偶极子，其产生的磁场的能量为 $U=(\pi/2)[B_p^2R^3)/(2\mu_0)]$．其中 B_p 是物体表面处的磁场，它是 B 的最大值，即为物体的磁极处的 B 值．(a)虽然地球的磁场不是由一磁偶极子产生的，也不处在真空中，但仍可合理地估计其磁场能量为 $U\approx(B_p^2R^3)/2\mu_0$，试计算其大小，已知 $B_p=6.0\times10^{-5}\text{T}$，$R=6.4\times10^6\text{m}$．

(b)将 U 值与美国每年消耗的电能(1972 年为 $1.7\times10^{12}\text{kW}\cdot\text{h}$)进行比较．

解　☞ (a) $B_p=6.0\times10^{-5}\text{T}$，$R=6.4\times10^6\text{m}$，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{N/A}^2$，得

$$U=\frac{B_p^2R^3}{2\mu_0}=\frac{(6.0\times10^{-5})^2(6.4\times10^{-6})^3}{2(4\pi\times10^{-7})}=3.8\times10^{17}(\text{J})$$

(b) 美国 1972 年消耗的电能为

$$E=1.7\times10^{12}\text{kW}\cdot\text{h}=1.7\times10^{12}(10^3\ \text{J/s})(3600\ \text{s})=6.1\times10^{18}\text{J}$$

29.2　磁铁；磁极强度

29.34　试用磁极强度表示当一条形磁铁放入外磁场中时，它受到的磁力矩．

解　☞ 当一条形磁铁垂直放入一磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的外磁场中时，它受到一磁力矩 $\tau=Bm=Bpl$，其中 m 是磁矩，l 为磁铁长度，p 即为该磁铁的磁极强度．从原理上讲，这个磁力矩产生原因是外磁场与磁铁内部无限小的环形电流间的相互作用．为方便，可视磁力矩是施加在磁铁两端符号相

反的两个磁极上的.强度为 p 的磁极处于外磁场中时,外磁场与磁极之间相互作用力为 $F=Bp$.总之,可得公式 $\tau=mB\sin\theta$,θ 是 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角.

29.35 一条形磁铁长 10 cm,截面积为 $1.0\ \text{cm}^2$,磁化强度为 10^2 A/m,计算其磁极强度.

解 ☞ 长度为 $2d$ 的条形磁铁的磁矩大小为 $m=2|p|d$,p 为磁极强度,用磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 表示,$m=M(2ad)$,a 为磁铁的横截面积,因此 $|p|=\frac{m}{2d}=aM$.代入 $a=1.0\ \text{cm}^2$,$M=1.00\times10^2\text{A/m}$,$|p|=(1.00\times10^{-4})(1.00\times10^2)=1.00\times10^{-2}(\text{A·m})$.

29.36 一条形磁铁的磁场可被认为是由磁铁表面环形电流产生的.若一条形磁铁与一内部磁场为 0.3 T 的螺线管等价,磁铁每厘米上的表面磁化电流为多少?

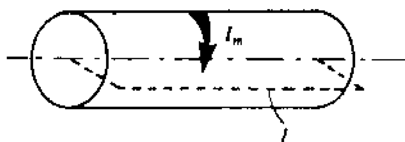


图 29-7

解 ☞ 在图 29-7 中取 $l=1.0$ cm,由于 B 是轴向的,且外部磁感应强度为零.故由环路定律得 Bl 等于 $\mu_0 I_m$,所以

$$I_m=0.3(10^{-2})/(4\pi\times10^{-7})=2390(\text{A/m})=23.9(\text{A/cm})$$

29.37 一条形磁铁的磁化(或安培)表面电流 I_m 与磁极强度有何关系?

解 ☞ 从题 29.35 知,$p=am$,对磁铁运用 $\boldsymbol{B}$ 的环路定律(图 29-7),并注意到 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$,$\boldsymbol{H}$ 对积分无贡献(无真实电流),得 $Ml=I_m$,所以 $p=aI_m/l$.

29.38 若一长 l 的条形磁铁被截成两半,其磁极强度 p 如何变化?

解 ☞ 从题 29.37 知,$p=i_0 a$,i_0 为单位长度上的表面磁化电流,因此 p 与长度 l 无关,所以每一部分的磁极强度仍为 p.

29.39 一袖珍指南针,针长 $l=3$ cm,横截面为矩形,其宽度 w 和厚度 t 远小于 l.当针受到轻微扰动时,它在平衡位置附近作 $\nu=2$ Hz 的振动.设地球磁场水平分量 $B_h=5\times10^{-5}$T,求针表面环绕的安培表面电流 i_a,针密度 $\rho=8\times10^3\ \text{kg/m}^3$.

解 ☞ 将指南针看成绕轴转动的扭摆,针在摆动时受回复力矩 $T=mB_h\sin\theta\approx mB_h\theta$,$m$ 是针的磁矩,θ 是 $\boldsymbol{B}_h$ 与 $\boldsymbol{m}$ 之间的夹角(设为很小).由于 m 和 B_h 都是常数,故力矩 T 满足胡克定律形式,扭转系数 $k=mB_h$.故振动频率 $\nu=\left(\frac{1}{2T}\right)(k/I)^{1/2}$,其中 k 是扭转系数,I 是绕针的中心的垂直轴的转动惯量,$I=\frac{1}{12}Ml^2$,M 是其质量,l 是长度.所以转动惯量 $I=\frac{1}{12}\rho wtl^3$.将 k 和 I 代入 ν 的表达式,解得

$$m=\frac{\pi^2\nu^2\rho wtl^3}{3B_h}$$

根据题 29.37 的结论

$$Ml=\frac{m}{wt}=\frac{\pi^2\nu^2\rho l^3}{3B_h}=\frac{\pi^2(2\text{Hz})^2(8\times10^3\ \text{kg/m}^3)(3\times10^{-2}\text{m})^3}{(3)(5\times10^{-5}\text{T})}=57\ \text{kA}$$

此电流很大.

29.40 什么是磁的库仑定律?磁荷产生的磁场公式是什么形式?

解 ☞ 设两个强度分别为 p_1、p_2(A·m)的磁极(亦称磁荷)相互作用,其相互作用力由下列磁的库仑定律给出:

$$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_1p_2}{r^2}=\frac{p_1p_2}{10^7r^2}$$

式中 r 是两磁极之间的距离(单位:m),强度为 p 的磁极在距其 r 处产生的磁感应强度为

$$B=\frac{p}{10^7r^2}\text{T}$$

如果 B 由多个磁极(磁荷)产生,合磁场 $\boldsymbol{B}$ 满足矢量叠加原理.

注意:磁的库仑定律仅给出磁铁外部磁场 $\boldsymbol{B}$,内部磁场需由安培表面电流确定.

29.41 一有铁芯的螺线管,实验测得其内部磁场 $B_{int}=0.60$ T,线圈有1000匝/m,通以1.0 A的电流.(a)没有铁芯时内部磁场 B_0 是多少?(b)磁化产生的磁场 B_d 是多少?(c) i_s/l,即单位长度上的安培表面电流是多少?

解 ☞ (a)根据题28.90,有

$$B_0=\mu_0 nI=(4\pi\times10^{-7})(1000)(1.0)\text{T}=1.26\text{ mT}$$

(b) $\boldsymbol{B}_d=\boldsymbol{B}_{int}-\boldsymbol{B}_0$ 由于 $\boldsymbol{B}_0$、$\boldsymbol{B}_{int}$平行,所以

$$B_d=B_{int}-B_0=0.60\text{ T}-1.26\times10^{-3}\text{T}=0.599\text{ T}$$

(c) 由 $B_0=\mu_0 nI$ 与安培电流类比,有 $B_d=(\mu_0 i_s)/l$,得

$$i_s/l=\frac{B_d}{\mu_0}=\frac{0.59}{(4\pi)(10^{-7})}=476(\text{kA/m})$$

29.42 参见题24.91.(a)如果无铁芯,为使 $B=0.60$ T,应通以多大电流?(b) 在已知条件下,相对磁导率 K_m 是多少?

解 ☞ (a) 因为 $B'_0=\mu_0 ni'=0.60$ T,所以

$$i'=\frac{B'_0}{\mu_0 n}i'=\frac{0.60}{4\pi\times10^{-7}\times10^3}=477\ (\text{A})$$

(b) $K_m=B_{int}/B_0$,而 $B_{int}=0.60$ T,$B_0=1.257\times10^{-3}$ T,所以 $K_m=477$.

29.43 一条形磁铁磁矩为5 A·m²,长为0.1 m,放置于一个匀强磁场中,外磁场 $B=0.4$ T,方向与磁铁长度方向的夹角为60°,求磁铁受到的力矩.

解 ☞ $\tau=Bm\sin\theta=0.4(5)\sin60°=2(0.866)=1.732(\text{N·m})$

29.44 求题29.43中的条形磁铁的磁极强度.

解 ☞ $m=pl,5=p(0.1),p=50$ A·m

29.45 两个相同的条形磁铁放置在一条直线上,N极相距60 mm,若斥力为0.2 N,每个磁铁的磁极强度是多少?

解 ☞ 设磁极强度为 p,则

$$F=\frac{p^2}{10^7r^2},\quad 0.2=\frac{p^2}{10^7(0.06^2)},\quad p_2=(2\times10^6)(0.06)^2,\quad p=85\text{ A·m}$$

29.46 一条形磁铁的两个磁极强度为20 A·m,相距25 cm,求距两极25 cm远处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向.

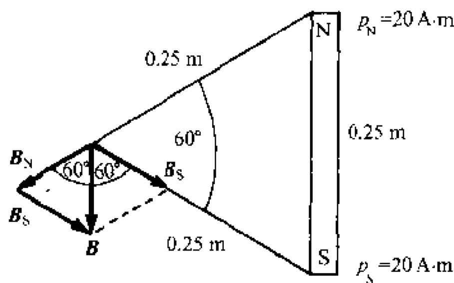


图 29-8

解 ☞ 如图29-8所示

$$B_N=\frac{p_N}{10^7r^2}=\frac{20}{10^7(0.25)^2}=3.2\times10^{-5}(\text{T})$$

$$B_S=\frac{p_S}{10^7r^2}=\frac{20}{10^7(0.25)^2}=3.2\times10^{-5}(\text{T})$$

矢量 $\boldsymbol{B}_N$、$\boldsymbol{B}_S$和 $\boldsymbol{B}$ 构成等边三角形的三条边,所以合磁场 $B=3.0\times10^{-5}$T,其方向与磁铁的轴平行且远离N极.

29.47 一长15 cm的磁铁磁极强度为250 A·m,放在一桌上,求在 N 极正上方20 cm处的磁感应强度 B(图29-9).

解 ☞ 磁场计算如下:

$$B_N=\frac{p_N}{10^7r^2}=\frac{250}{10^7(0.2)^2}=625(\mu\text{T}),\quad B_S=\frac{p_S}{10^7r^2}=\frac{250}{10^7(0.25)^2}=400(\mu\text{T})$$

B_s 的垂直分量为 $B_s\cos\theta=320\ \mu T$,B_s 的水平分量为$B_s\sin\theta=240\mu$T,垂直方向的总磁场为625－320

= 305 (μT),而水平方向的总磁场为 240 μT.垂直分量与水平分量叠加得 B 为 $\sqrt{305^2+240^2}=390$ (μT)

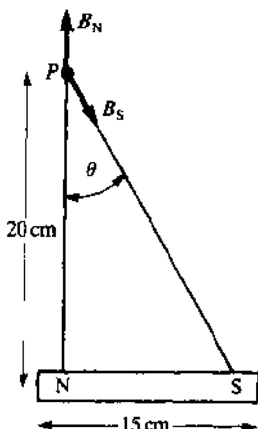


图 29-9

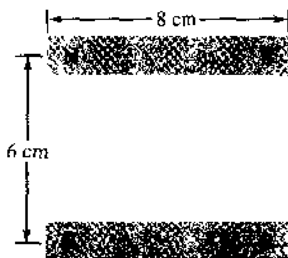


图 29-10

29.48 两个长为 8 cm 的小磁铁,磁极强度均为 60 A·m,当它们被固定住不能旋转时,一个磁铁能在另一磁铁上方 6 cm 高处悬浮,求下面磁铁作用在上面磁铁上的力(此即上面磁铁的重量).

解 ☞ $F_{NN}=\kappa\frac{p_1p_2}{r^2}=10^{-7}\frac{(60)(60)}{(0.06)^2}=0.100(\text{N})$

$$F_{NS}=10^{-7}\frac{(60)(60)}{(0.1)^2}=0.036(\text{N})$$

类上有 $F_{SS}=0.100$ N, $F_{SN}=0.036$ N. F_{NS}的垂直分量是(0.036)(0.6) = 0.0216(N),水平分量是(0.036)(0.8) = 0.0288(N). F_{SN}的水平分量恰与 F_{NS}的水平分量平衡,若取向上方的力为正,上面磁铁受到的垂直向上的力为

$$F=0.100+0.100-0.0216-0.0216=0.1568(\text{N})$$

29.49 一磁铁的磁极强度为 50 A·m,将其放置于与地磁场($B=20\mu$T)垂直的方向,受到 60 μN·m 的力矩.求磁铁的磁矩和两极间距离,若将磁铁旋转至与地磁场成 53.1°(sin53.1° = 0.8),所受力矩变为多少?

解 ☞ 令 m 代表磁矩,则

$$\tau=mB\sin(\boldsymbol{m},\boldsymbol{B}),\quad 60\mu\text{N}\cdot\text{m}=m(20\mu\text{T})1$$

所以,$m=3$ A·m², 又 $m=pl$; $l=\left(\frac{3}{50}\right)$ m = 60 mm 在 53.1°处, $\tau=(3)(20\times10^{-6})\sin53.1°=48$ (μN·m)

29.50 在子午线处,若要使一磁铁的轴保持与地磁场之间的夹角为 50°,需加多大的外力矩?已知磁铁的长度为 125 mm,磁极强度 40 A·m,子午线处的地磁场的水平分量是 20 μT.

解 ☞ 磁矩 $m=pl$,所以 $\tau=mB\sin\theta=(40\times0.125)(20\times10^{-6})(\sin50°)=76.6(\mu\text{N}\cdot\text{m})$

29.51 一条形磁铁的磁极强度为 12 A·m,其磁矩 $m=0.96$ A·m²,该磁铁垂直地磁场放置,地磁场水平分量为 25 μT.(a)求该磁铁所受磁力矩,(b)设 P 点距磁铁的 N 极 0.2 m 处(见图 29-11),求 P 点的磁感应强度水平分量的大小.

解 ☞ (a) $\tau=mB\sin\theta=(0.96)(25\times10^{-6})(1)=24(\mu\text{N}\cdot\text{m})$. (b) $m=pl$, $0.96=12\ l$, $l=80$ mm. 地磁场 $B_e=25$ μT(北).磁铁产生的场

$$B_m=10^{-7}\frac{p_N}{r_N^2}-10^{-7}\frac{p_S}{r_S^2}=10^{-7}\frac{12}{0.2^2}-10^{-7}\frac{12}{0.28^2}$$

$$=10^{-7}(300-153.06)=14.69(\mu\text{T})$$

合磁场 $B=\sqrt{25^2+14.96^2}=29.0(\mu T)$

29.52 两磁极强度分别为 50 和 90 A·m，两极在空气中相距多远时吸引力为 1 mN?

解 ☞ 两磁极必须极性相反，解 $F=(10^{-7})[(p_1p_2)/r^2]$，得 $r=0.671$ m.

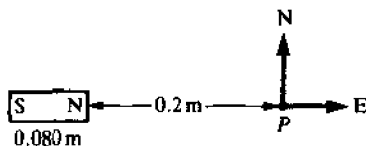


图 29-11

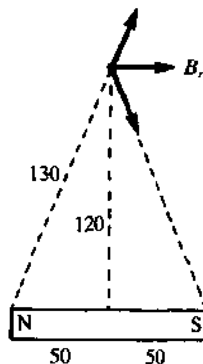


图 29-12

29.53 一磁铁长 100 mm，磁极强度 40 A·m，求其中垂线上方 120 mm 处磁感应强度.

解 ☞ 见图 29-12.

$$120^2+50^2=1690°,\quad \sqrt{16900}=130\ (\text{mm})$$

F_N 与 N_S 的垂直分量抵消，水平分量相加

$$B_N=B_S=\frac{(10^{-7})(40)}{0.13^2},\quad B_r=\frac{4\times10^{-6}}{1.69\times10^{-2}}(2)\frac{5}{13}=182\ (\mu T)$$

方向与磁铁平行，从 N 指向 S.

29.54 一 40 g 的钴钢棒水平放置在另一相同的棒上，两棒均被同样磁化，上方磁体悬浮(见图 29-10)，与下方磁体相距 9 mm，求每根棒每一端的磁极强度.(提示：设棒很长，只有最靠近的极间有相互作用.)

解 ☞ 平衡时

$$F=(0.040)(9.8)=2\frac{p^2\times10^{-7}}{(9\times10^{-3})^2},\quad p^2=\frac{(0.392)(81\times10^{-6})}{2\times10^{-7}}=158.8$$

$$p=12.6\ \text{A}\cdot\text{m}$$

29.55 两条形磁铁相向放置，一磁铁长 125 mm，磁极强度为 80 A·m，另一磁铁磁极强度为 160 A·m，其磁矩为 12 A·m²，求其相互间吸引力.设一磁铁的 N 极距另一磁铁的 S 极 45 mm.

解 ☞ $m_2=p_2l_2$，$1_2=(160)l_2$，$l_2=0.075$ m.所以情形如图 29-13 所示.

$$F_{SS}=10^{-7}\frac{(80)(160)}{0.17^2}=44.3(\text{mN})(\text{排斥力})$$

$$F_{NN}=10^{-7}\frac{(80)(160)}{0.12^2}=88.9(\text{mN})(\text{排斥力})$$

$$F_{S_1N_2}=10^{-7}\frac{(80)(160)}{0.245^2}=21.32(\text{mN})(\text{吸引力})$$

$$F_{S_2N_1}=10^{-7}\frac{(80)(160)}{0.045^2}=632(\text{mN})(\text{吸引力})$$

合力 $F=632+21.32-44.3-88.9=520$ (mN)(吸引力)

29.56 一试探小磁铁，磁极强度为 75 A·m，长度为 25 mm，将其放在一通电的圆环的中央，环的半径 $a=375$ mm，环中电流为 12.5 A.求每个磁极受到的力.若磁铁的轴与磁场垂直，求其受到的力矩.(假设磁铁所在范围内的磁场是均匀的.)

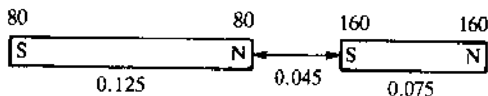


图 29-13

解 ☞ 设磁铁磁极强度不受外场影响,由题 28.91,圆环在其中心产生的磁场为

$$B = \frac{2\pi I}{10^7 a} = \frac{(2\pi)(12.5)}{(10^7)(0.375)} = 2.094 \times 10^{-5}(\mathrm{T})$$

因为磁铁远小于圆环

$$F = Bp = (2.094 \times 10^{-5})(75) = 1.57(\mathrm{mN})$$

每个磁极受到的力矩大小

$$\tau = Fl = (1.57 \times 10^{-3})(0.025) = 39(\mu\mathrm{N \cdot m})$$

29.57 一条形磁铁长 128 mm,磁极强度为 64 A·m,求此磁铁 S 极上方 96 mm 处的磁感应强度.

解 ☞ 如图 29-14,

$$B_S = \frac{(10^{-7})(64)}{0.096^2} = 694.4(\mu\mathrm{T}), \quad B_N = \frac{(10^{-7})(64)}{0.16^2} = 250(\mu\mathrm{T})$$

$$(B_N)_x = 0.8\ B_N = 200\ \mu\mathrm{T}, \quad (B_N)_y = 0.6\ B_N = 150\ \mu\mathrm{T}, B_x = 200\ \mu\mathrm{T}$$

$$B_y = -694.4 + 150 = -544.4(\mu\mathrm{T}), B = \sqrt{200^2 + 544^2} = 580\ (\mu\mathrm{T})$$

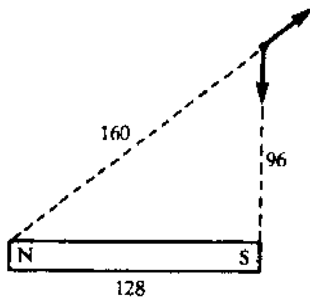


图 29-14

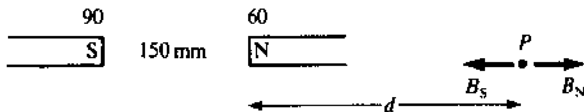


图 29-15

29.58 一强度为 60 A·m 的 N 极放置在另一强度为 90 A·m 的 S 极的一侧,两者相距 150 mm,求离 N 极多远处合磁场为零?

解 ☞ 情形如图 29-15 所示,忽略其它磁极的作用,得

$$\frac{60}{d^2} = \frac{90}{(d + 0.15)^2}, \quad 2(d^2 + 0.30d + 0.0225) = 3d^2$$

$$d^2 - 0.60d - 0.0450 = 0$$

$$d = \frac{0.6 \pm \sqrt{0.36 + 0.18}}{2} = \frac{0.6 \pm 0.7348}{2}(\text{取} + \text{号}) = 0.6674(\mathrm{m})$$

29.59 一条形磁铁 75 mm 长,水平放置,磁极强度为 20 A·m,方向与地磁场方向成直角,其 N 极朝西,求在 N 极西侧 225 mm 处的磁感应强度.地磁场的水平分量为 20 μT.

解 ☞ 如图 29-16

$$B_N = 10^{-7}\frac{20}{0.225^2} = 39.51(\mu\mathrm{T})(\text{西}),$$

$$B_S = 10^{-7}\frac{20}{0.3^2} = 22.22(\mu\mathrm{T})(\text{东})$$

磁铁磁场 $B_{mag} = 39.51 - 22.22 = 17.29(\mu\mathrm{T})$(西),合磁场

$$B = \sqrt{20^2 + 17.29^2} = 26.4(\mu T)$$

$\theta = 49.2°$，西偏北.

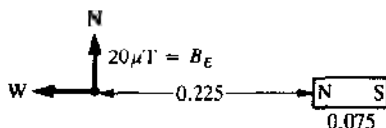


图 29-16

29.60　一磁铁的两磁极强度为 40 A·m，相距 25 mm，放置在一个螺线管内部的匀强磁场中，且与磁场方向成一角度 $\theta = 90°$，螺线管有 600 匝，通有电流 3.5 A. 求磁铁所受力矩.

解　☞ 如题 29.56 一样，忽略外磁场对磁极强度的影响，磁铁的磁矩为

$$m = pl = (40\ \mathrm{A \cdot m})(0.025\ \mathrm{m}) = 1\ \mathrm{A \cdot m^2}$$

对螺线管，有

$$B = \frac{4\pi nI}{10^7} = \frac{4\pi}{10^7}\frac{600}{0.4}3.5 = 6.60(\mathrm{mT})$$

所以

$$\tau = m B\sin\theta = (1\ \mathrm{A \cdot m^2})(6.60\ \mathrm{mT})(1) = 6.60\ \mathrm{mN \cdot m}$$

29.61　一磁铁两极强度为 19 A·m，相距 95 mm，求距两极点分别为 76 mm 和 57 mm 处的磁感应强度(提示：57∶76∶95 = 3∶4∶5).

解　☞ $B_1 = 10^{-7}\dfrac{19}{0.076^2} = 328.9\ (\mu T)$，　$B_2 = 10^{-7}\dfrac{19}{0.057^2} = 584.8\ (\mu T)$

$$B = \sqrt{328.9^2 + 584.8^2} = 671(\mu T)$$

(见图 29-17).

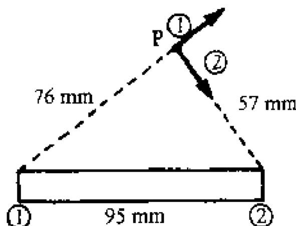


图 29-17

第三十章　感应电动势；发电机和电动机

30.1　磁通量的变化；法拉第定律；楞次定律

30.1　叙述楞次定律.它与能量守恒关系是什么？

解　☞ 楞次定律可以叙述为：感应电流总是通过它的磁场反抗产生它的磁通量的变化.换句话说，一个线圈中的感应磁通量总是反抗线圈中的磁通量的变化.或者说磁场的变化总是受到感应电动势的反抗.楞次定律可以由能量守恒定律很自然地推出；如果它不正确，那么感应磁场加到原来的磁场中去，这样增加后的磁场又会在线圈中感应产生更大电流——很显然违背了能量守恒定律.

30.2　说明 $\Delta\Phi_m/\Delta t$ 和 V 的量纲是相同的.

解　☞ 在国际标准单位制中，B 的单位是特斯拉，且 $1T=1N\cdot s/C\cdot m=1V\cdot s/m^2$（因为 $1N/C=1V/m$），所以 Φ_m = 感应磁场的磁感应强度×面积的单位是 V·s，因此 $\Delta\phi_m/\Delta t$ 单位是 V.

根据法拉第电磁感应定律，感生电动势的单位为伏(V)，但应当清楚地知道，电动势没有与之相关的势函数，因为经一闭合回路，与电动势相关的非静电力做功不为零.

30.3　如图 30-1，磁感应强度为 0.2 T，方向与 x 同向，求盒子各个面上的磁通量.

解　☞ 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于一给定盒面且向外的单位矢量，A 为这一盒面的面积.那么通过这个面向外的磁通量为 $\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\cdot A=BA\cos\theta$，这里的 θ 是 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

很明显，盒子的两个侧面（$\boldsymbol{n}$ 在 $\pm z$ 方向）和底面（$\boldsymbol{n}$ 在 $-y$ 方向上）上的 $\Phi=0$，通过前后两个面的 $\boldsymbol{n}$ 分别与 $+x$ 和 $-x$ 同向，所以

$\Phi_{前}=(0.2T)(40\times10^{-4}m^2)(1)=0.8$ mWb

$\Phi_{后}=(0.2T)\times(90\times10^{-4}m^2)\times(-1)$

$=-1.8$ mWb（负号表示磁通量由外向里）

对上表面而言，$\theta=60°$，$\Phi=(0.2T)\times(100\times10^{-4}m^2)\times\left(\frac{1}{2}\right)=1.0$ mWb.

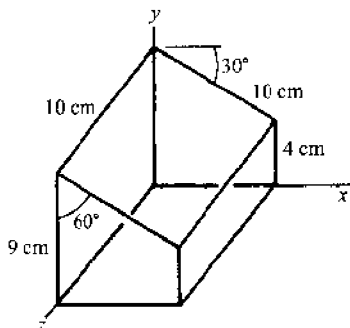


图 30-1

30.4　如图 30-2，一个四分之一圆线圈，面积为 15 cm²，有一磁场，大小为 $B=0.16T$，与 $+x$ 同向，求出线圈在如图所示的各个方位时通过它的磁通量.

解　☞ 我们知道 $\Phi=B_{\perp}A$，所以(a) $\Phi=B_{\perp}A=BA=(0.16T)\times(15\times10^{-4}m^2)=240\mu Wb$.(b) $\Phi=(B\cos20°)A=(2.4\times10^{-4}Wb)(\cos20°)=226\mu Wb$.(c) $\Phi=(B\sin20°)\cdot A=(2.4\times10^{-4}Wb)(\sin20°)=82\mu Wb$.

30.5　一线圈放在 $\boldsymbol{B}=0.0200\boldsymbol{i}T$ 的磁场中.如果线圈面积矢量 $\boldsymbol{A}=30\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}+23\boldsymbol{k}cm^2$，求通过它的磁通量；$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 之间夹角多大？

解　☞ $\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=(0.0200\boldsymbol{i}T)(30\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}+23\boldsymbol{k}10^{-4}(m^2))=60\ \mu Wb$.从标量角度看，$\Phi=BA\cos\theta$，其中 $B=0.0200$ T，$A=(30^2+16^2+23^2)^{\frac{1}{2}}=41.0(cm^2)$，那么 $6.0\times10^{-5}Wb=(0.02T)(41\times10^{-4}m^2)\cdot\cos\theta$，所以 $\cos\theta=0.73$，或 $\theta=43°$.

30.6　某一区域的磁场为 $\boldsymbol{B}=40\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{k}$(G)，如果一个面积为 50 cm² 的线圈放在这一区域中，且与 xy 平面平行，通过它的磁通量为多大？

解　☞ $A=5.0\times10^{-4}\boldsymbol{k}(m^2)$，$\boldsymbol{B}=40\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{k}10^{-4}$(T)，所以 $\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=-900$ nWb.

30.7　一个圆形线圈 N 匝，半径为 a，平放在桌子上，一条导线从它上面横穿而过，正好把它

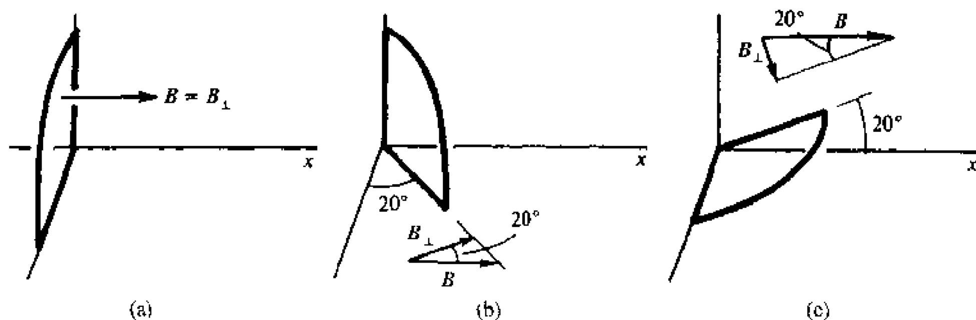


图 30-2

分成对称两边,导线中电流 $i=i_0\sin\omega t$,求出线圈中的感应电动势.若把导线垂直于桌面放置,再求感应电动势.

解 ☞ 两个情况下答案均为 0. 第一种情况,有多少磁场线从圆形线圈平面穿入就有多少根磁场线穿出.第二种情况下,磁场线在线圈平面内,不会穿过去.

30.8 一条长直导线带有大小为 $i=i_0\sin\omega t$ 的电流,穿过一螺线管轴线.螺线管每米 n 匝,半径为 a.求出导线中电流在螺线管中产生的感应电动势.

解 ☞ 由电流产生的磁场 $\boldsymbol{B}$,方向与螺线管横截面的法线矢量垂直,所以 $\Phi=B\cdot A=0$,因此感应电动势为 0.

30.9 一个带铁芯的螺线管产生 900 μWb 的磁通量.如果把铁芯移走,线圈中原来的电流产生 0.5 μWb 的磁通量,问铁芯的相对磁导率为多少?

解 ☞ $\Phi=BA$,所以 $K_m=\frac{B_l}{B_A}=\frac{\Phi_l}{\Phi_A}=\frac{900}{0.5}=1800$

30.10 一螺线管长 600 mm,有 5000 匝,它带有一铁芯,铁芯半径 7.5 mm,当电流为 3 A 时,问通过螺线管中磁通量多大? 铁芯相对磁导率为 300.

解 ☞ 对一螺线管而言,$B=K_m\mu_0 nI$,其中 n 为单位长度中匝数,所以

$$\Phi=BA=K_m\mu_0 nIA=300(4\pi\times10^{-7})\frac{5000}{0.60}(3)(56.2\pi\times10^{-6})=1.66\ \text{mWb}$$

30.11 如图 30-3 所示,一外部磁场通过一个 10 匝的线圈,半径为 50 mm,磁场的垂直分量在 3 s 内由 0 变到 18 T.若线圈电阻为 2Ω,感应电流为多大? 电流方向如何?

解 ☞ 最初的磁通量 $\Phi_1=0$,最后的磁通量 Φ_2 为

$$\Phi_2=NB_nA=(10)(18\text{T})(25\pi\times10^{-4}\text{m}^2)=1.41\ \text{Wb}$$

所以 $\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1=1.41$ Wb,感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-\frac{1.41\text{Wb}}{3\text{s}}=-0.47\text{V} \tag{1}$$

所以,感应电流为 $I_i=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{0.47\text{V}}{2\Omega}=0.235\text{A}$

(1)式中的负号表明感应电动势产生电流形成的磁场反抗 $\boldsymbol{B}$ 的变化(如图 30-3).

30.12 一半径为 30 mm 的圆形线圈有 50 匝,一磁场方向垂直于线圈平面,设想磁感应强度在 2 ms 内由 0.10 T 变化到 0.35 T,求平均感应电动势.

解 ☞ 对每一圈而言,$\Delta\Phi=B_fA-B_iA=(0.25\text{T})(\pi r^2)=(0.25\text{T})\cdot\pi\cdot(0.030\text{m})^2=7.1\times10^{-4}\text{Wb}$.

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=(50)\frac{7.1\times10^{-4}\text{Wb}}{2\times10^{-3}\text{s}}=17.7\text{V}$$

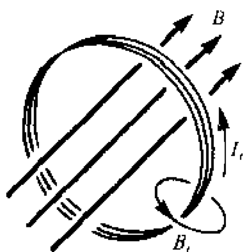


图 30-3

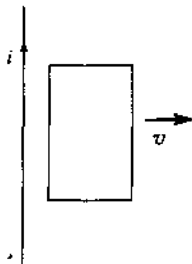


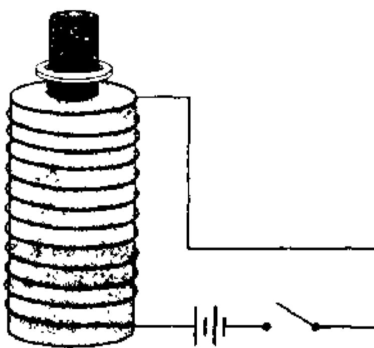
图 30-4

30.13 如图 30-4 所示,一矩形线圈放在一直导线右边,线圈中有恒定电流 i,方向向上,当线圈远离导线时,线圈中感应电流方向是顺时针还是逆时针?

解 ☞ 如图 30-4 所示,线圈中的磁场方向垂直纸面向里,当线圈被向外拉时,通过线圈的磁通量在减小.根据楞次定律,感应电流产生的磁场要反抗原磁场的减小,所以它也垂直向里(线圈内部),所以感应电流一定是顺时针方向的.

30.14 如图 30-5 所示,一个铝环套在凸出的电磁铁上,当回路闭合时,铝环向上跳出一段高度,请解释这一现象.

解 ☞ 回路闭合时,通过铝环的磁通量急剧增加,从而产生感应电流.根据楞次定律,铝环中的感应电流产生的磁场方向与螺线管中的方向相反,这就说明铝环中电流与线圈中电流方向相反.两个反向磁偶极子像两个磁性相反的磁极;它们互相排斥,使得铝环上跳.


图 30-5

30.15 一个摆由可绕轴旋转的棒组成,其下端有一金属环,摆在金属环所在平面内摆动.把环拉高,然后释放.当它摆到最低点时,给它加一与环所在平面垂直的磁场.当进入这一磁场后,它很快停下来,为什么?

解 ☞ 当金属环进入磁场时感应产生电流.根据楞次定律,磁场对电流的作用力反抗环的运动,正是这磁场的力量阻止了运动.宏观运动的动能转化为热能.注意,环的材料的导电性越好,运动就停止得越快,能量转换也越快.

30.16 对题 30.15 而言,如果环被切掉一块,重复实验,摆要摆几下后才停下来,请解释这一现象.

解 ☞ 如果环被切断,它便不可能有电流,所以没有磁力去阻止运动.摆要一直摆下去直到摩擦消耗了所有动能.

30.17 如图 30-6 所示,当电磁铁向左或向右移动时,线圈中会产生感应电动势,指出当电磁铁(a)向右和(b)向左移动时,电阻器中产生的感应电流方向.

解 ☞ (a)首先考虑左线圈,当电磁铁右移时,线圈中磁通量方向向左且减小,为抵消这一变化,线圈中感应电流产生的磁场方向向左.运用右手定则可知,通过电阻的电流一定由 B 到 A.现在考虑右线圈,当电磁铁右移时,线圈中磁通量也向左,但增加,为抵消这一变化,线圈中感应电流产生的磁场方向向右,运用右手定则可知,通过电阻的电流一定由 C 到 D.(b)这种情况与(a)正好相反,运用相同的推理,我们可知通过电阻的感应电流为从 A 到 B 和从 D 到 C.

30.18 如图 30-7 所示,磁铁中央固定,按图示旋转,求感应电流方向.

解 ☞ 此题与题 30.17 相似,除了右圈中的线反绕外.这里两个线圈中磁通量都减小,且方向向左(当磁铁从水平位置转到垂直位置时),所以两个线圈中的感应电流均产生向左的磁场,所以感应

电流从 B 流向 A 和从 C 流向 D.

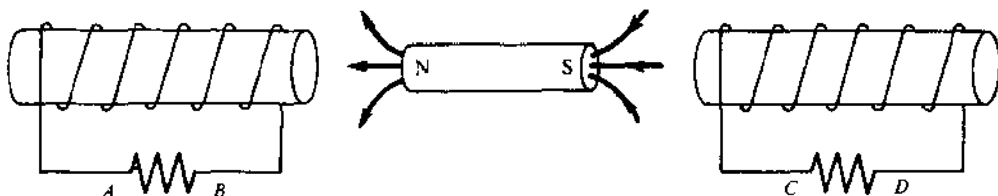


图 30-6

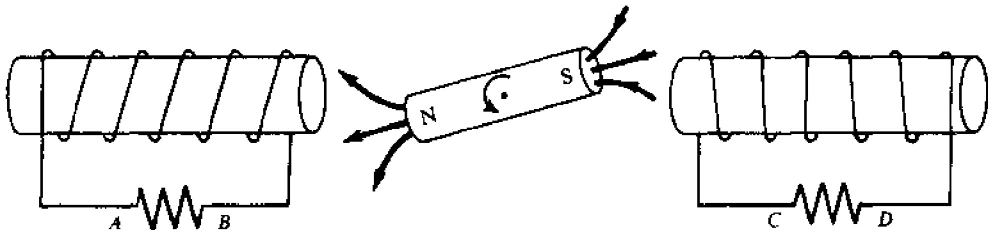


图 30-7

30.19 一个正方形线圈边长 75 mm,一大小为 0.8 T 的磁场垂直于线圈平面.(a)求通过线圈的磁通量,(b)如果线圈在 0.015 s 内转过 90°,且最后没有磁场通过,求转动过程中的平均感应电动势.

解 ☞ (a) $\Phi = BA\cos(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) = (0.8\ \text{Wb/m}^2)[(75\times10^{-3})^2\text{m}^2] = 4.5\ \text{mWb}$

(b) $|\mathscr{E}| = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dfrac{4.5\times10^{-3}\text{Wb}}{1.5\times10^{-2}\text{s}} = 0.3\ \text{V}$

30.20 通过一个 1000 匝线圈的磁通量在 0.01s 内由 0.5Wb 变为 0,确定线圈的感应电动势.

解 ☞ 应用法拉第定律可知,通过单匝的磁通量为 Φ,通过整个线圈磁通量为 $N\Phi$,

所以 $|\mathscr{E}| = N|\Delta\Phi/\Delta t| = [(1000)\times(0.5)]/(0.01) = 50(\text{V})$

30.21 一试验小线圈面积 125 mm²,50 匝,线圈放在一些圆柱形电磁铁之间,若在60 ms内,把线圈拉到无磁场的区域内,产生的平均感应电动势为 0.07V,问磁场强度多大? 原来通过每一单匝的磁通量为多少?

解 ☞ 我们设 Φ = 通过线圈的磁通量,Φ_0 = 通过每一单匝的磁通量.

$$0.07 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{(50)\times(125\times10^{-6})}{0.06}B,\quad B = \frac{42\times10^{-4}}{625\times10^{-5}} = 0.672(\text{T})$$

$$\Phi_0 = BA = (0.672\ \text{Wb/m}^2)(125\times10^{-6}\text{m}^2) = 84\ \mu\text{Wb}$$

30.22 题 30.10 中的螺线管,如果通过它的磁通量在 50 ms 内减少到 1 mWb.求出平均感应电动势.

解 ☞ 题 30.10 中,原来通过螺线管的磁通量为 1.66 mWb,由于它有 5000 匝,我们可以得到

$$N\Delta\Phi = (5\times10^3)\times(1.66\times10^{-3} - 1.00\times10^{-3}) = 3.3(\text{Wb})$$

$$|\mathscr{E}| = N|\Delta\Phi/\Delta t| = \frac{3.3\ \text{Wb}}{0.05\text{s}} = 66\text{V}$$

30.23 有一个 100 匝的线圈面积为 150 cm²,通过这一线圈的磁感应强度 B 在 0.1 s 内从 0 均匀变化到 0.001T,求感应电动势.

解 ☞ 根据法拉第定律:$\mathscr{E} = -[(N\Delta\Phi)/\Delta t]$

$$\mathscr{E} = -\frac{(150\times10^{-4})(100)(0.001-0.0)}{0.1} = -0.015\ (\text{V})$$

注意,这道题目中的感应电动势在 0.1 s 时间内是恒定的.

30.24 一个 50 匝的线圈半径为 8 mm,它放在一磁场中,$B=0.3T$.最初让通过它的磁通量最大,然后在 0.02s 内线圈转过一角度,使通过它的磁通量为 0,求在这一过程中的平均感应电动势.

解 ☞ $\mathscr{E}=-[(N\Delta\Phi)/\Delta t]$,其中 $\Delta\Phi=BA$,那么

$$\mathscr{E}=-[(50)(64\pi\times10^{-6}\text{m}^2)(0.00\text{T}-0.30\text{T})]/0.02\text{s}=0.15\text{V}$$

30.25 有一个 150 匝的线圈,面积为 150 cm^2,一大小为 0.001 T 的稳恒磁场垂直通过线圈.线圈绕一与磁场方向垂直的转轴在 0.1s 内转过 90°,求平均感应电动势.

解 ☞ $\mathscr{E}=-[(N\Delta\Phi)/\Delta t]$

$$\mathscr{E}=-\frac{(150\times10^{-4})(100)(0.000-0.001)}{0.1}=0.015(\text{V})$$

30.26 一个 50 匝的线圈在磁场附近时通过的磁通量为 310 μWb,在 0.02 s 内拉开一段距离后,磁通量变为 100 μWb,计算线圈内的平均感应电动势

解 ☞ $|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=50\cdot\frac{210\times10^{-6}\text{Wb}}{0.02\text{s}}=0.525\text{V}$

30.27 有一个 275 匝的线圈,面积为 0.024 m^2,它与地球磁场垂直.当它在 0.025 s 内转过 $\frac{1}{4}$ 圈时,与地磁场方向平行.如果地磁场密度为 80 μT,问平均感应电动势多大?每一匝原来的磁通量多大?

解 ☞ 根据法拉第定律,平均感应电动势为

$$\bar{\mathscr{E}}=\frac{(275)\cdot(0.024)(8\times10^{-5})}{0.025}=0.0211(\text{V})$$

$$\Phi=BA=(8\times10^{-5}\text{Wb/m}^2)(0.024m^2)=1.92\mu\text{Wb}$$

30.28 一感应线圈有 12000 匝,通过单匝的磁通量在 180 μs 内由 740 μWb 变为40 μWb,问感应电动势多大?

解 ☞ 感应电动势大小为

$$\mathscr{E}=\frac{(12000)(700\times10^{-6})\text{Wb}}{1.8\times10^{-4}\text{s}}=46.7\text{ kV}$$

30.29 通过一线圈的磁感应强度 B 由 1.4T 变为 0.1T,花了 0.21 ms,线圈的垂直面积开始时为 450 mm^2.问原来通过线圈的磁通量多大?如果线圈有 6000 匝,那么平均感应电动势多大?

解 ☞ $\Phi_0=BA=(1.4\text{Wb/m}^2)(450\times10^{-6}\text{m}^2)=630\mu\text{Wb}$

$$\bar{\mathscr{E}}=n\frac{\Delta\Phi_t}{t}=6000\times\frac{(1.4-0.1)(450\times10^{-6})}{2.1\times10^{-4}}=16.7(\text{kV})$$

30.2 动生电动势;感应电流和洛伦兹力

30.30 如图 30-8 所示,一长为 0.19 m 的导线以 11.5 m/s 的速度垂直通过 $B=0.003$ Wb/m^2 的磁场,求感应电动势.

解 ☞ 一个长为 l 的导线,以速率 v 运动时,每秒扫过的面积为 lv,每秒被切割的磁通量等于 BA/t 或 Blv,所以

$$\mathscr{E}=(0.003\text{ Wb/m}^2)(0.19\text{ m})(11.5\text{ m/s})=6.6\text{ mV}$$

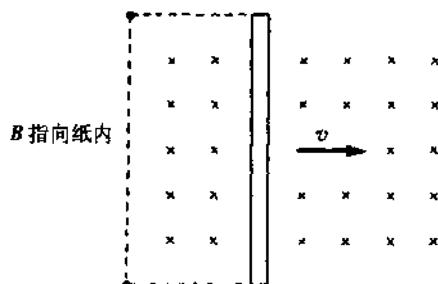


图 30-8

对上面所述情况,根据楞次定律,在一个假想回路中,感应电动势方向为逆时针,所以它从导线下方指向上方.

另解　每个电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,受到 $F=qvB$ 的力,由右手定则可知,对正电荷而言,F 方向向上.如果电荷可以沿导体自由移动 l,那么对单位正电荷做的功(电动势):$V=Fl/q=Blv$

注意,这与磁场对运动电荷不做功并不矛盾,因为电荷被某个力限制在导线内,正是这个力对运动电荷做了功.

30.31　在题 30.30 中,实际上没有闭合回路,那是什么阻止电子的流动呢?

解　☞ 这与开路中的电源十分相似,当导体两端积聚一定电荷后形成的电场力与洛仑兹力相抵消,电荷便不再流动.在题 30.30 中,导体上端为高电势点.

30.32　如图 30-9 所示,一长度为 L 的直导线以匀速 $\boldsymbol{v}$ 通过均匀的磁场 $\boldsymbol{B}$,求导线两端的电势差.

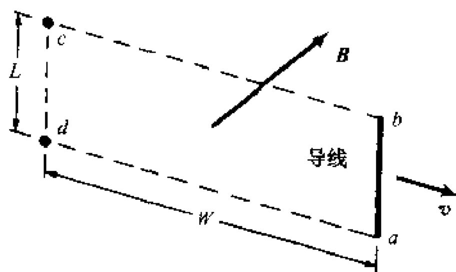


图 30-9

解　☞ 在图 30-9 中,设 $\boldsymbol{L}$ 是由 a 到 b 的矢量,$\boldsymbol{W}$ 是从 d 到 a 的矢量,所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{W}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{v}$,导线通过的面积可写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{L}$,切割的磁通量为

$$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{L})$$

由法拉第定律得(记住 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 为恒量)

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{B}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{L}\right)=-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{v})$$

30.33　一长为 1.1 m 的导线,以速率 7.0 m/s 运动,通过垂直它的均匀磁场,运动方向也垂直它本身,已知导线中产生的感应电动势为 3.5 V,求磁感应强度.

解　☞ 用题 30.30 中结果,或用题 30.32 中更一般的结果,

$\mathscr{E}=vBl$,　$3.5\,\mathrm{V}=(7\ \mathrm{m/s})(B)(1.1\ \mathrm{m})$,得 $B=0.455\ \mathrm{T}$.

30.34　一水平直导线长 0.8 m,它从上垂直落下,垂直通过大小为 1.1 T 的均匀磁场,下落速度为 5 m/s,磁场方向从东向西.求感应电动势;导线哪一端电势高?

解　☞ 根据题 30.30 中的讨论,得

$$\mathscr{E}=vBl=(5\mathrm{m/s})(1.1\mathrm{T})(0.8\mathrm{m})=4.4\mathrm{V}$$

北端电势高.

30.35　一汽车轴长 2.4 m.如果汽车向北开,经过某地时,地磁场竖直分量为 90 μT.轴两端电势差多大?哪个端点电势高?

解　☞ 因为被轴扫过的是一平面,只有地磁场竖直分量起作用.所以

$$\mathscr{E}=vBl=(30\mathrm{m/s})(9\times10^{-5}\mathrm{T})(2.4\mathrm{m})=6.48\mathrm{mV}$$

因为地磁场的垂直分量向下(北半球),所以轴的西端电势高.

30.36　一飞机以 300 m/s 的速度向南开,经过某地时,地磁场竖直分量为 80 μT,如果两个机翼尖端相距 25 m,求两尖端之间电势差.哪一个尖端电势高?

解　☞ 和题 30.35 一样,$\mathscr{E}=vBl=(300\mathrm{m/s})(8\times10^{-5}\mathrm{T})(25\mathrm{m})=0.6\mathrm{V}$.这次,东端电势高(在北半球).

30.37[c]　在图 30-10(a)中,一导线与一长直导线垂直,这导线以 $v=10$ m/s 的速率沿与长导线平行的方向运动,长导线中电流为 10 A.运动导线两端电势差多大?电势差的符号是什么?

解　☞ 各种量已在图 30-10(b)中标明,根据右手定则,电流产生的磁场垂直纸面向里,大小为 $B=(\mu i)/(2\pi r)$.由于 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,我们得到 $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}|=Bv$,为了平衡洛伦兹力,我们得一电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{opp}}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$.由图可知,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{opp}}$ 是从 A 指向 B 的,所以 A 点电势比 B 点电势高:$V_A>V_B$.我们可得

$$V_A - V_B = \int_{r_1}^{r_2} |E_{opp}(r)|\,dr = \int_{r_1}^{r_2} Bv\,dr = \frac{\mu_0 iv}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iv}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

把 $i = 10$ A, $v = 10$ m/s, $r_2/r_1 = (10.0\text{ cm})/(1.0\text{ cm}) = 10$ 代入上式,得

$$V_A - V_B = (2\times10^{-7})(10)(10)(\ln 10) = 46.1(\mu\text{V})$$

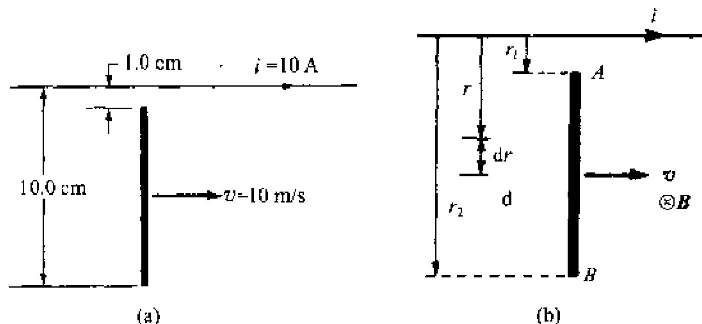


图 30-10

30.38 图 30-11 中,金属棒长 80 cm,绕 C 点以每秒 5 圈的转速匀速转动.磁场 $B = 0.3$ T,问它两端电势差多大?

解 ☞ 考虑一个假想的回路 $CADC$,它的面积和磁通量均随时间增大.在这回路中的感应电动势便是我们所求的电势差.

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{B\cdot\Delta A}{\Delta t}\times 1$$

只要 $\frac{1}{5}$ s, $CADC$ 所围面积便从 0 变到 πr^2,所以

$$|\mathscr{E}| = B\frac{\Delta A}{\Delta t} = B\frac{\pi r^2}{0.20\text{s}} = 3.0\text{V}$$

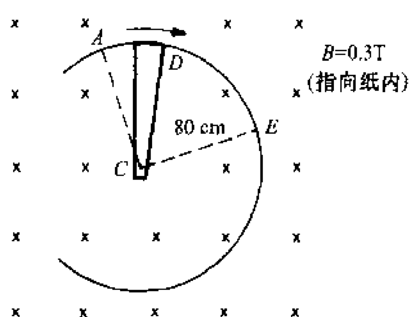


图 30-11

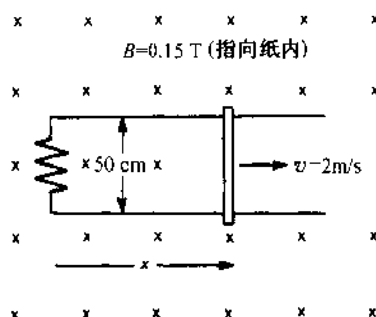


图 30-12

30.39 如图 30-12 所示,一金属棒放在平行双轨上构成一回路.磁场大小为 $B = 0.15$ T,方向与回路平面垂直.如果整个回路电阻为 3Ω,当要使棒以 2 m/s 的速度匀速运动时,应加多大外力?

解 ☞ 金属棒中感应电动势在回路中产生一逆时针方向电流.所以受到一向左的安培力,为了使棒匀速移动,外力必须平衡安培力.

方法一　棒中感应电动势为

$$|\mathscr{E}| = BLv = (0.15\text{T})(0.50\text{m})(2\text{m/s}) = 0.15\text{V}$$

$$I = \frac{|\mathscr{E}|}{R} = \frac{0.15\text{V}}{3\Omega} = 0.050\text{A}$$

从而可得 $F = ILB = (0.050\text{A})(0.50\text{m})(0.15\text{T}) = 3.75\times10^{-3}$N

方法二　和前面一样,棒中感应电动势为

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = (1)\times\frac{B\cdot\Delta A}{\Delta t} = BL\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} = BLv$$

接下来:机械功率 = 热功率

$$Fv = \frac{|\Delta q_1||\mathscr{E}|}{\Delta t} = I|\mathscr{E}| = \frac{|\mathscr{E}|^2}{R}$$

把 $\mathscr{E}$ 代入,求出

$$F = \frac{B^2L^2v}{R} = \frac{(0.15\text{T})^2(0.50\text{m})^2(2\text{m/s})}{3\Omega} = 3.75\times10^{-3}\text{N}$$

30.40　一导体棒,长为 l,质量为 m,放在一双平行导轨上,导轨之间连一电阻,如图 30-13 所示.有一大小为 B 的均匀磁场,垂直纸面向外.导体棒和导轨电阻不计.证明棒下落后在重力作用下最终的恒定速率为 $(mgR)/(B^2l^2)$.

证　☞ 当导体棒下落时,回路中磁通量增加,由于 $V = -\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t$,所以感应电动势是负的(顺时针),大小为 Blv,其中 v 为导体棒的下落速度.故电流为 $i = E/R = -(B\cdot l\cdot v)/R$,负号表示顺时针电流,即电流从棒右流向左,所以安培力为

$$F_m = ilB = \frac{B^2l^2v}{R} \tag{1}$$

方向向上.当导体棒达到稳定速度后,它上面合力为 0,所以安培力必须与重力相等

$$F_m = mg \tag{2}$$

由(1)式和(2)式联立,得稳定速率

$v_t = (mgR)/(B^2l^2)$,故命题获证.

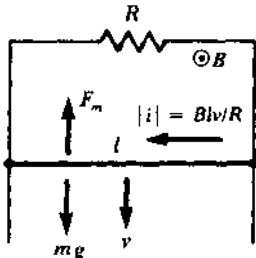


图 30-13

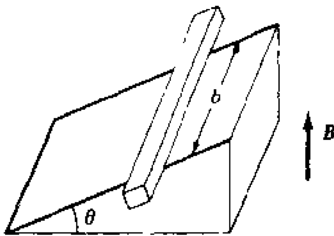


图 30-14

30.41　如图 30-14 所示,一导体棒质量为 m,近似长度为 b,电阻为 R,它从一斜面下滑,恰与U型导线构成回路,在竖直磁场 B 中,导体棒最后速率为多少?

解　☞ 感应电动势 $\mathscr{E} = Blv\cos\theta$,感应电流为 $I = \mathscr{E}/R$,v 为下滑速度,安培力 $F = IbB$,方向向右,平衡时,其沿斜面向上分力与重力沿斜面向下的分力平衡,即

$$IbB\cos\theta = (b^2B^2v\cos^2\theta)/R = mg\sin\theta$$

所以

$$v = (mgR\sin\theta)/(bB\cos\theta)^2$$

30.42　如图 30-14 所示,如果摩擦力为 0,回路电阻无限大.$\boldsymbol{B}$ 竖直向上,找出导体棒两端电势差与时间的函数关系.从上往下看,感应电动势逆时针还是顺时针?

解　☞ 首先找出每时刻穿过回路的磁通量,设斜面底部到导体棒距离为 x,$\Phi = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = Bbx\cos\theta$,则感应电动势为 $(Bb\cos\theta)(-\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$.为了求 x 如何变化,利用关系:导体棒沿斜面下滑加速率 $a = -g\sin\theta$,$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v = at = -gt\sin\theta$,感应电动势

$$\text{emf} = +Bbgt\sin\theta\cos\theta$$

从上往下看,方向是逆时针.

30.43　如图 30-15(a)所示,磁场沿 x 轴正方向,$B = 0.20$ T,线圈面积为 5 cm²,以 CD 为轴旋转,A 点转向 x 正半轴.如果 AE 线段在 0.2 s 内转过 50°,(a)通过线圈磁通量变化多少?(b)平均感应电动势多大? (c)感应电流是从 A 流向 C 还是从 C 流向 A?

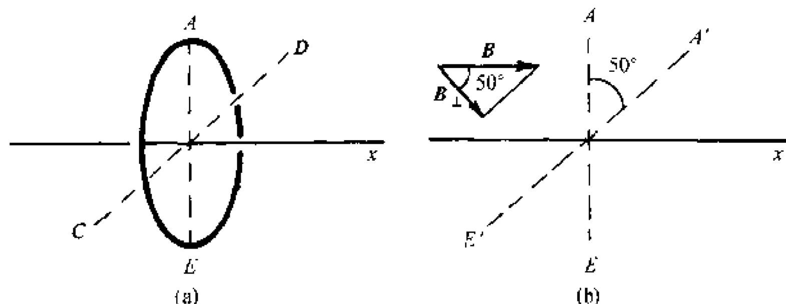


图 30-15

解 ☞ (a)最初磁通量 $=B_\perp A=BA=(0.20\text{T})(5\times10^{-4}\text{m}^2)=100\ \mu\text{Wb}$,最终磁通量 $=(B\cos50°)A=(1\times10^{-4}\text{Wb})\cos50°=64\ \mu\text{Wb}$

$$\Delta\Phi=0.64\times10^{-4}\text{Wb}-1\times10^{-4}\text{Wb}=-36\ \mu\text{Wb}$$

(b) $|\mathscr{E}|=N\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=(1)\times\dfrac{0.36\times10^{-4}\text{Wb}}{0.2\text{s}}=180\ \mu\text{V}$

(c)从左到右穿过线圈的磁通量减小,故感应电流产生的磁通量也应从左到右,根据右手定则,电流从 A 流到 C.

另一方面,要求产生一力矩,驱使它返回原位置,同样由右手定则,可以得到感应电流从 A 流到 C.

30.44[c] 一线圈 N 匝,面积为 A,它绕直径以频率 f 旋转,一外加磁场垂直转轴,假设当 $t=0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同向,求时刻 t 的磁感应强度和感应电动势.

解 ☞ $\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=BA\cos\theta=BA\cos2\pi ft$

$\mathscr{E}=-[(N\mathrm{d}\Phi)/\mathrm{d}t]=2\pi fNBA\sin2\pi ft$

30.45 如图 30-16 所示,一半径为 r 的线圈有一平行于 Z 轴的转轴,所以线圈平面垂直 xy 平面,当 $t=0$ 时,线圈平面在 yz 平面内,让线圈以角速度 ω_L 旋转,外加一均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{k})$,计算通过线圈的磁通量 $\Phi_m(t)$ 和线圈内的感应电动势.

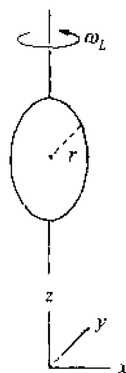


图 30-16

解 ☞ 由于磁场 z 方向上分量对线圈不起作用,所以我们又回到题 30.44 中去,$N=1$,$A=\pi r^2$,$f=\omega_L/2\pi$,$\boldsymbol{B}=B\cos\alpha\boldsymbol{i}$,所以

$\Phi(t)=\pi r^2B\cos\alpha\cos\omega_Lt$, $\mathscr{E}(t)=\pi r^2\omega_LB\cos\alpha\sin\omega_Lt$

30.46 如果题 30.44 中的线圈有一(大)电阻 R,要让线圈匀速转动应加多大力矩?

解 ☞ 线圈中感应电流为 $I=\dfrac{\mathscr{E}}{R}=\dfrac{2\pi fNBA}{R}\sin2\pi ft$,产生一磁矩 $\mu=IA$,所以磁场产生的力矩为

$\tau_B=\mu B\sin\theta=IAB\sin2\pi ft=(2\pi fNB^2A^2/R)\sin^22\pi ft$

所以应外加一等大小但反向的力矩.

30.47 如图 30-17 所示,要测两个磁铁间磁场往往通过测量一个线圈从两磁铁之间以恒速 $v=30\text{m/s}$ 拉出时产生的感应电动势的大小来测定,试画出感应电动势与时间的关系.不考虑磁铁边缘效应,用 B 表示出感应电动势.

解 ☞ 当通过线圈的磁通量变化时,感应电势不为 0(如图 30-18),当前面的边通过磁场时,$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=B(\mathrm{d}A/\mathrm{d}t)=Bav=0.60B$,经历时间 $\Delta t=0.01/30=3.3\times10^{-4}\text{s}$;当后面的边通过时,磁通量的变化量相等但相反,这时感应电动势如图 30-18 所示.

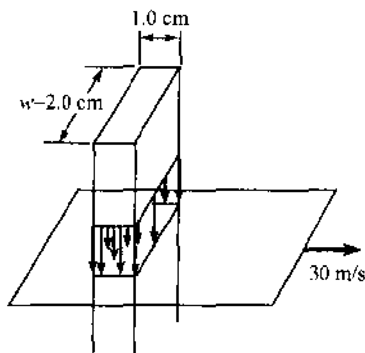


图 30-17

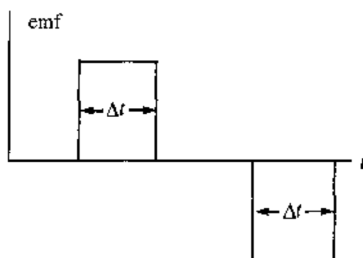


图 30-18

30.48　如图 30-19,一个 N 匝线圈以恒定速率 v 进入一大小为 B 的恒定磁场,如果线圈电阻为 R,求出在图示位置时,作用于线圈上的力.这力对线圈有何作用?

解　如图所示,感应电动势 $-N(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t)=NavB$(逆时针),产生一电流 $(NavB)/R$,所以线圈右边受到 $NBIa=(N^2a^2vB^2)/R$ 的力,这个力阻止它运动.(与题 30.15 比较.)

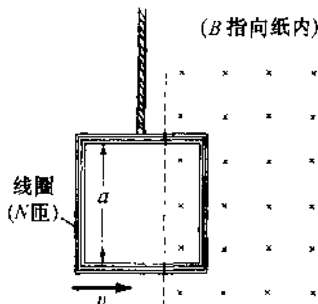


图 30-19

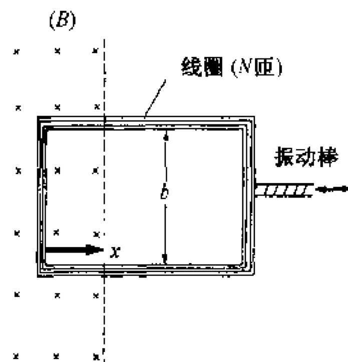


图 30-20

30.49　磁传感器可以用来监测微小振动.如图 30-20 所示,一振动的棒固定在一线圈上,线圈一部分在磁场 B 中,证明棒尾端速度 $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$ 与感应电动势关系为 $\mathscr{E}=NBb(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$.

证　我们假设线圈不产生形变,通过它的磁通量为 $-Bbx$,所以 $\mathscr{E}=-N(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t)=NBb(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$

30.50　如图 30-20 中线圈电阻为 R,(a)当它向右以速率 v 运动时,线圈内的感应电流多大?(b)要维持它匀速运动,应外加多大力?(c)外力的功率多大?(d)比较(c)的值和线圈中损失 I^2R.

解　(a)利用题 30.49 的结果　$I=\mathscr{E}/R=(NBbv)/R$

(b)作用力　$NIbB=(N^2B^2b^2v)/R$

(c)功率 $=Fv=IbBv=(N^2B^2b^2v^2)/R$

(d)两者相等.

30.3　交变磁场和感应电场

30.51[c]　一线圈面积为 A,电阻为 R,水平放置,外加一磁场 $B=B_x=0.2\cos\omega t T$,如果线圈平面法线矢量与 x 轴夹角为 α,求感应电动势和感应电流.

解　$\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=B_xA\cos\alpha$,　$\mathscr{E}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=0.2A\omega\sin\omega t\cos\alpha$, $I=\mathscr{E}/R$

注意 $\mathscr{E}$ 与题 30.45 中的类似.

30.52[c]　一磁场与一个面积为 $3.0\ \mathrm{cm}^2$,40 匝的线圈平面垂直,磁场随时间的变化为 $B=250-$

$0.60t$mT,求线圈中感应电动势.

解 ☞ $\Phi=B\cdot A=(750-1.80t)\times10^{-7}$Wb

$\mathscr{E}=-N(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t)=40(1.80\times10^{-7})=7.2(\mu\mathrm{V})$

30.53[c] 一磁场 B 垂直于一面积为 7.0 cm^2, 50 匝的线圈, 线圈两端接一 30Ω 的电阻, 如果 $B=75\mathrm{e}^{-200t}$G, 求通过电阻的电流.

解 ☞ 我们知道 $10^4\mathrm{G}=1\mathrm{Wb/m^2}$. 磁通量为 $7.0(75\mathrm{e}^{-200t})\times10^{-8}$Wb, 所以

$$\mathscr{E}=-50(525)(-200)\mathrm{e}^{-200t}\times10^{-8}=0.0525\mathrm{e}^{-200t}\mathrm{V}$$

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=1.75\mathrm{e}^{-200t}\mathrm{mA}$$

30.54[c] 如图 30-21 所示, 电磁铁两极之间磁场 $B=B_0\sin\omega t$, 一个 N 匝的矩形线圈在两极之间以速度 u 向右运动, 求感应电动势.

解 ☞ $N\Phi=N(B_0\sin\omega t)lx$, 所以瞬时的感应电动势为

$$v_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N\Phi)=-NB_0l(\omega x\cos\omega t+\dot{x}\sin\omega t)=NB_0l(u\sin\omega t-\omega x\cos\omega t) \quad (1)$$

如果线圈匀速运动, 那么上式中 $x=x_0+ut$

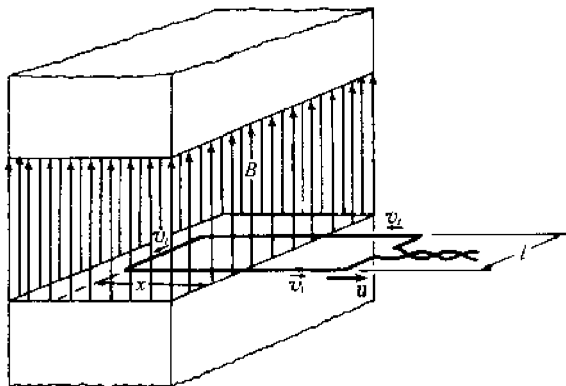


图 30-21

30.55 在题 30.54 中, 设 $B_0=0.1$T, $\omega=400$ rad/s, $l=150$ mm, $N=10$, $u=5$ m/s = 恒量, $x_0=300$ mm, 计算各时刻的 v_i. (a) $\omega t=0$, (b) $\omega t=\pi/4$, (c) $\omega t=\pi/2$, (d) $\omega t=3\pi/4$.

解 ☞ 我们把值代入 30.54 题中的(1)式中去, 得到 $v_i=0.150[5\sin\omega t-400(0.300+5t)\times\cos\omega t]$V. 这样可得各时刻的 v_i, (a) -18V(顺时针), (b) -12.6V, (c) $+0.75$V, (d) -13.5V.

30.56[c] 一个 10 匝的线圈放在一个每米有 n' 匝的螺线管中, 管中通以 $I=I_0\sin\omega t$ 的电流. 若拉动线圈其面积可改变. 线圈平面与螺线管的轴垂直, 若 $n'=3000\ \mathrm{m^{-1}}$, $I=12\sin150t$, $A=0.15\ \mathrm{m^2}$, $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=2\mathrm{m^2/s}$($t=5$ ms 时), 求出这瞬间的感应电动势.

解 ☞ 长螺线管管内 $B=\mu_0n'I=\mu_0n'I_0\sin\omega t$, 所以通过线圈的磁通匝链数为

$$N\Phi=NBA=NA\mu_0n'I_0\sin\omega t$$

$$v_i=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N\Phi)=-\mu_0I_0n'N\left(A\omega\cos\omega t+\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\sin\omega t\right) \quad (1)$$

代入数据得

$$v_i=-(4\pi\times10^{-7})(12)(3000)(10)[(0.15)(50)\cos(150)(0.005)+2\sin(150)(0.005)]$$

$$=-8.064(\mathrm{V})$$

——符合楞次定律.

30.57 如果题 30.56 中线圈不变形, 而且是半径为 r 的圆形, 中心在螺管的轴线上, 其余条件不变, 求(a)线圈中感应电势, (b)线圈上各点的感应电场 E_i.

解 ☞ (a)$A=\pi r^2$，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0$. 代入上题(1)式中，得 $v_i=-\mu_0 I_0 n'N\pi r^2\omega\cos\omega t$.(b)由于线圈不动，每点 $u=0$，感生电动势是仅由磁场变化引起的.感应电场满足 $v_i=E_i(2\pi r)$，因为根据对称性，$\boldsymbol{E}_i$ 与圆周相切，且各处大小不变.所以

$$E_i=v_i/2\pi r=-\frac{1}{2}\mu_0 I_0 n'Nr\omega\cos\omega t \tag{1}$$

30.58 检查题 30.57 中(1)式的量纲.

解 ☞ 我们知道 $\omega=[\mathrm{s}^{-1}]$，弧度无量纲，所以 $\cos\omega t$ 和 N 都是无量纲的纯数.

另外：$\mu_0=[\mathrm{N\cdot s^2/C^2}]$，所以

$$E_i=[\mathrm{Ns^2/C^2}][\mathrm{C/s}][\mathrm{m^{-1}}][\mathrm{m}][\mathrm{s^{-1}}]=[\mathrm{N/C}]=[\mathrm{V/m}]$$

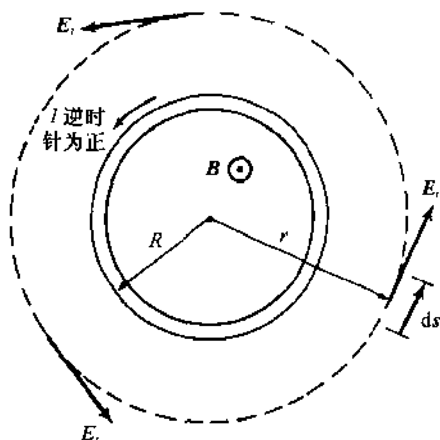


图 30-22

30.59[c] 如图 30-22 所示，圆环是一长螺线管截面，半径 $R=0.10\mathrm{m}$，每米有 2000 匝，通以交变电流 $I=I_0\sin\omega t=25\sin300t\,\mathrm{A}$，虚线表示半径为 $r=0.12\mathrm{m}$ 的导线，求(a)导线中的感应电动势 v_i，(b)导线上各点感应电场 E_i，(c)如果移去导线，各点的 E_i 仍不变吗?

解 ☞ (a)在螺线管外 $B=0$，穿过虚环的磁通量等于管内的磁通量：$\Phi_s=BA=(\mu_0 n'I)(\pi R^2)=\pi R^2\mu_0 n'I_0\sin\omega t$，所以

$v_i=-\mathrm{d}\Phi_s/\mathrm{d}t=-\pi R^2\mu_0 n'I_0\omega\cos\omega t$
$\quad=-0.5922\cos300t\ \mathrm{V}$

(b)$E_i=\frac{v_i}{2\pi r}=-0.7854\cos300t\ \mathrm{V/m}$. (c)不变.

30.60[c] 一长螺线管每米上有 800 匝线圈，通以电流 $i=3\sin(400t)\mathrm{A}$，求出离轴 2 mm 的地方的电场强度(只考虑以管轴为中心的圆周上 $\boldsymbol{E}$ 的切线分量).

解 ☞ $B=\mu_0 n'i$，其中 $n'=800\ \mathrm{m^{-1}}$. 通过面积 $A=\pi(2\times10^{-3})^2$ 的磁通量为 $\Phi=BA=0.03\mu_0\sin400t$，感应电动势为 $-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=-12\mu_0\cos400t$，圆周上的 E 沿切线方向且为常数，所以

$$2\pi(2\times10^{-3})E=-12\mu_0\cos400t$$

$$E=-960\mu_0\cos400t\ \mathrm{V/m}$$

30.61[c] 一金属环，密度 ρ，电导率为 σ，如图 30-23 所示，环平放在 xy 平面上，加有一变化磁场 $\boldsymbol{B}(t)=B_0\cos(\omega t)\hat{z}$，(a)求出它的质量 M 和电阻 R，(b)求感应电流 $i(t)$(从上往下看，取逆时针方向为正方向).

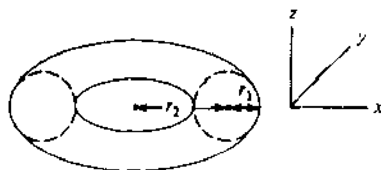


图 30-23

解 ☞ (a)在图 30-23 中，金属环体积$(\pi r_1^2)(2\pi r_2)=2\pi^2 r_1^2 r_2$，质量 $M=2\pi^2\rho r_1^2 r_2$. 电流在环体中流动时电阻 $R=(l)/(\sigma A)$，把 $l=2\pi r_2$，$A=\pi r_1^2$ 代入得

$$R=\frac{2\pi r_2}{\sigma(\pi r_1^2)}=\frac{2r_2}{\sigma r_1^2}$$

(b)如果不考虑感应电流产生的磁场，感应电动势为

$$-\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi r_2^2 B_0\cos\omega t)=\pi r_2^2\omega B_0\sin\omega t.$$

(这里我们用 πr_2^2 代替环面积平均值)所以电流为

$$i(t)=\frac{1}{R}(\pi r_2^2\omega B_0\sin\omega t)$$

注意：我们忽略了环中因感应电流而产生的磁场，对于铜之类的非磁性材料做成的环体，这种忽略对

结果没有影响.

30.62[c] 在题 30.61 中,(a)环体中的平均热功率多大? (b)如果环体材料比热为 c,不考虑热量损失,求环体的温度变化率.

解 ☞ (a)瞬时功率 $P(t)$ 为

$$i^2(t)R = \pi^2 r_2^4\omega^2 B_0^2\sin^2\omega t/R$$

由于 $\sin^2\omega t$ 在一个周期内积分为$\frac{1}{2}$,所以平均功率为

$$P = \pi^2 r_2^4\omega^2 B_0^2/2R = \frac{1}{4}\pi^2 r_1^2 r_2^3\omega^2\sigma B_0^2$$

(b)环中热能的积累 dH 与温度变化关系:$dT = dH/cM$,所以$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{cM}\frac{dH}{dt} = \frac{P}{cM} = (r_2^2\omega^2\sigma B_0^2)/(8c\rho)$.

30.63 对题 30.62(b)中结果的单位作一检验.

解 ☞ 因为 1T = 1 J/(A·m²),所以

$$\frac{r_2^2\omega^2\sigma B_0^2}{c\rho} = \frac{[m^2][s^{-2}][\Omega^{-1}\cdot m^{-1}][J^2\cdot A^{-2}\cdot m^{-4}]}{[J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}][kg\cdot m^{-3}]} = \left[\frac{K}{s}\right]\left[\frac{J}{A^2\cdot\Omega\cdot s}\right] \quad (1)$$

但 1 Ω = 1 V/A = 1 (J/(A·s))/A = 1 J/(A²·s),所以(1)式中$\left[\frac{J}{A^2\cdot\Omega\cdot s}\right]$是没有物理单位的纯数,就剩下[K/s]了,这便是 dT/dt 的正确单位.

30.64[c] 如图 30-24 所示,一金属盘半径为 b,厚 w,它放在一螺线管中,它们的轴线重合,螺线管中产生一磁场 $B = B_0\sin 2\pi ft$,(a)问图中虚线环上的感应电动势多大? (b)如果虚环宽 dr,密度为 ρ,求它的电阻,(c)在虚线环中有感应电流,求出它的值,(d)忽略边缘效应和自感电流,求出盘中电流消耗的总功率.

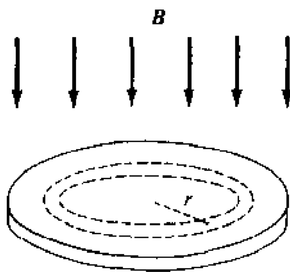


图 30-24

解 ☞ (a)由法拉第定律可得感应电动势为

$\mathscr{E} = -[d(BA)]/dt$,其中 $A = \pi r^2, B = B_0\sin 2\pi ft$,

所以 $\mathscr{E} = -2\pi^2 r^2 fB_0\cos 2\pi ft$.

(b)$R = (\rho L)/A = (2\pi r\rho)/(w\,dr)$

(c)$I = \mathscr{E}/R = -\{[\pi fB_0 w(\cos 2\pi ft)r]/\rho\}dr$

(d)对一圆环而言 $dP = I^2R = \{[2\pi^3 B_0^2 f^2 w(\cos 2\pi ft)^2]/\rho\}r^3dr$

从 0 到 b 对 r 积分:$[(\pi^2 wb^4 f^2B_0^2)/2\rho](\cos 2\pi ft)^2$,对时间求平均功率:

$$P = (\pi^3 wb^4 f^2 B_0^2)/4\rho$$

这与 30.62(a)中的公式类似:$P\propto(\omega B_0)^2$.

30.65 一圆柱形真空管放在一螺线管中,当螺线管中磁通量增大时,真空管中电子受到哪两种力?

解 ☞ 一个力是电子运动时受到的磁场力 $e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$,另一个力是感应电场的作用力.把半径为 r 的圆的中心放在轴线上,则感应电动势为:$2\pi rE = \pi r^2(dB/dt)$所以这一个力 $eE = [er(dB/dt)]/2$,方向与圆周相切.

30.66 一圆环半径 20 cm,电阻 0.01 Ω,有一磁场垂直于环面,大小为 2.0 T,当圆环从原来位置转到环面与磁场平行的位置时,环中共有多少电荷流过?

解 ☞ 因为 $iR = V = -\Delta\Phi_m/\Delta t$, $i = \Delta q/\Delta t$,所以 $R\Delta q = -\Delta\Phi_m$ 或 $|\Delta q| = |\Delta\Phi_m|/R = |\Phi_{mf} - \Phi_{mi}|/R$.最后的磁通量为 0,原来磁通量为 $\Phi_{mi} = \frac{1}{4}\pi d^2B$.我们可得 $|\Delta q| = \frac{\pi d^2 B}{4R} = \frac{\pi(0.20)^2(2.0)}{(4)(0.01)} = 6.28$(C).

30.67 有一个 100 匝的线圈,直径为 6 cm,电阻 5Ω,它放在磁铁两极之间,所以通过它的磁通量

最大.线圈上接一内阻为 595Ω 的电流计.如果突然把线圈移到无磁区,电流计上有 10^{-4} C 的电荷流过,求两极之间的 $\boldsymbol{B}$.

解 ☞ 当线圈移动时,磁通量从 BA(A 为线圈面积)变化到 0,所以

$$|\mathscr{E}| = N|\Delta\Phi/\Delta t| = (NBA)/\Delta t$$

题中已知 $\Delta q = 10^{-4}$C,由欧姆定律得 $|\mathscr{E}| = IR = \frac{\Delta q}{\Delta t}R$,其中 R 为 600Ω.把两式联立,求出 B,可得

$$B = \frac{R\Delta q}{NA} = \frac{(600\Omega)(10^{-4}\text{C})}{(100)(\pi)(9\times10^{-4}\text{m}^2)} = 0.212\text{T}$$

30.68　有一个 100 匝的线圈,直径 20 mm,电阻 400 Ω,与一电流计构成回路,电流计内阻 200 Ω,一个大小为 $B = 0.0113$T 的磁场垂直线圈平面,问当磁场突然变为 0 时,有多少电荷通过电流计?

解 ☞ 回路总电阻 R = 200 Ω + 400 Ω = 600 Ω,　$\mathscr{E} = IR = \frac{\Delta q}{\Delta t}R = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$$\Delta q = -\frac{N\Delta\Phi}{R} = -\frac{NA\Delta B}{R} = -\frac{1000(\pi\times10^{-4}\text{m}^2)(0.00\text{T}-0.0113\text{T})}{600\Omega} = +5.9\mu\text{C}$$

("+"号仅仅表明正电荷流向与感应电流方向相同).

30.69　测量太阳耀斑,一般需要以下典型数据:单位体积中粒子数 $n = 10^{22}\text{m}^{-3}$,气体温度 $T \approx 4000$K,磁感应强度 $B \approx 0.1$T,(a)根据理想气体的性质,求出太阳耀斑中的气压,并与大气压比较,(b)假设气体为单原子的理想气体,求太阳耀斑中的热能密度 ρ_t,(c)求出太阳耀斑的磁能密度 ρ_m.

解 ☞ (a) $p = nkT \approx (10^{22})(1.38\times10^{-23})(4\times10^3) \approx 550$(Pa)

$$\frac{0.55\text{kPa}}{101\text{kPa/atm}} = 5.4\times10^{-3}\text{atm}$$

(b)理想气体热能密度为

$$\rho_t = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2}p \approx \frac{3}{2}(550\text{J/m}^3) = 830\text{J/m}^3$$

(c)磁能密度

$$\rho_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \approx \frac{(0.1\text{T})^2}{2(4\pi\times10^{-7}\text{H/m})} = 4000\text{J/m}^3$$

30.70　题 30.69 中,(a)在太阳耀斑上,压力和磁力哪个起主导作用? (b)远离耀斑的太阳大气温度较低,参数为 $n \approx 10^{22}\text{m}^{-3}$, $T = 6000$K, $B = 10^{-4}$T,那么此处哪个力起主导作用?

解 ☞ (a)因为 $\rho_m \approx 5\rho_t$,所以磁力起主要作用.

(b)在"安静"的太阳大气中,我们得

$$\rho'_t = \frac{3}{2}nkT' \approx 1.2\times10^3\ \text{J/m}^3,\quad \rho'_m = \frac{(B')^2}{2\mu_0} = 4\times10^{-3}\ \text{J/m}^3$$

所以压力起主要作用.

30.71[c]　一个导电性能很好的环与螺线管的轴垂直,如图 30-25 所示,环有一个宽为 δ 的缺口,螺线管横截面积为 a,管内有均匀磁场 $\boldsymbol{B}$.(a)如果 $\boldsymbol{B}$ 是恒定的,那么环中感应电动势多大? (b)如果从 $t = 0$ 开始,螺线管中电流逐步增大,所以磁场 $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 + \beta t\ (\beta > 0)$,环中感应电动势多大? 如果电荷不可从缺口处通过,问缺口两个面(F_1 和 F_2)上哪个积聚的是正电荷?

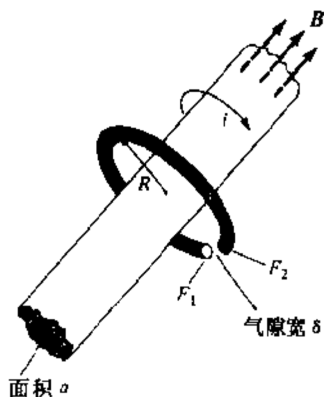


图 30-25

解 ☞ (a)如果 B 恒定,则 $(d\Phi_m)/dt =$

0,所以感应电动势 $\mathscr{E}=0$.

(b)$\mathscr{E}(t)=-\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ba)=-\alpha\beta<0$

电动势是恒定的负值,所以电场方向从 F_2 沿环指向 F_1,可知 F_1 上积聚的是正电荷.

30.72 在题 30.71 中,当环中总电场为 0 时,电荷积聚过程停止.此时,缺口两个面之间电场多大? 你的结果依赖于 R 吗?

解 ☞ 当合电场为 0 时,环中的静电场与感应电场平衡,把一电荷沿整个环形回路移动一周,静电场不做功,所以在缺口处的电场一定很大且从 F_1 指向 F_2,所以,忽略缺口中的感应电场,则

$$E=\frac{|\mathscr{E}|}{\delta}=\frac{\alpha\beta}{\delta}\tag{1}$$

上式不依赖于 R(只要环的半径大于螺线管半径).

30.73 题 30.72 中,(a)当缺口处电场达到击穿电场 E_b 时,会产生火花,根据题 30.72 中(1)式求出最小缺口宽度 δ_{min},(b)当 $a=0.10\mathrm{m}^2$, $\beta=1.0\times10^3\mathrm{T/s}$, $E_b=3.0\times10^6$ V/m 时,δ_{min}值多大?

解 ☞ (a) $\delta_{min}=\alpha\beta/E_b$. (b) $\delta_{min}=(0.10)(1.0\times10^3)/(3.0\times10^6)=33.3(\mu\mathrm{m})$

30.4 发电机和电动机

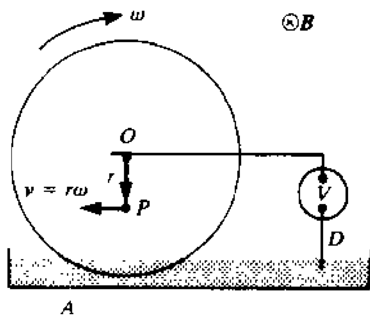


图 30-26

30.74 如图 30-26 是法拉第圆盘——第一台发电机的示意图.一铜盘的半径为 R,绕 O 点以 ω 速度转动,铜盘最低部浸在水银槽中,一个电压计 V 一端与水银槽在 D 点连接,另一端与 O 点相连,有一磁场 B,垂直纸面向里,问流过电压计的电流方向如何?

解 ☞ 设在 P 点有一正电荷,随铜盘转动,受到一个方向向下指向水银的安培力,所以这回路中感应电流为逆时针方向,因此通过电压计向上流,即从 D 流向 O.(D 处电势比 O 处电势高).

30.75[c] 题 30.74 中的法拉第圆盘,(a)证明感应电动势 $|V|=\frac{1}{2}B\omega R^2$,(b)如果 $B=0.50\mathrm{T}$, $\omega=1200$ r/min, $R=10$ cm,求出感应电动势.

解 ☞ (a)当开路时,电场 $E(r)=Bv=Br\omega$, r 指到 O 处距离.

$$|V|=V_D-V_O=\int_0^R Br\omega\mathrm{d}r=B\omega\left(\frac{1}{2}r^2\Big|_0^R\right)=\frac{1}{2}B\omega R^2$$

(b)把 $B=0.50\mathrm{T}$, $R=0.10\mathrm{m}$, $\omega=1200$ r/min$=40\pi$rad/s,代入可得

$$|V|=\frac{1}{2}(0.50)(40\pi)(0.10)^2=0.314(\mathrm{V})$$

30.76 一个手动发电机外部不接负载时,转动很容易,如果接上负载,尤其是负载的电阻很小时,发电机转动很难.请解释这一现象.

解 ☞ 当发电机没有负载时,线路中没有电流,要使它转动,外力只要克服机械摩擦力.但当发电机接上负载时,回路中有电流,所以受到安培力.根据楞次定律,安培力阻止盘子转动.当负载电阻很小时,感应电流很大,安培力也很大,所以转动也困难.

30.77 发电机电枢的感应电动势和发电机输出电压关系是什么?

解 ☞ 当发电机中电流为 I_a 时,电枢的电阻设为 r_a,则实际输出电压为

$$V_t=\mathscr{E}-I_ar_a\tag{1}$$

[注:一般情况下,发电机中的电动势,电压电流随时间变化,在简谐变化情况下,它们之间关系,可以看成是这些量的方均根值之间关系].

30.78 试描述串励和并励发电机.

解 ☞ 发电机的磁场可由永久磁铁产生或由独立电源供电的电磁铁产生,也可由自激电磁铁产生,即产生磁场的电流是感应电动势产生的,自激发电机的绕组与电枢可以是串联或并联,分别对应于串励发电机和并励发电机.

(复励发电机既有串励绕组,也有并励绕组,为控制输出功率,可以改变励磁绕组的总电阻,而励磁电流的变化就影响磁场强度,进而改变发电机的输出功率.发电机的励磁绕组可以是定子或转子,相应地,电枢则为转子或定子.)

30.79 一发电机产生电动势 120 V,当电枢中电流为 25 A 时,输出电压为 115 V,求电枢的电阻.

解 ☞ 我们利用题 30.77 中(1)式,$V_t=\mathscr{E}-I_a r_a$,$115=120-(25.0)(R_a)$,得 $r_a=0.2\Omega$.

30.80 发电机电枢电阻为 0.16 Ω,圆盘转速不变,当外电路开路时,输出电压 132 V,当满负载时,输出电压 126 V.当满负载时,电流多大?外电路中功率多大?如果发电机效率为 85%,要让发电机工作,驱动发电机所需的功率多大?

解 ☞ $\mathscr{E}=132$ V,$V_t=\mathscr{E}-Ir_A$,即 $126=132-0.16I$, 得 $I=37.5$A,外电路功率是终端电压和电流乘积,所以

$$P_e=V_tI=(126)(37.5)=4725(\mathrm{W})$$

$$P_e=0.85\ P_{\text{驱}},\quad P_{\text{驱}}=\frac{4725}{0.85}=5560(\mathrm{W})=7.45(\mathrm{hp})$$

(其中 1hp = 745.7 W)

30.81 发电机输出电流为 5 A 时,输出电压为 125 V,当输出电流为 15 A 时,输出电压下降至 122 V,发电机产生电动势多大?电枢电阻多大?

解 ☞ 我们利用题 30.77 中(1)式 $V_t=\mathscr{E}-Ir_A$,对两种情况有 $125=\mathscr{E}-5r_A$, $122=\mathscr{E}-15r_A$.消去 $\mathscr{E}$,可得 $10r_A=3$,$r_A=0.3\Omega$,$125=\mathscr{E}-(5)(0.3)$, 得 $\mathscr{E}=126.5$V.

30.82 发电机电枢的电阻 0.2 Ω,当电枢中电流为 5A 时,输出电压 224 V,其它条件不变,电枢中电流变为 40A,此时输出电压多大?发电机产生的感应电动势多大?

解 ☞ 首先求 $\mathscr{E}$:$V_t=\mathscr{E}-Ir_A$,$224=\mathscr{E}-[(5)\times(0.2)]$得 $\mathscr{E}=225$V.接下来求新的输出电压 $V_t=225-[(40)\times(0.2)]=225-8=217(\mathrm{V})$.

30.83 一发电机的电枢电阻 0.06 Ω,并励绕组电阻 100 Ω,如图 30-27 所示.当发电机向外输出功率为 40 kW,输出电压为 250 V 时,电枢产生总的电功率多大?

解 ☞ 外电路电流为 $I_r=\dfrac{I_rV}{V}=\dfrac{40000\mathrm{W}}{250\ \mathrm{V}}=160$ A

励磁电流为 $I_f=\dfrac{V_f}{R_f}=(250\mathrm{V})/(100\ \Omega)=2.5$ A

电枢上电流为 $I_a=I_r+I_f=162.5$ A

总的感应电动势$|\mathscr{E}|=250\ \mathrm{V}+I_aR_a=250\ \mathrm{V}+(162.5\ \mathrm{A})(0.06\ \Omega)=260$ V

所以电枢产生的电功率为 $I_a|\mathscr{E}|=(162.5\ \mathrm{A})(260\ \mathrm{V})=42.2$ kW

另解 电枢上损失的电功率 $=I_a^2R_a=(162.5\ \mathrm{A})^2(0.06\ \Omega)=1.6$ kW

励磁绕组上损失电功率 $=(2.5\ \mathrm{A})^2(100\ \Omega)=0.6$ kW

总电功率 = (输出功率) + (电枢损失功率) + (绕组损失功率) = 40 kW + 1.6 kW + 0.6 kW = 42.2 kW

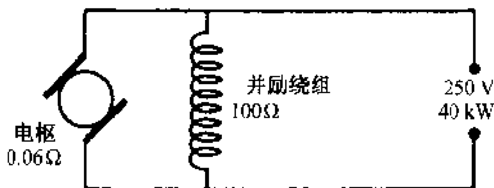


图 30-27

30.84 某并励发电机电枢的电阻为 0.5 Ω，励磁绕阻 200 Ω，输出电压 120 V，输出电流8 A，求(a)并励绕组中的电流，(b)电枢电流，(c)感应电动势。

解 ☞ 设 I_f 为励磁电流，I_a 为电枢电流，(a) $I_f=\frac{V_t}{R_f}=\frac{120}{200}=0.6(\text{A})$. (b) $I_a=I_{出}+I_f=8.6\text{A}$. (c) $V_t=\mathscr{E}-I_a r_a$, $120=\mathscr{E}-[(8.6)(0.5)]$. 得到 $\mathscr{E}=124.3$ V.

30.85 发电机电枢的电阻为 0.12 Ω，向外输出电流 60 A，输出电压 118 V，问发电机产生的电动势多大？电枢上转化为热能的功率多大？

解 ☞ $V_t=\mathscr{E}-I_r$, $118=\mathscr{E}-[(60)(0.12)]$. 得

$\mathscr{E}=118+7.2=125.2(\text{V})$, $P=I^2R=(60^2)(0.12)=432(\text{W})$

30.86 一并励发电机产生电动势为 243.5 V，对外输出功率 75 kW，电压输出 230 V，励磁电流 12.5 A，问电枢电阻多大？

解 ☞ $\mathscr{E}=243.5$，同时 $V_t=230$ V，由 $\mathscr{E}-I_aR_a=V_t$. 我们知道要求 R_a 需要知道 I_a，如图 30-27 所示，$I_a=I_f+I_x$，其中励磁电流 $I_f=12.5$ A，外部负载电流满足 $V_tI_x=75\times10^3$ W，所以 $I_x=75000/230=326.1(\text{A})$. 得 $I_a=338.6$ A，最后 $230=243.5-338.6\ R_a$，得 $R_a=0.040$ Ω.

30.87 一并励发电机向外输出电流 48 A，电压 120 V 励磁绕组电阻为 60 Ω，电枢电阻 0.14 Ω，向空气中散热率为 500 W，求发电机效率。

解 ☞ 设输出功率 $P_{出}$，励磁线组损失功率 $P_{FC}=I_F^2R_F$ 电枢损失功率 $P_a=I_a^2R_a$. 效率＝输出功率/总功率，分母中包括散发的热功率 $P_{散}$.

$$P_{出}=V_tI_a=(120)(48)=5760(\text{W}),\ P_{FC}=(120/60)^2(60)=240(\text{W})$$

$$P_a=(48)^2(0.14)=322.56(\text{W}),\ P_{散}=500\text{ W}$$

$$效率\ \text{Eff}=\frac{5760}{5760+240+500+322.56}=0.84$$

30.88 一发电机每分钟转 1200 圈，输出电压 120 V，输出电流 30 A，问要使发电机以这种速度旋转，外力矩应加多大？设功率损失为 400 W.

解 ☞ 发电机的输入功率为 $P_{入}$＝外力矩×角频率＝$(125.6\text{ rad/s})\tau$，而输出功率 $P_{出}=VI=(120\text{ V})(30\text{ A})=3600$ W. 设损失功率 400 W，得 $P_{入}=P_{出}+400\text{ W}=4000$ W，所以 $\tau=4000/125.6=31.8(\text{N}\cdot\text{m})$

30.89 一两磁极发电机电枢为鼓形，其圆柱形的核长 20 cm，直径 10 cm，200 个电枢导体分 2 组串联后并联，气隙中的磁通密度为 0.5 Wb/m². 如果电枢每秒转 30 圈，产生的平均电动势为多大？

解 ☞ 气隙中的磁通量为 $\Phi=BA=(0.5\text{Wb/m}^2)(0.2\text{m}\times0.1\text{m})=0.01\text{Wb}$. 每个导体每个周期切割 0.1Wb 的磁通量 2 次. 因此在 1s 内，或 30 转内，每个导体切割的磁通量为 $2(30)(0.01)=0.6(\text{Wb})$. 因为 200 个导体分 2 组，每组串联的导体数为 200/2＝100.（串联时电动势相加.）

$|\mathscr{E}|$＝串联的 100 个导体每秒内切割的磁场线的通量

$=(100)(0.60\text{Wb/s})=60\text{V}$

30.90 一 6 磁极发电机以 1500 r/min 的转速转动时，产生的电动势为 100 V. 若磁场不变，转速为多大才能使电动势为 120 V?

解 ☞ 每秒切割的磁通量和电动势与转速成正比，所以

$$转速=\frac{120}{100}(1500\text{ r/min})=1800\text{ r/min}$$

30.91 确定下列情况对发电机的感应电动势的影响. (a)每个磁极产生的磁通量增加一倍，(b)电枢转速增加一倍.

解 ☞ 因为 $|\mathscr{E}|\propto\Delta\Phi/\Delta t$，若每个磁极的磁通量加倍，则总通量也加倍，所以 $|\mathscr{E}|$ 加倍；若电枢转速加倍，其它不变，同样也使 $|\mathscr{E}|$ 加倍.

30.92 图 32-28 为一电动机原理示意图. 一根金属导线在宽 0.25 m 的马蹄形金属导轨上滑动，

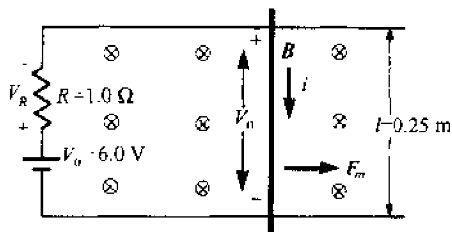


图 30-28

它们的电阻可忽略.电路中另有一个 1.0Ω 的电阻和 6.0V 的电池.一0.50T 的均匀磁场垂直纸面向里,磁场力使导线向右滑动.为使导线匀速向右运动,需施加一0.2N 的向左的力.(a)电路中的电流多大?(b)1.0Ω 的电阻上的电压降多大?(c)运动导线产生的反电动势多大?

解 ☞ (a)由于滑动导线垂直于磁场,导线受到的磁力为 $F_m=iBl$.因为磁力与 0.2N 的向左的力平衡,所以 $i=F_m/(Bl)=0.25/[(0.50)(0.25)]=2.0(A)$.(b)因为 $i=2.0A$,电阻上的电压降 $V_R=iR=(2.0)(1.0)=2.0(V)$.(c)反电动势 $V_b=V_0-V_R=6.0-2.0=4.0(V)$.

30.93 在题 30.92 中,(a)导线运动的速度多大?(b)电动机产生的功率多大?(c)证明转变成机械功率的电功率与(b)结果相同,马达的效率为多少?

解 ☞ (a)反电动势等于 B 乘以闭合回路面积的增加率:$V_b=BlV$,因此导线运动速率为 $v=V_b/(Bl)=4.0/[(0.5)(0.25)]=32(m/s)$.(b)机械功率 P 等于向右的力 F_m 与速率 v 的乘积:$P=F_mv=(0.25)(32)=8.0(W)$.(c)电池消耗的功率为 $V_0i=(6.0)(2.0)=12.0(W)$.在此总功率中,电阻消耗 $V_Ri=i^2R=(2.0)^2(1.0)=4.0(W)$.剩余部分 $12.0-4.0=8.0(W)$ 从电能变成了宏观的机械运动形式,因此转换效率为 $8.0W/12.0W=67\%$.

30.94 一电动机中的导体长 125 mm,载有电流 3 A.若它垂直于 1.2 T 的均匀磁场,作用于导体的磁力为多少?若导体距电动机的转轴 50 mm 且平行于转轴,产生的力矩为多大?

解 ☞ $F=IlB=(3)(0.125)(1.2)=0.45(N)$

力矩 $=rF=(0.05)(0.45)=22.5\times10^{-3}(N\cdot m)$

30.95 求作用在一电动机内矩形线圈上的力矩.已知线圈平面平行于磁场线时,若磁感应强度为 1.25 T,线圈内电流为 9 A.设线圈长 0.25 m,宽 12 cm.

解 ☞ 磁矩为 $M=IA=(9)(0.25)(0.12)=0.27(A\cdot m^2)$

而力矩 $=MB\sin90°=(0.27)(1.25)(1)=0.3375(N\cdot m)$

30.96 一电动机的矩形线圈长 15 cm,宽 8 cm,载有电流 6 A.线圈平面平行于 1.2 T 的均匀磁场,其 15 cm 长的边垂直于磁场而 8 cm 的边平行于磁场,求线圈每一边受到的力,并由此计算线圈受到的力矩.再计算线圈的磁矩并检验力矩的值.

解 ☞ 长为 15 cm 的边受到的力为 $F_{15}=IlB=(6)(0.15)(1.2)=1.08(N)$.两边受力方向相反.8 cm 边受力为 $F_8=0$.对过线圈中心垂直于 8 cm 边的轴,线圈所受力矩 $=(2)(0.04)(1.08)=0.0864(N/m)$.而磁矩为 $M=IA=(6)(0.15)(0.08)=0.072(A\cdot m^2)$.由此算得力矩 $=MB\sin(\boldsymbol{M},\boldsymbol{B})=(0.072)(1.2)(1)=0.0864(N\cdot m)$结果一致.

30.97 一电动机两磁极之间的磁通密度为 1.1 T.一载有 8 A 的导体垂直于磁场.若导体在磁场中的部分长 0.1 m,在 0.002 s 内沿垂直于磁场的方向运动了 15 mm,磁场在此距离内是均匀的,对导体所做的功为多少?证明此功等于感生的反电动势与 0.002 s 内流过导体的电荷的乘积.

解 ☞ $F=IlB=(8)(0.1)(1.1)=0.88(N)$.而功 $=Fs\cos\theta=(0.88)(0.015)(1)=0.0132(J)$.反电动势为 $\mathscr{E}=vBl=\left(\frac{0.015}{0.002}\right)(1.1)(0.1)=0.825(V)$.0.002s 内流过的总电荷 $Q=8A\times0.002s=0.016C$.所以功 $=\mathscr{E}Q=(0.825)(0.016)=0.0132(J)$得证.

30.98 一满负载运行的电动机电源电压为 118 V,产生的反电动势为 109 V,流过电枢的电流为 8 A.电动机输出机械功率多少(不考虑摩擦损耗)?电枢电阻多大?

解 ☞ 令 $\mathscr{E}_b$ 代表电动机中的反电动势，则 $P_{出}=\mathscr{E}_b I_A=(109)(8)=872(\mathrm{W})$. 利用公式 $V_t=\mathscr{E}_b+IR_A$ 可求出电阻 R_A.(可与题 30.77 类比，电动机就是反向运行的发电机). $8=\frac{118-109}{R_A}$ 即 $R_A=\frac{9}{8}=1.125(\Omega)$

30.99 一电动机的反电动势为 100V，电枢电流 90A，转速 1500 r/min. 求电枢的功率和受到的力矩.

解 ☞ 功率 = (电流) × (电压) = (90 A)(110 V) = 9900 W

$$力矩=\frac{功率}{角速度}=\frac{9900\ \mathrm{W}}{(2\pi\times25)\ \mathrm{rad/s}}=63.0\ \mathrm{N\cdot m}$$

30.100 一电动机产生的反电动势为 210 V，电源电压为 220 V，电枢电流为 5.7 A. 求(a)输出的机械功率，(b)电动机损耗的功率.

解 ☞ 由于损耗，反电动势比电源电压低

(a) $P=\mathscr{E}_b I_a=(210)(5.7)=1197(\mathrm{W})$

(b) 损耗功率 $P_{耗}=V_t I_a-P$，即 $P_{耗}=(220-210)(5.7)=57(\mathrm{W})$

30.101 当电动机中电流为 40A 时，电枢产生的驱动力矩为 100 N·m. 如果电流增加到 70 A，磁感应强度减为原来的 80%，求此时电动机的驱动力矩.

解 ☞ 电枢产生的力矩与电流和磁感应强度成正比，所以

力矩 = (100 N·m)(70/40)(0.80) = 140 N·m

30.102 如图 30-29，一并励电动机电枢电阻 0.05 Ω，电源电压 120 V. (a)求没有产生反电动势时，即刚开始时，电枢中的电流(忽略可变电阻)，(b)如果要使起始电流为 60 A，可变电阻阻值 R 应为多大？(c)开始时，若可变电阻为 0，电枢中电流为 20 A，反电动势多大？(d)若将此电动机作发电机使用，如果电枢对外输出 20 A，120 V，问电枢中感应电动势为多少？

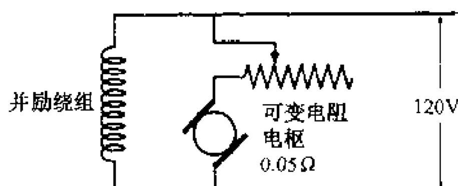


图 30-29

解 ☞ (a) 电枢电流 $=\frac{外加电压}{电枢电阻}=\frac{120\mathrm{V}}{0.05\Omega}=2400\ \mathrm{A}$

(b) 电枢电流 $=\frac{外加电压}{0.05\ \Omega+R}$，即 $60\ \mathrm{A}=\frac{120\ \mathrm{V}}{0.05\ \Omega+R}$ 求得 $R=1.95\ \Omega$

(c) 反电动势 = (外加电压) − (电枢上的电压降) = 120 V − (20 A)(0.05 Ω) = 119 V

(d) 感应电动势 = (端电压) + (电枢上的电压降) = 120 V − (20 A)(0.05 Ω) = 121V

30.103 一电动机中产生磁场的固定线圈与转子线圈并联，转子中电流为 1.4 A，电阻 R 为 5.0 Ω，电动机的电源电压 220 V，求(a)反电动势，(b)输出的机械功率.

解 ☞ (a) 反电动势 $V_b=V-iR$，i、R 分别为转子线圈的电流、电阻. 所以 $V_b=220-(1.4)(5)=213(\mathrm{V})$. (b) 输出的机械功率等于单位时间内反抗反电动势所需消耗的电能 $P_{出}=V_b i=(213)(14)=298(\mathrm{W})$. (注：电动机中的电流和电压均随时间变化，本章解得的数据可认为是简谐变化的电动势的方均根值.)

30.104 在题 30.103 中，(a)如果加负载使电动机速度减慢 5%，则反电动势变为多大？(b)转子电流变为多大？(c)输出的机械功率改变多少？(d)由(a)，(b)中所得结果说明，电动汽车不要换档器.

解 ☞ (a) 反电动势是由于转子线圈旋转时相当于发电机而引起的，V_b 与角速度成正比，所以速度减少 5%，反电动势也减少 5%，即 $V'_b=0.95V_b=(0.95)(213)=202(\mathrm{V})$. (b) 电流 $i'=\frac{V-V'_b}{R}=\frac{220-202}{5}=3.6(\mathrm{A})$. (c) 输出机械功率为 $P'_{出}=V'_b i'=(202)(3.6)=727\mathrm{W}$(比题 30.103(b)的结果大).

(d)当电动汽车爬坡时,速度减小,反电动势也变小,从而转子中电流增大,导致转子的驱动力矩和输出的机械功率增大,因此电动汽车不需要用换档齿轮进行控制.

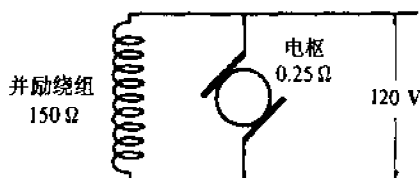


图 30-30

30.105　如图 30-30 所示,一并励电动机电枢电阻 0.25Ω,与 150Ω 的励磁电阻并联后接到 120V 的电源上.产生的反电动势为 115V.计算(a)电枢电流 I_a,励磁电流 I_f 和总电流 I_t,(b)电动机的输入功率,(c)电枢和励磁电路消耗的热功率,(d)机器的电效率.

解 ☞ (a) $I_a=\dfrac{\text{外加电压}-\text{反电动势}}{\text{电枢电阻}}=\dfrac{(120-115)\text{V}}{0.25\ \Omega}=20\ \text{A}$

$$I_f=\frac{\text{外加电压}}{\text{励磁电阻}}=\frac{120\ \text{V}}{150\ \Omega}=0.80\ \text{A},\ I_t=I_a+I_f=20.80\ \text{A}$$

(b)输入功率 $=(120\ \text{V})(20.80\ \text{A})=2496\ \text{W}$

(c)电枢消耗功率 $I_a^2R_a=(20\ \text{A})^2(0.25\ \Omega)=100\ \text{W}$

励磁消耗功率 $I_f^2R_f=(0.80\ \text{A})^2(150\ \Omega)=96\ \text{W}$

(d)输出功率 =(输入功率)-(消耗功率)$=2496-(100+96)=2300(\text{W})$

或,输出功率 =(电枢电流)(反电动势)$=(20\ \text{A})(115\ \text{V})=2300\ \text{W}$

所以,电效率 $=\dfrac{\text{输出功率}}{\text{输入功率}}=\dfrac{2300\ \text{W}}{2496\ \text{W}}=0.921=92.1\%$

30.106　一并励电动机接在 120 V 电源上,励磁线圈电阻为 240 Ω,电枢电阻 0.5 Ω.(a)如果电动机输入电流为 4.5 A,电枢电流多大?(b)电动机输出功率多大?(假设无其它损耗.)

解 ☞ (a) $I_f=\dfrac{V_T}{R_f}=\dfrac{120}{240}=0.5(\text{A})$,因此,$I_a=I_t-I_f=4.0\ \text{A}$.

(b) $P_{出}=P_{入}-I_f^2R_f-I_a^2R_a$

$=(120\ \text{V})(4.5\ \text{A})-(0.5\ \text{A})^2(240\ \Omega)-(4.0\ \text{A})^2(0.5\ \Omega)$

$=472\ \text{W}$

30.107　一并励电动机接到 120 V 的电源上,输入电流 9 A,电枢电阻 1.5 Ω,励磁线圈的电阻为 240 Ω,求该线圈中的电流和电枢电流、反电动势及电动机输出的机械功率.

解 ☞ $I_f=\dfrac{120}{240}=0.5(\text{A})$,$I_a=9-0.5=8.5(\text{A})$,由 $V_t=\mathscr{E}_b+I_aR_a$ 得 $\mathscr{E}_b=(120\text{V})-(8.5\text{A})(1.5\Omega)=107.25\text{V}$,$P_{出}=\mathscr{E}_bI_a=(107.25)(8.5)=911.6(\text{W})$.

30.108　一并励电动机的最大安全工作电流为 8 A,以免因过热而损坏.如果电枢电阻为 0.5 Ω,当电动机电源电压为 120 V 时,反电动势不小于多少才能使电动机免于损坏?

解 ☞ $\mathscr{E}=V_t-I_ar_a=120-(0.8)(0.5)=116(\text{V})$

30.109　一并励电动机接入 120V 电压的电路中,输入电流 2.9A,并联的励磁线圈的电阻为 300Ω,电枢电阻为 0.8Ω,求电枢上电流和反电动势.又:电动机输出的机械功率多大?电动机内因 I^2R 发热消耗的功率多大?

解 ☞ $I_f=\dfrac{120}{300}=0.4(\text{A})$,$I_a=2.9-0.4=2.5(\text{A})$,$V_t=\mathscr{E}_b+I_ar_a$,即

$120=\mathscr{E}_b+(2.5)(0.8)$,$\mathscr{E}_b=118\ \text{V}$,$P_{出}=\mathscr{E}_bI_a=(118)(2.5)=295(\text{W})$

$P_a=(2.5)^2(0.8)=5(\text{W})$,　$P_f=(0.4)^2(300)=48(\text{W})$

因 I^2R 发热消耗的功率 $=5\ \text{W}+48\ \text{W}=53\ \text{W}$

30.110　在图 30-31 所示电路中,驱动电动机的电源电动势为 64 V,内阻 r_b 为 1 Ω.电动机电枢电阻为 0.5 Ω.如果 $R_3=12\Omega$,$R_4=6\Omega$,$R_1=2.5\Omega$,$R_2=3\Omega$,电枢电流为 2 A 时,电动机的反电动势多大?电动机输出的机械功率又为多大?

解 ☞ $\sum\mathscr{E}=IR_e$　这里,$\sum\mathscr{E}=64\text{V}-\mathscr{E}_a$,而电路的等效电阻 $R_e=r_a+r_b+R_1+R_2+R_{34}$,其中

$$\frac{1}{R_{34}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4},\quad 即\ R_{34}=4\ \Omega$$

所以

$$2=\frac{64-\mathscr{E}_a}{0.5+1+2.5+3+4},\quad 22=64-\mathscr{E}_a$$

得

$$\mathscr{E}_a=42\ \text{V},\ P_{out}=\mathscr{E}_aI=(42)(2)=84(\text{W})$$

30.111 在图 30-31 中,若 $\mathscr{E}_a=80\text{V}$, $r_a=1.5\ \Omega$, $R=3\ \Omega$, $\mathscr{E}_b=32\ \text{V}$, $r_b=0.5\ \Omega$, $R_2=15\ \Omega$, $R_4=10\ \Omega$,通过发电机的电流为 3 A. 求 R_1,发电机的端电压和电源的端电压.

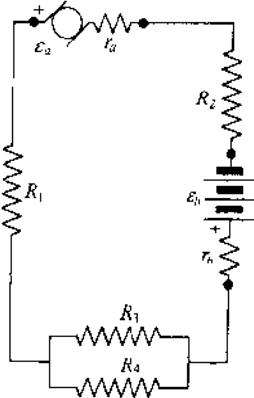


图 30-31

解 ☞ 注意:这里的 $\mathscr{E}_a$ 是发电机的电动势,因此

$$3=\frac{80-32}{1.5+0.5+R_1+3+R_{34}},$$

$$\frac{1}{R_{34}}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{2+3}{30}=\frac{1}{6}$$

$$R_{34}=6\Omega,\ 3=\frac{48}{11+R_1},\ R_1=5\Omega$$

$$V_{t,发}=\mathscr{E}_发-I_ar_a=80-(3)(1.5)=75.5(\text{V})$$

$$V_{t,源}=\mathscr{E}_b+I_br_b=32+(3)(0.5)=33.5(\text{V})$$

30.112 在图 30-31 中,若 $\mathscr{E}_a=100\ \text{V}$, $r_a=0.8\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $\mathscr{E}_b=36\ \text{V}$, $r_b=0.2\ \Omega$, $R_3=20\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$,求回路电流及发电机的端电压和电源的端电压.

解 ☞ $I=\dfrac{\sum\mathscr{E}}{\sum R}=\dfrac{100-36}{0.8+6+5+0.2+4}=\dfrac{64}{16}=4(\text{A})$

$$\frac{1}{R_{34}}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4},\ V_{t,发}=\mathscr{E}_a-Ir_a=100-(4)(0.8)=96.8(\text{V})$$

$$V_{t,源}=\mathscr{E}_b+I_br_b=36+(4)(0.2)=36.8(\text{V})$$

30.113 在图 30-31 中,若 $\mathscr{E}_a$ 是一电动机的反电动势,大小为 30 V,电枢电阻和电源电阻均为 1 Ω,其它电阻之和为 8 Ω,如果电动机的电流为 2 A,求电源的电动势并求电动机的端电压和电动机的输出功率.

解 ☞ $\dfrac{1}{R_{34}}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$, $R_{34}=4\Omega$,由 $I=\sum\mathscr{E}/\sum R$,得

$$2=\frac{\mathscr{E}_b-30}{1+1+8+8+4},所以\ \mathscr{E}_b=30+(2)(22)=74(\text{V})$$

电动机的端电压为

$$V_{tm}=\mathscr{E}_a+Ir_a=30+(2)(1)=32(\text{V})$$

电动机输出的机械功率为

$$P_{出}=\mathscr{E}_aI=(30)(2)=60(\text{W})$$

30.114 一并励电动机电枢电阻为 0.3 Ω,接在 120 V 的电路中. 问(a)要使起始电流为 10 A,与电枢短暂串联的启动电阻应为多大? (b)反电动势为 118 V 时,电动机的电流和输出功率为多少?

解 ☞ (a)开始时刻,反电动势为零. 所以 $10=\dfrac{120}{0.3+R_s}$,则 $R_s=11.7\ \Omega$.

(b) $I=\dfrac{120-118}{0.3}=6.67(\text{A})$, $P_{出}=\mathscr{E}_aI=(118)(6.67)=787(\text{W})$

30.115 一并励电动机电枢电阻为 0.2 Ω,在 220 V 的电路上运转. (a)如果电枢起始电流必须限定为 11 A,启动电阻应为多大? 若启动电阻除去后,电动机正常运转时的电枢电流为 4 A,问反电动势和输出功率分别为多少?

解 ☞ 开始时刻,$\mathscr{E}_a=0$,则

$$11=\frac{220}{0.2+R_s}, R_s=19.8\ \Omega$$

随着 R_s 除去,有 $I=4$ A,则

$$4=\frac{220-\mathscr{E}_a}{0.2},\quad \mathscr{E}_a=219.2\text{V},\quad P_{出}=\mathscr{E}_a I=(219.2)(4)=876.8(\text{W})$$

30.116 一电动机接到 220 V 的电源上,电枢的起始电流为 25 A,电路中的启动电阻为 8.5 Ω.电枢电阻等于多少?随着启动电阻短接,电枢电流变为 15 A,这时的反电动势为多少?

解 ☞ 开始时,有

$$25=\frac{220}{8.5+r_A},\quad 则\ r_A=0.3\ \Omega$$

电流为 15 A 时,有

$$15=\frac{220-\mathscr{E}_a}{0.3},\quad 得\ \mathscr{E}_A=215.5\ \text{V}$$

第三十一章　感　　应

31.1　自　　感

31.1　描述自感电动势,并由此定义自感系数.

解　☞ 一个线圈自身能产生感应电动势.当线圈中电流变化时,电流产生的穿过线圈的磁通量亦随之发生变化.从而在该线圈中产生自感电动势.

感应电动势 $\mathscr{E}$ 与 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 成正比,$\Delta\Phi$ 与 Δi 成正比.当 i 引起磁通量变化时,$\mathscr{E}=-k\left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)$($k$ 为常数).其中"－"表明,自感电动势起着阻碍电流变化的作用.

k 取决于线圈自身性质,我们称之为线圈的自感系数,符号为 L.则有

$$\mathscr{E}=-L\frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{1}$$

因为 $\mathscr{E}$ 单位 V,i 单位为 A,t 单位为 s,则 L 在国际单位制中单位亨[利],符号 H.而且 $1\,\mathrm{H}=1\,\mathrm{V\cdot s/A}=1\,\mathrm{J/A^2}=1\,\mathrm{Wb/A}=1\,\mathrm{T\cdot m^2/A}$.

31.2　用磁通匝链直接定义自感系数,并且推导出(1)式.

解　☞ 如图 31-1,电流 I 在线圈 C 周围建立了一个磁场,每根磁场线穿过部分或全部线圈.总磁通匝链为 $N\Phi$,其中 N 为线圈匝数,Φ 为穿过每匝线圈的平均磁通量.

当线圈 C 处于真空且无干扰时,磁通匝链与 I 成正比.即

$$N\Phi = LI \tag{1}$$

若在一段时间 Δt 内,I 变化 ΔI(滑动 R 的接触点实现),则其与 Φ 的变化关系可由(1)式得出

$$N\Delta\Phi=L\Delta I \quad 或 \quad -\mathscr{E}=N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

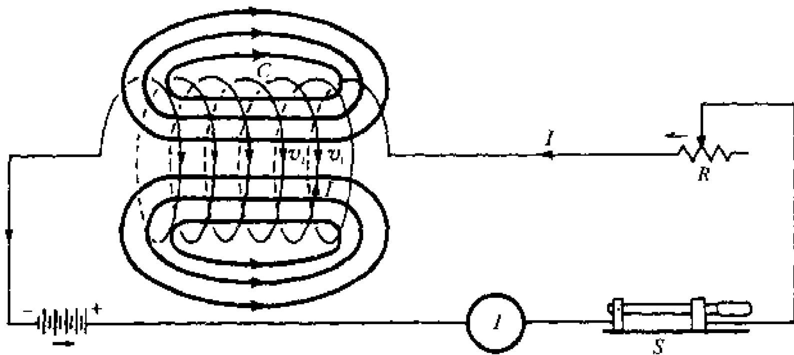


图 31-1

31.3[c]　证明线圈存贮的能量与自感系数的关系式为 $U=\frac{1}{2}LI^2$.

证　☞ 如图 31-1 所示.将开关 S 闭合,回路中电流由 0 变为 I,则电池克服感应电动势做功为

$$U=\int_0^q(-\mathscr{E})\mathrm{d}q=\int_0^t\left(L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)(\mathrm{d}tI)=L\int_0^I I\mathrm{d}I=\frac{1}{2}LI^2$$

能量主要存贮于最终的磁场中,换言之,主要存贮在线圈包围的区域中.

31.4　一个长空心螺线管,截面积为 A,长度 d 中的线圈匝数为 N.求:(a)自感系数,(b)当线圈内材料磁导率为 μ 时的自感系数.

解　☞ (a)我们可以得出

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \text{和} |\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$$

由上两式可有 $L = N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta i}\right|$.

当电流由 0 变为 I 时，磁通量由 0 变为 Φ，因此，$\Delta i = I$，$\Delta\Phi = \Phi$，在此情况下，自感系数（假定为常数）可写为

$$L = N\frac{\Phi}{I} = N\frac{BA}{I}$$

然而，对于空心螺线管而言，$B = \mu_0(N/d)I$，故而得到：$L = (\mu_0 N^2 A)/d$.

(b)当磁导率为 μ 时，B 及 L 将以 μ/μ_0 的系数增大．由此，$L = (\mu N^2 A)/d$．我们可以看到，有铁芯的螺线管自感系数要远大于空心螺线管．

31.5　一个长为 30 cm 的螺线管有 200 匝绕在一个铁芯上．铁芯截面积 1.5 cm^2，如果已知其相对磁导率为 600，则该螺线管自感系数多少？当电流在 0.03 s 内由 0.6 A 减少到 0.1 A 时，螺线管所产生的平均感应电动势为多少？

解　☞ 由题 31.4 可知 $k_m = \mu/\mu_0$

$$L = \frac{k_m\mu_0 N^2 A}{d} = \frac{(600)(4\pi\times10^{-7}\text{H/m})(2000)^2(1.5\times10^{-4}\text{m}^2)}{0.3\text{m}} = 1.51\text{H}$$

由上从而有

$$|\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right| = 1.51\text{H}\,\frac{0.5\text{A}}{0.03\text{s}} = 25\ \text{V}$$

31.6　某螺线管．当中为空气时其自感系数为 3.5mH，插入一铁芯后，自感系数变为 1.3H，则该铁芯相对磁导率多少？

解　☞ L 与磁通量成正比，而磁通量又与 B 成正比．因此

$$k_m = \frac{L}{L_0} = \frac{1.3}{3.5\times10^{-3}} = 371$$

31.7　已知线圈中当电流以 32A/s 变化时，产生的感生电动势为 8 V，求其自感系数 L．

解　☞ 由 $|\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$，我们有 8V = L(32 A/s)则 $L = 0.25$H.

31.8　一 500 匝的线圈，2.5A 的稳恒电流在其中产生的磁通量为 140μ Wb，求其自感．

解　☞ 由题 31.2 可知 $N\Phi = LI$，代入数据 $500(1.4\times10^{-4}\text{Wb}) = L(2.5\text{A})$，即 $L = 28$ mH.

31.9　一铁芯密绕螺线管，长度为 400 mm，截面积为 500 mm^2，线圈匝数为 1000 匝/m．求其自感．（假定铁芯相对磁导率为 500.）

解　☞ 由题 31.4 可知 $L = k_m[(\mu_0 N^2/A)/d]$，而我们又知 $k_m = 500$，$N = (1000)(0.400) = 400$，$A = 5\times10^{-4}\text{m}^2$，$d = 0.400$m，因此

$$L = \frac{(500)(4\pi\times10^{-7})(400)^2(5\times10^{-4})}{0.400}\text{H} = 126\ \text{mH}$$

31.10　某线圈电阻为 15 Ω，稳恒电压源 120 V，产生的自感为 0.6 H，问(a)起始瞬间，(b)回路中电流达到最大值的 80% 时，电流以何比率变化？

解　☞ 回路中有效驱动电压为 120 V，减去感应电动势 $L\frac{\Delta i}{\Delta t}$，即有

$$120\text{V} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = iR$$

(a)起始电流 i 为 0，则

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{120\text{V}}{L} = \frac{120\ \text{V}}{0.6\text{H}} = 200\ \text{A/s}$$

(b)最终稳定时，i 达到最大值 $\frac{120\text{V}}{R}$，换言之，即 $\frac{\Delta i}{\Delta t} = 0$ 时，有 $i = 0.8\,\frac{120\text{V}}{R}$，将该式代入前式即有 $120\text{V} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 0.8\,\frac{120\text{V}}{R}\cdot R$．由此

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{(0.2)(120\text{V})}{L} = \frac{(0.2)(120\text{V})}{0.6\text{H}} = 40\ \text{A/s}$$

31.11 一线圈自感 0.2H，电阻 1Ω，且并联一个 90 V 的电压源.(a)在开关闭合瞬间，回路电流变化率为多少？(b)当 i 变化率为 100 A/s 时，回路电流为多少？

解 ☞ 依据电流列出式子 $90\ \text{V}-(0.2\ \text{H})\left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)-(1.0\ \Omega)i=0$

(a)起始瞬间 $i=0$，则

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{90}{0.2}\ \text{A/s}=450\ \text{A/s}$$

(b)当 $\frac{\Delta v}{\Delta t}=100$ A/s 时，

$$i=\{90\text{V}-[(0.2)(100)]\text{V}\}/1.0\ \Omega=70\ \text{A}$$

31.12 (a)某线圈磁通变化率为 $\dot{\Phi}=30$ Wb/s，当 I 以 60 A/s 变化时，计算 L 及感生电动势 v_i；(b)当 $\dot{I}=-100$ A/s 时，v_i 变为多少？

解 ☞ (a)感生电动势 $v_i=-L\dot{I}=-N\dot{\Phi}$，代入数据得

$$L=\frac{N\dot{\Phi}}{\dot{I}}=0.5\text{H}$$

$v_i=-N\dot{\Phi}=-30\text{V}$ 与原电流方向相反，

(b) $v_i=-L\dot{I}=-(0.5)(-100)=50(\text{V})$ 与原电流方向一致.

31.13 如图 31.2 所示空心螺绕环，截面为圆，线圈间相互绝缘，总匝数为 N，平均半径 $R=100$ mm，截面半径为 $\rho=20$ mm. 计算其自感.

解 ☞ 磁场线形成回路，由安培回路定理知：$B(2\pi r)=\mu_0NI$，或 $B=(\mu_0NI)/2\pi r$. 故而 B 随 $\frac{1}{r}$ 变化，如果 R 对于 ρ 而言足够大，我们有 $\frac{1}{r}\approx\frac{1}{R}$，因此 $B\approx\mu_0n'I$ 为常数 $\left(n'=\frac{N}{2\pi R}\right)$，根据此近似，总磁通量为

$$N\Phi=NBA=(2\pi Rn')(\mu_0n'I)(\pi\rho^2)$$
$$=2\pi^2\mu_0n'^2R\rho^2I$$

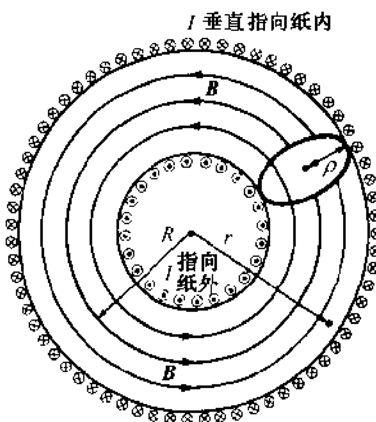


图 31-2

$$L=(N\Phi)/I=2\pi^2\mu_0n'^2R\rho^2=0.6283\ \text{mH}$$

31.14 由上题结果知，一螺绕环自感与一长度为螺绕平均周长 d，且有相同截面 A 的螺线管自感等同.

解 ☞ 利用 31.13 的结果，$L=2\pi^2\mu_0n'^2R\rho^2$ 及 $n'=N/(2\pi R)$，取 $A=\pi\rho^2$，$d=2\pi R$，我们有 $L=\mu_0n'NA=(\mu_0N^2A)/d$，这就是螺线管的自感.(见题 31.4.)

31.15[c] 如图 31-3 示，一电缆内芯半径为 a，外壳金属半径 b，电流 i 从内芯流入，外壳流出. 则单位长度的自感多少？

解 ☞ 在内外线之间仅是内芯对磁场有贡献，且 $B=(\mu_0i)/(2\pi r)$. 考虑一个由内芯表面与外壳围成的矩形区域，将此区域分成微小的宽度 dr 及长度 s，穿过该区域 sdr 的磁通量为 Bsdr，则在 $r=a$，$r=b$ 之间总磁通量为 $\Phi'=\frac{1}{s}\int_a^b\frac{\mu_0is}{2\pi r}\text{d}r=\frac{\mu_0i}{2\pi}\ln(b/a)$，则

$$L'=\frac{\Phi'}{i}=(\mu_0k\pi)\ln(b/a)$$

31.16 两长直平行导线半径均为 a，两者中心轴线间距为 d，且两线交于无穷远处，可视为同一匝线圈的两边. 如果导线内磁通量可忽略，证明单位长度上自感为 $(\mu_0\pi)\ln[(d-a)/a]$.

证 ☞ 因为图 31-4 中每根线与图 31-3 中心线产生相同的磁通量，我们仅需要将 31.15 的结果

加倍，并用 $d-a$ 代替 b 即可，即 $L'=(\mu_0\pi)\ln[(d-a)/a]$

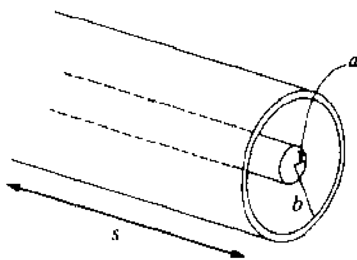


图 31-3

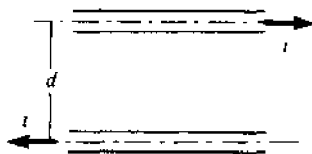


图 31-4

31.17　传输一变化电流 $5\sin400t$A 通过一螺线管. 已知螺线管的自感为 3 mH，如其内阻可忽略，则通过电流时，螺线管两端电压为多少？

解　☞ 感生电动势为

$$V=L\frac{di}{dt}=(3\times10^{-3})(5)(400)\cos400t=6\cos400\,t\,(\mathrm{V})$$

31.18　2A 的稳恒电流在 400 匝线圈中产生的磁通量为 10^{-4}Wb，试计算(a)如果电流在 0.08s 内终止，求平均反电动势，(b)线圈的自感，(c)线圈所存储的能量.

解　☞ (a) $|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\frac{400(10^{-4}-0)\mathrm{Wb}}{0.08\mathrm{s}}=0.5\ \mathrm{V}$

(b) $|\mathscr{E}|=L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$，$L=\left|\frac{\mathscr{E}\Delta t}{\Delta i}\right|=\left|\frac{(0.5\ \mathrm{V})(0.08\mathrm{s})}{(2-0)\mathrm{A}}\right|=0.02\ \mathrm{H}$

(c) $U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(0.02\mathrm{H})(2\mathrm{A})^2=0.04\mathrm{J}$

31.19　自感为 0.48H 的线圈中流过的电流为 5A，求其存储的能量.

解　☞ 能量 $=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(0.48\mathrm{H})(5\mathrm{A})^2=6.0\mathrm{J}$

31.20　线圈自感为 0.008H，当线圈中电流变化率为 110A/s 时产生的感生电动势为多少？当电流为 6A 时，存储的能量为多少？

解　☞ 感生电动势为

$$|\mathscr{E}|=\left|-L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|\right|=(0.008\mathrm{H})(110\ \mathrm{A/s})=0.88\ \mathrm{V}$$

$$\text{能量}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(0.008\mathrm{H})(6\mathrm{A})^2=0.144\mathrm{J}$$

31.21　3 ms 内一回路电流由 24A 变为零，如平均感生电动势为 260 V，则此回路的自感为多少？磁场存储的能量又为多少？

解　☞ 我们有 $\mathscr{E}=-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ 即 $260=-L(-24/0.003)$ 即

$L=32.5\ \mathrm{mH}$，　能量 $=\frac{1}{2}LI^2=9.36\ \mathrm{J}$

31.22　一电磁铁存储的能量为 648J，电流为 9A. 若电流在 0.45 s 内减少至 0，则平均感生电动势为多少？

解　☞ $648\ \mathrm{J}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}I(9\mathrm{A})^2$，　$L=16\mathrm{H}$，于是，我们有

$$|\mathscr{E}|=L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|=(16\mathrm{H})(9\mathrm{A}/0.45\mathrm{s})=320\mathrm{V}$$

31.23　(a)某线圈中 10A 电流产生 3.5Wb 的磁通量，求其自感，(b)在(a)中，I 以 100A/s 减小，则产生的电动势大小及方向如何？(c)当电流为 15A 时，线圈中存储的能量为多少？

解　☞ (a) $N\Phi=3.5\mathrm{Wb}$，因此，利用 $L=(N\Phi)/I$，$L=3.5\mathrm{Wb}/10\mathrm{A}=0.35\mathrm{H}$；

(b)电动势 $\mathscr{E}=-(0.35)(-100)=35(\mathrm{V})$，方向与电流方向一致；

(c)存储的能量为

$$U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(0.35)(15)^2=39.375(\text{J})$$

31.24 假定题31.13中螺绕环有一铁芯,且其相对磁导率为100,即 $\mu=100\mu_0$. 计算,当 $I=15\text{A}$ 时, L 及存储的能量.

解 ☞ 磁导率以100的倍数增加,因而自感亦增加同样倍率,则 $L=62.83\ \text{mH}$.

$$能量=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(62.83\times10^{-3})(15)^2=7.07(\text{J})$$

31.25 长直空心螺线管单位长度匝数为 n',电流 I.(a)计算每米的自感 L',并由此测定 $\mathscr{E}'$,即单位长度中产生电流 I 所作的功,(b)单位体积存储的能量为 $u'=\dfrac{B^2}{2\mu_0}$(1)利用该式证明单位长度螺线管存储能量为 $\frac{1}{2}L'I^2$.

解 ☞ (a)每匝线圈内的磁通量为 $\Phi=BA=\mu_0n'IA$, A 设为截面积,且每米有 n' 匝线圈,则

$$L'=\frac{n'\Phi}{I}=\mu_0n'^2A\,\text{H/m},\quad \mathscr{E}'=\frac{1}{2}L'I^2=\frac{1}{2}\mu_0n'^2AI^2\text{J/m}$$

(b)依据31.25题中的式(1),对于1 m长度的螺线管,由于 B 为常数,每单位长度能量为

$$U'=\frac{1}{2\mu_0}B^2V'=\frac{1}{2\mu_0}(\mu_0^2n'^2I^2)(A\times1)=\frac{1}{2}\mu_0n'^2AI^2=\mathscr{E}'$$

31.26 一长窄螺绕环平均周长为 $2\pi r$,截面积 A,匝数 N,磁导率为 $k_m\mu_0$,证明其单位体积储存能量为 $\frac{1}{2}BH$.

解 ☞ 由题31.13及31.14,用 $k_m\mu_0$ 代替 μ_0,我们有 $L=(N^2\mu_0k_mA)/(2\pi r)$,能量为 $\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}[(N^2\mu_0k_mA)/(2\pi r)]I^2$,又 $n=N/2\pi r$,则能量 $=\frac{1}{2}(\mu_0k_mnI)(nI)(2\pi rA)$,由安培定律知(见29章),能量 $=\frac{1}{2}BHV$,能量/$V=\frac{1}{2}BH$.

31.27 一螺绕环平均周长0.5m,截面积 480mm^2,2500匝,电流为0.6A,绕在一个相对磁导率350的铁环上.求磁场强度 H,磁感应强度 B,磁通量 Φ,自感 L 及存储在磁场中的能量.

解 ☞ 由安培环路定理(见29章)可得

$$H=nI=\left(\frac{2500}{0.5}\right)(0.6)=3000(\text{A/m}),\quad B=\frac{4\pi}{10^7}k_mnI=1.32\text{T}$$

$$\Phi=BA=633\,\mu\text{Wb},\quad LI=N\Phi\Rightarrow L=\frac{N\Phi}{I}=2.64\text{H}$$

$$能量=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(2.64)(0.6)^2=0.475(\text{J})$$

或者 $$能量=\frac{1}{2}(BH)V=\frac{1}{2}(1.32)(3000)(0.5)(4.80\times10^{-4})=0.475(\text{J})$$

31.28 存储在线性磁回路中能量为 $U=\frac{1}{2}\Phi\mathscr{R}$, $\mathscr{R}$ 为磁阻, Φ 为磁通量.

解 ☞ 由题31.2及29.31,有

$$U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}N\Phi I=\frac{1}{2}\Phi^2\mathscr{R}$$

换言之,假定能量密度 $\mathscr{E}$,

$$U=\mathscr{E}V=\left(\frac{1}{2\mu}B^2\right)(lA)=\frac{1}{2}(BA)^2\left(\frac{l}{\mu A}\right)=\frac{1}{2}\Phi^2\mathscr{R}$$

31.2 互感;理想变压器

31.29 依据磁通匝链数定义两回路间的互感.

解 ☞ 在图 31-5 中，C_1 图中由 I_1 产生的磁场的部分磁通量穿过线圈 C_2，C_1 对 C_2 产生的总磁通匝链数为 $N_2\Phi_{12}$，Φ_{12} 为 C_1 产生的穿过 C_2 中每匝线圈的平均磁场线数，而 C_1 产生的磁通量与 I_1 成正比. $N_2\Phi_{12}=M_{12}I_1$ 或 $M_{12}=\dfrac{N_2\Phi_{12}}{I_1}$

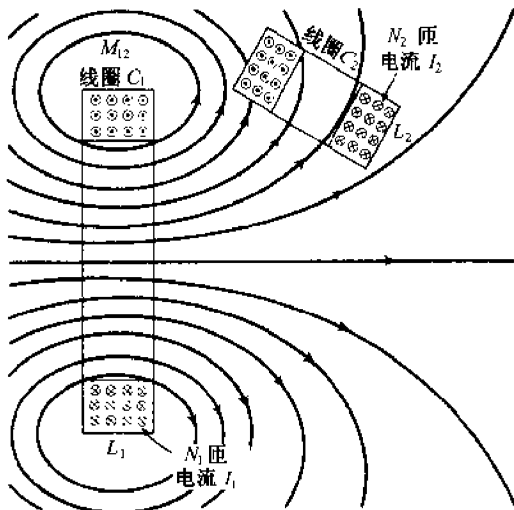


图 31-5

其中比例系数 M_{12} 为常数，已假定两线圈相对位置不变. 类似将 C_1 和 C_2 的作用互换可得到：

$$N_1\Phi_{21}=M_{21}I_2 \text{ 或 } M_{21}=\frac{N_1\Phi_{21}}{I_2}$$

可以证明 $M_{12}=M_{21}=M$，因此两线圈只有一个互感 M，像自感一样，其单位为亨利.

31.30 试描述由于互感产生的感生电动势.

解 ☞ 当一个线圈的磁通量穿过另一线圈时，产生感生电动势. 含有电源的称为初级线圈 p，另一个称为次级线圈 s. 在次级线圈中产生的感生电动势与磁通变化率成比例，由题 31.29，有 $\mathscr{E}_s=N_s\dfrac{\Delta\Phi_{ps}}{\Delta t}=M\dfrac{\Delta i_p}{\Delta t}$. M 为两线圈系统的互感，微分形式为 $\mathscr{E}_s=M\left(\dfrac{di_p}{dt}\right)$.

31.31 讨论互感电动势的符号.

解 ☞ 在所讨论的两回路中，互感电动势的方向依赖于两者的电流正向的选择，两个线圈回路中电动势符号也由两线圈的相对绕向决定. 一种处理方法就是定义 $\mathscr{E}_s=-M\left(\dfrac{\Delta i_p}{\Delta t}\right)$ 而令 M 可正可负. 另一方法就是令 M 仅表示互感大小，即令 $\mathscr{E}_s=\pm M\dfrac{\Delta i_p}{\Delta t}$，根据线圈几何形状及回路绕向的选择来决定 $\mathscr{E}_s$ 的符号. 这里采用后者.

31.32 某线圈中电流以 3A/s 变化，在附近一线圈中产生 7 mV 的感生电动势. 求它们的互感.

解 ☞

$$\mathscr{E}_s=M\frac{\Delta i_p}{\Delta t} \text{ 或 } M=\mathscr{E}_s\frac{\Delta t}{\Delta i_p}=2.33\ \text{mH}$$

31.33 两线圈绕在同一铁芯上，初级线圈有 N_p 匝，当它有 2A 电流通过时，在铁棒中产生的磁通量为 2.5×10^{-4}Wb，如果次级线圈匝数为 N_s，求它们的互感.

解 ☞ 假定次级线圈开路

$$|\mathscr{E}_s|=N_s\left|\frac{\Delta\Phi_s}{\Delta t}\right| \text{ 和 } |\mathscr{E}_s|=M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

$$M=N_s\left|\frac{\Delta\Phi_s}{\Delta i_p}\right|=(1.25\times10^{-4}N_s)\text{H}$$

31.34 两线圈间互感为 8 mH，第一个线圈中电流的变化率为 4 kA/s，则在另一线圈中感生

电动势为多少?

解 ☞ $|e_2| = M\left|\dfrac{\Delta i_1}{\Delta t}\right| = (8\times10^{-3}\text{H})(400\text{A/s}) = 32\text{V}$

31.35 两回路间互感为 6 mH, 如果主线圈中电流 6 ms 内由 40 A 变为 4 A, 则次线圈中产生的平均感生电动势多少?

解 ☞ $|e_2| = M\left|\dfrac{\Delta i_1}{\Delta t}\right| = (16\times10^{-3}\text{H})(36\text{A}/0.006\text{s}) = 96\text{V}$

31.36 两回路互感为 0.3H, 当一回路电流在 0.01s 内由 10A 变为 40A 时, 另一回路中平均感生电动势为多少?

解 ☞ $|\mathscr{E}| = M\left|\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\right| = (0.3)(40.0-10.0)/0.01 = 900(\text{V})$

31.37 一 2000 匝的螺绕管绕在一长铁棒上, 长度 d, 截面积 A, 铁棒相对磁导率为 k_m, 在其顶端有一 50 匝的次级线圈, 找出该系统的互感.

解 ☞ 穿过螺线管的磁通量为 $\Phi = BA = (k_m\mu_0 nI_p)A$, 穿过次级线圈的磁通量亦为 Φ, 我们有

$$|\mathscr{E}_s| = N_s\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \text{ 及 } |\mathscr{E}_s| = M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

由上两式, 有 $M = N_s\left|\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta i_p}\right| = N_s\dfrac{\Phi-0}{I_p-0} = 50\dfrac{k_m\mu_0 I_p A(2000/d)}{I_p} = \dfrac{10^5 k_m\mu_0 A}{d}$

31.38 试描述理想变压器.

解 ☞ 一个理想的变压器就是一个互感器. 其磁通匝链数在初级线圈和次级线圈中是相同的. 对于一个无磁漏的变压器, 次级线圈中电动势与原线圈中电动势之比等于次级线圈匝数 N_2 与初级线圈匝数 N_1 之比.

31.39 一变压器主次线圈间互感为 0.3H, 当初级线圈中电流以 4A/s 变化时, 计算次级线圈中产生的平均感生电动势.

解 ☞ $|\mathscr{E}_s| = M\left|\dfrac{\Delta i_p}{\Delta t}\right| = (0.3\text{H})(4\text{A/s}) = 1.2\text{V}$

31.40 一个理想变压器初级线圈与次级线圈分别为 2000 匝和 100 匝. 如果初级线圈中电压最大值为 120V, 次级线圈中最大电压为多少?

解 ☞ 由题 31.38, $V_2 = (V_1)(N_2/N_1) = (120)(100/2000) = 6(\text{V})$ 这是一个降压器的例子.

31.41 一个变压器中初级线圈电流以 600 A/s 变化时, 次级线圈中产生电动势为 8V, 求互感.

解 ☞ $\mathscr{E}_2 = M\dfrac{\Delta i_1}{\Delta t}$ 或 $8\text{V} = M(600\text{A/s})$, $\quad M = \dfrac{8\text{V}}{600\text{A/s}} = 13.3\text{mH}$

31.42 一理想变压器次级线圈为主线圈匝数的 275 倍, 用在一个 110 V 的回路中, 从次级线圈端可得到的电压为多少? 当次级线圈电流为 50 mA 时, 初级线圈中电流为多少?

解 ☞ $\dfrac{V_s}{V_p} = \dfrac{N_s}{N_p} = 275$, $V_s = 275\times110\text{V} = 30.25\ \text{kV}$

此为一升压器, 当次级线圈闭合时, 如为纯电阻电路, 输出功率为 V_sI_s, 如无磁漏现象, 有 $V_pI_p \approx V_sI_s$, $\dfrac{I_p}{I_s} = \dfrac{V_s}{V_p} = N_s/N_p$, $I_p = (275)\left(\dfrac{50}{1000}\right) = 13.75(\text{A})$.

31.43 一个理想变压器初级线圈与次级线圈匝数分别为 550 及 30, 当输入最大电压为 3.3kV 时, 最大输出电压多少? 假定该变压器效率为 100%, 当次级线圈中电流为 11A 时, 初级线圈中电流为多少?

解 ☞ $\dfrac{V_s}{V_p} = \dfrac{N_s}{N_p} \Rightarrow \dfrac{V_s}{3300} = \dfrac{30}{550}$, $V_s = 180\text{V}$

当效率为 100% 时

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow I_p = \frac{30}{550}\times11 = 0.6(\text{A})$$

31.44 两相邻线圈 A, B 分别为 300 匝、600 匝, 当 A 中电流 1.5A 时, 穿过 A 的磁通量为 1.2×10^{-4}Wb, 穿过 B 的为 0.9×10^{-4}Wb, (a)计算 A 的自感, (b)计算 A, B 间的互

感,(c)A 中电流 0.2s 内减小为零时,B 中产生平均感应电动势为多少?

解 ☞ (a)对于自感有 $L_AI_A = N_A\Phi_A$

$(1.5\text{A})L_A = 300(1.2\times10^{-4}\text{Wb}) \Rightarrow L_A = 24\text{mH}$

(b)对于互感有 $MI_A = N_B\Phi_B$

$(1.5\text{A})M = 600(0.9\times10^{-4}\text{Wb}),\quad M = 36\text{mH}$

(c)$\mathscr{E}_B = M\left(\dfrac{\Delta I_A}{\Delta t}\right) = (36\times10^{-3})(1.5/0.2) = 0.27(\text{V})$

31.45 (a)如图 31-5,C_1 中电流 10A,与 C_2 间有磁通匝链 0.5Wb,则互感为多少?(b)C_2 中电流 10A,对 C_1 的磁通匝链为多少?(c)如 I_1 以 200A/s 增加,C_2 中产生的 $\mathscr{E}_2$ 为多少?

解 ☞ (a)由题 31.29$N_2\Phi_{12} = 0.5\text{Wb}$, $M = M_{12} = 0.5/10 = 50(\text{mH})$.(b)由题 31.29$N_1\Phi_{21} = (0.05)(10) = 0.5(\text{Wb})$这是由于 $I_1 = I_2$,磁通匝链数相等.(c)$\mathscr{E}_2 = M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = 10\text{V}$.

31.46 如图 31-6 示,I_1 与 I_2 可以独立变化(通过滑动变阻器 R_1, R_2).令 $L_1 = 50$ mH, $L_2 = 40$ mH, $M = 15$ mH.(a)I_2 为常数,I_1 以 120A/s 增加,计算每个线圈中电压 v_1、v_2,(b)I_1 以 120A/s 减小,I_2 为常数,计算 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$,(c)I_1 以 120A/s 增大,I_2 以 200 A/s 减小,计算 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$.

解 ☞ 每个线圈均有互感自感.对每个回路有

$$\mathscr{E}_1 = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\quad \mathscr{E}_2 = -L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

(a)$v_1 = -L_1\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + 0 = -6\text{V},\quad v_2 = 0 - M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -1.8\text{V}$

(b)$v_1 = -L_1\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + 0 = +6\text{V},\quad v_2 = 0 - M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = +1.8\text{V}$

(c)$v_1 = -L_1\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = -3\text{V},\quad v_2 = -L_2\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -6.2\text{V}$

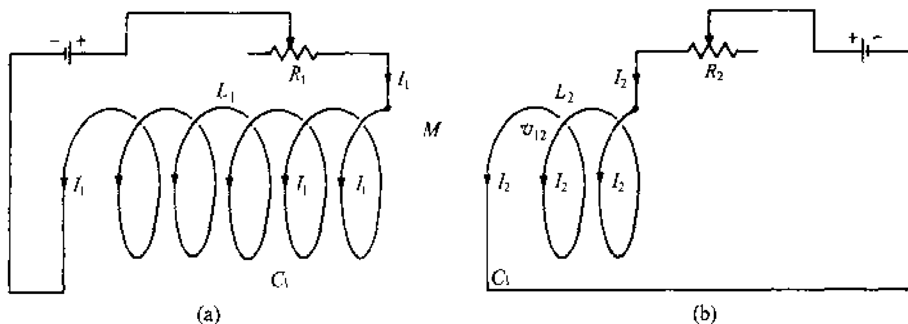


图 31-6

31.47 一内有铁芯的螺绕环,平均周长为 0.4m,截面积 320mm²,其中电流为 0.6A,磁感强度 B 为 0.8T,相对磁导率为 250,用磁通计及一个电流计来测量线圈中的 B,(a)计算流过螺线圈的磁通量,(b)求螺绕环匝数,(c)当开关打开时,电流及磁通量均变为零,求磁通计和螺绕环之间的互感.

解 ☞ (a)已知 $B = 0.8\text{T} = 0.8\text{Wb/m}^2$,因此

$$\Phi = BA = (0.8\text{Wb/m}^2)(320\times10^{-6}\text{m}^2) = 256\mu\text{Wb}$$

(b)$B = (4\pi/10^7)nk_mI$(见题 31.13,31.14),即

$$0.8 = (4\pi/10^7)(N/0.4)(250)(0.6)\quad 得\ N = 1698(匝)$$

(c)$\mathscr{E} = M\left(\dfrac{\Delta i_t}{\Delta t}\right) = N'(\Delta\Phi'/\Delta t)$,即 $M_{i_t} = N'\Phi'$,这里 N' 是磁通计的匝数,Φ' 代表穿过磁通计中单匝线圈的磁通量.故而 $0.6M = 4(256\times10^{-6})$, $M = 1.71$ mH.

31.48[c] 图 31-7 所示为一测量互感 M_{12} 的装置.线圈 1 与一电池,一电流计 A 及一开关相连,线圈 2 与冲击电流计 G 相连.G 用于测量一电流脉冲流过时的总电量.开关闭合后,可读出冲击电流计的稳态读数.试证明 $M_{12}=(q_2R_2)/i_1$,q_2 是冲击电流计测得的电荷量,R_2 是冲击电流计和线圈 2 的总电阻,i_1 是电流表 G 的读数.

证 ☞ 线圈 2 中感生电动势引发一个经过电流计的电流 i_2,故而有 $V_2=i_2R_2$,因为 $i_2=\mathrm{d}q_2/\mathrm{d}t$,从而,如图 31-7,线圈 2 中感生电动势可由下式求出.

$$V_2=-M_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}R_2=-M_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

将上式积分,从 $t=0$ 直至电流计稳定,得到 $R_2q_2=-M_{12}i_1$ 从而有 $M_{12}=-(q_2R_2)/i_1$,负号表示顺时针递增的电流在回路中引起的电动势产生的电流为逆时针,(假定两线圈紧紧靠在一起,且绕制方向相同),无论相对位置及绕制方向如何,磁场的互感均为$(qR_2)/i$,其中 $q\equiv|q_2|$且 $i\equiv|i_1|$

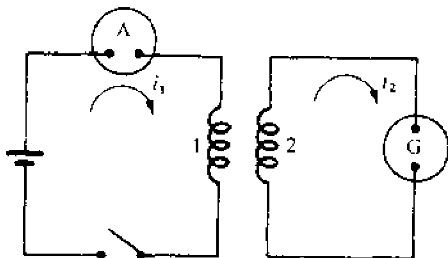


图 31-7

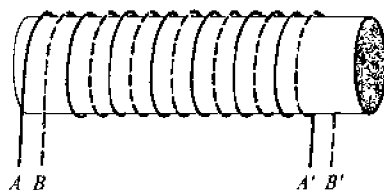


图 31-8

31.49 如图 31-8 所示,线圈 AA'(实线)和 BB'(虚线)绕在一个长塑料管上,A,B 的末端连在一起,电流源 i 连接于$A'B'$之间.若 L 为自感,M'为互感,证明产生的感生电动势为 $-(L_A+L_B-2M_{AB})(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$.

证 ☞ 每个线圈自感是独立的,如末端 A 和 B 连在一起,流过线圈 AA'的电流与流过 BB'的电流方向相反,则 BB'中产生的感生电动势为

$$V_B=-L_B\frac{\mathrm{d}i_B}{\mathrm{d}t}+M_{AB}\frac{\mathrm{d}i_A}{\mathrm{d}t}$$

M_{AB}为互感系数.因为线圈串联.则

$$i_A=i_B=i,\ V_B=-(L_B-M_{AB})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

同样 $V_A=-(L_A-M_{AB})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.整个装置产生的感生电动势为 V_A 与 V_B 之和

$$U_1=V_A+V_B=-(L_A+L_B-2M_{AB})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

31.50 假定题 31.49 中将 A,B'连在一起,电流源连在 A',B 间,证明感生电动势为 $-(L_A+L_B+2M_{AB})(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$.

证 ☞ 当 A,B'相连且电流源连在 A',B 间时,流过线圈 AA'的电流与流过 BB'的相同,因此,对于一已知方向的电流,AA'对磁场的贡献与 BB'的方向相同.这就意味着,互感与自感产生的感生电动势相互增强,特别有

$$V'_B=-L_B\frac{\mathrm{d}i_B}{\mathrm{d}t}-M_{AB}\frac{\mathrm{d}i_B}{\mathrm{d}t}=-(L_B+M_{AB})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

类似有

$$V'_A=-(L_A+M_{AB})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

总电动势

$$V=V'_A+V'_B=-(L_A+L_B+2M_{AB})\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

31.51 如果图 31-8 中两等长线圈有相同的匝数 N,且 $L_A=0.010\mathrm{H}$,则等效自感系数为多

少?(a)在题 31-49 条件下,(b)在题 31-50 条件下.

解 ☞ 由题意 $L_B=\frac{\mu_0 N_B^2\pi r_B^2}{l_B}=\frac{\mu_0 N_A^2\pi r_A^2}{l_A}=L_A$,$N_A=N_B=N$,单位长度上匝数 $n_A=\frac{N_A}{l_A}=\frac{N_B}{l_B}=n_B$,互感为

$$M_{AB}=\pi\mu_0 n_A n_B l_A r_A^2=\frac{\mu_0 N^2\pi r_A^2}{l_A}=L_A=L_B$$

(注:尽管上述结果只是在特殊情况下导出的,事实上,对于任意两个相同的自感线圈 A 和 B,只要 A 产生的磁通量,完全穿过 B,同样 B 的磁通量全部穿过 A,则有 $M_{AB}=L_A=L_B$ 成立).

(a)在题 31-49 所述串联条件下,$L_A=L_A+L_B-2M_{AB}=2L_A-2L_A=0$.(b)在题 31-50 所述的串联条件下,$L_b=L_A+L_B+2M_{AB}=4L_A=0.04\text{H}$.

31.52[c] 图 31-9 中,计算矩形线圈与长直导线间的互感.

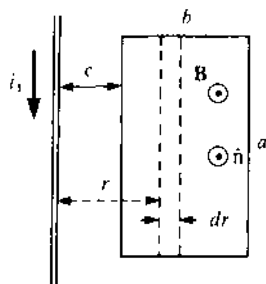


图 31-9

解 ☞ 我们假定直导线中有向下的电流 i_1,它产生磁场 $B_1=(\mu_0 i_1)/2\pi r$,r 为距离导线的长度,由右手螺旋法则,$\boldsymbol{B}_1$ 的方向穿过矩形线圈指向纸外.

$$\Phi_{12}=\int B_1 \mathrm{d}A_2=\int B_1 \mathrm{d}A_1$$

因为 $\mathrm{d}A_2=a\mathrm{d}r$,$r$ 从 $r_{\min}=c$ 变化到 $r_{\max}=c+b$,我们求得

$$\Phi_{12}=\int_c^{c+b}\left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\right)\cdot a\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 i_1 a}{2\pi}\int_c^{c+b}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 i_1 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{c}\right)$$

因此互感为 $M=M_{12}=\frac{\Phi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{c}\right)$.

31.53[c] 一个 N 匝的线圈紧绕在一个 n 匝/m 的螺线管中截面上,两者截面积近似相等为 A,螺线管中电流 $i=i_0\cos\omega t$,该系统互感为多少?

解 ☞ 螺线管中 $B=\mu_0 n i_1$.穿过线圈的磁通量为 $\mu_0 niA$,产生的感生电动势为 $-\mu_0 nAN(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)=\mu_0 nNA2\pi f i_0\sin 2\pi ft$,从已定义的互感可知,感生电动势 $=-M\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)$,则 $M=\mu_0 nAN$.

31.54 一水平线圈(N 匝,截面积 A_c)放在一长螺线管(n 匝/m,截面积 A_s)内,且与螺线管轴线所成角度为 θ,当螺线管有电流 $i=i_0\cos\omega t$ 时,求线圈中感生电动势.线圈和螺线管的互感为多少?(设两线圈绕向相同,电流为正的规定方向也相同)

解 ☞ 螺线管内 $B=\mu_0 ni$,穿过线圈的磁通量为 $\mu_0 niA_c\cos\theta$,由此,感生电动势 $V=-N\mu_0 nA_c\cos\theta(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)=\mu_0 nNA_c 2\pi f i_0\cos\theta\sin 2\pi ft$,又 $V=-M\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)$,两者相比,可得,$M=\mu_0 nA_c N\cos\theta$.

31.55[c] 如图 31-10 示,长直导线中电流为 i,穿过矩形线圈的磁通量为多少?两者间互感多少?当 $b=c$ 时答案又为多少?

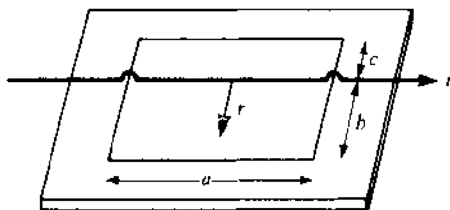


图 31-10

解 ☞ 本题与题 31.52 类似,当 $0\leqslant r\leqslant c$ 时,导线两边磁通量大小相等,方向相反,相互抵消,只有当 $c<r<b$ 时不抵消,因此

$$\Phi=[(\mu_0 ia)/(2\pi)]\int_c^b \mathrm{d}r/r=[(\mu_0 ia)/2\pi]\ln(b/c)$$

则
$$M=[(\mu_0 a)/2\pi]\ln(b/c)$$

如果 $b=c$,上面两者答案均为 0.

31.56 找出两线圈存储的总能量表达式,其自感互感分别为 L_1、L_2、M,通过的电流分别为 I_1、I_2.

解 ☞ 由题意,我们有

$$\mathscr{E}_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \mathscr{E}_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad (1)$$

设 $\mathrm{d}t$ 内两线圈流过的电量为 $\mathrm{d}q_1$、$\mathrm{d}q_2$，则

$$\mathrm{d}W = -\mathscr{E}_1\mathrm{d}q_1 - \mathscr{E}_2\mathrm{d}q_2 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_1 \mp M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_1 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_2 \mp M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q_2$$

而 $i_1 = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$，$i_2 = \mathrm{d}q_2/\mathrm{d}t$，我们有

$$\mathrm{d}W = L_1 i_1\mathrm{d}i_1 + L_2 i_2\mathrm{d}i_2 \mp (Mi_1\mathrm{d}i_2 + Mi_2\mathrm{d}i_1)$$
$$= L_1 i_1\mathrm{d}i_1 + L_2 i_2\mathrm{d}i_2 \mp M\mathrm{d}(i_1 i_2)$$

两边积分得

$$U = \int\mathrm{d}W = L_1\int_0^{I_1} i_1\mathrm{d}i_1 + L_2\int_0^{I_2} i_2\mathrm{d}i_2 \mp M\int_0^{I_1I_2}\mathrm{d}(i_1 i_2)$$
$$= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \mp MI_1I_2 \quad (2)$$

31.57 证明两线圈间互感必比其自感的几何平均数小.

证 ☞ 令 $x = I_2/I_1$，由题 31.56 的式(2)有 $U = \frac{1}{2}I_1^2(I_2x^2 \mp 2Mx + L_1)$ 因为能量恒为正，则 $\Delta = 4M^2 - 4L_1L_2 < 0$，即 $M < \sqrt{L_1L_2}$.

31.58 如图 31-5 所示，线圈 C_1，C_2 自感分别为 $L_1 = 200$ mH，$L_2 = 120$ mH，互感为 $M = 50$ mH. 当 $I_1 = 20$A，$I_2 = 15$A 时，计算存储的总能量.

解 ☞ 由其相对位置可判断互感前符号为负，则由 31.56 知，$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 = 68.5$J

31.59 计算下列两种情况下总自感，设两线圈相距很远，互感可忽略. (a)串联，(b)并联.

解 ☞ (a)如图 31-11(a)

$$\mathscr{E}_{ab} = -L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad 则\ L = L_1 + L_2$$

(b)如图 31-11(b)

$$\begin{cases} \mathscr{E}_{ab} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -L_2\frac{\Delta i_2}{\mathrm{d}t}, \quad i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \frac{\mathscr{E}_{ab}}{L} = \frac{\mathscr{E}_{ab}}{L_1} + \frac{\mathscr{E}_{ab}}{L_2} \\ \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \mathscr{E}_{ab} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

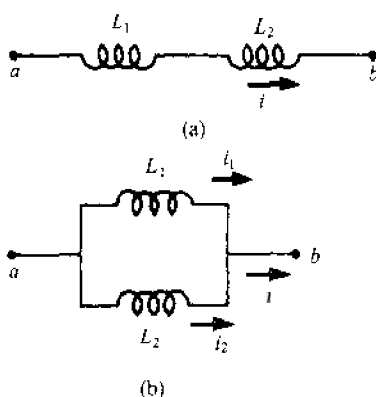


图 31-11

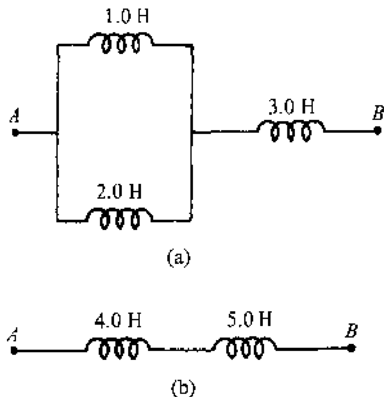


图 31-12

31.60 若图 31-12(a)中三线圈互相远离，线圈间互感可不考虑，其总自感为多少?

解 ☞ 令 $L_1 = 1.0$H，$L_2 = 2.0$H，$L_3 = 3.0$H.

由题 31.59，左边两个并联线圈，合自感为 L_p，则

$$\frac{1}{L_p}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2},\quad L_p=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}=\frac{2}{3}\mathrm{H}$$

再考虑 L_3 与 L_p，则

$$L_s=L_p+L_3=\frac{2}{3}\mathrm{H}+3\mathrm{H}=3\frac{2}{3}\mathrm{H}=3.67\mathrm{H}$$

31.61 如图 31-12(b)中两线圈距离减小，则 A、B 间自感系数将如何变化？为什么？

解 ☞ 考虑绕向一致的螺线管，当两者距离变小时，其自感变大，这是因为其中一个线圈产生的磁场将穿过另一线圈，且与另一线圈自身磁场方向一致，两者相互加强。

另一方面，如两线圈绕向相反，则 A，B 间自感系数将随距离减小而减小，这是因为，一个线圈产生的穿过另一线圈的磁场方向与另一线圈自身磁场方向不一致，两者相互减弱。

第三十二章　电　　路

32.1　R-C，R-L，L-C，R-L-C 电路；时间响应

32.1　描述图 32-1 所示的 R-C 电路的变化过程和时间常数，若移去电源，又将如何？

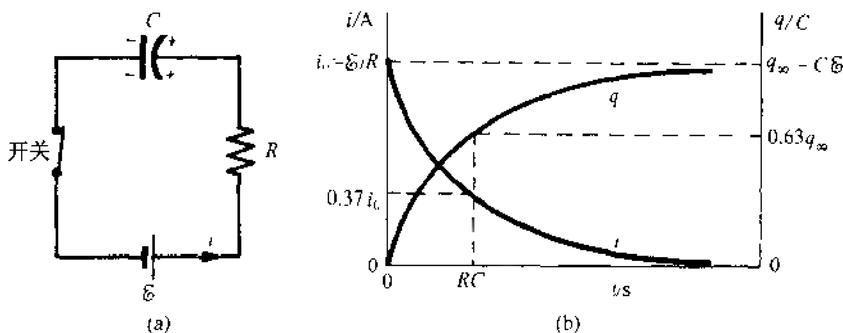


图 32-1

解　☞ 考虑图 32-1(a)所示电路，电容最初不带电．如果闭合开关，电路中的电流和电容的电量将作图(b)所示的变化，根据基尔霍夫电压定律有

$$-iR - V_c + \mathscr{E} = 0 \quad 即 \quad i = \frac{1}{R}(\mathscr{E} - V_c)$$

其中 V_c 为电容两端电压．在开始的瞬间，有

$$V_c = 0, i_0 = \mathscr{E}/R$$

随着时间流逝，V_c 不断增大，而 i 不断减小．当电流降至 $e^{-1}i_0 = 0.368i_0$ 所用的时间值为 RC．这里的 RC 即为该电路的时间常数．

在图(b)中还可以看到电容电量随时间变化的规律，在 $t = RC$ 时，q 达到初始值的 0.632．当带电 q_0 的电容，通过电阻 R 放电时，其放电电流的变化曲线与充电时的曲线一致，而电量 q 的变化曲线与电流变化曲线相类似，在 $t = RC$ 时 $i = 0.368i_0$，$q = 0.368q_0$．

32.2　某串联电路，电源为 12V，一只开关串上一个 12MΩ 的电阻，一只 2μF 的电容．电容开始不带电，如果将开关闭合，(a)求闭合瞬间的电流，(b)电流降至 $0.37i_0$ 需耗时间多少？(c)此时电容的电量 q 为多少？(d)电容最后带电量为多少？

解　☞ (a)电路的方程符合 32-1(a)所示的电路，在任何时刻都有 $12V - iR - V_c = 0$，其中 V_c 为电容两端电压，在开始的瞬间，q 值为零，因此有 $V_c = 0$，这样 $i_0 = 12V/10^6\Omega = 12\mu A$．(b)利用 32.1 题的结论，$i$ 降至 $0.37i_0$，所耗时间 $t = RC = 10^6\Omega \times 12 \times 10^{-6}F = 2$ s．(c)在 $t = 2$ s 时，电容上的电量增到 $0.63q_m$，q_m 为最终电容的电量．(d)到最后，即稳定状态时，有 $i = 0$，则 $v_c = 12V$，因此有 $q_m = CV_c = 2 \times 10^{-6} F \times 12 V = 24\ \mu C$．

32.3　一个 5 μF 的电容，开始充电至 20kV，切断电源后将其与一个 7 MΩ 的电阻相连放电．电容最初的放电电流为多少？电压降至原来值(20 kV)的 37% 耗时多少？

解　☞ 该电路满足如下方程：$V_c - iR = 0$．

其中 V_c 为电容两端电压，在最初的瞬间 $V_c = 20$ kV，所以 $i = V_c/R = 20 \times 10^3\ V/7 \times 10^6\ \Omega = 2.86$ mA．而电容两端电压值与其电量一样，将在时间常数值的时间内降至原来的 37%，因而耗时 t 为

$$t = RC = 7 \times 10^6\Omega \times 5 \times 10^{-6}F = 35s$$

32.4　一个由未充电的 2μF 的电容，2MΩ 的电阻，100 V 的电源串联而成的电路，问在下列条件下，电路的电流为多大？电容的电量又为多大？(a)经过一个时间常数后，(b)设 q_m 为最后电容的带电量，在 q 达到 $90\%q_m$ 时刻．

解 ☞ 根据题 32-1 的结论，$q - V_c - iR = 0$. 在 $t = 0$ 时：$V_c = 0$ 且 $i_{\max} = \frac{q}{R} = 100\text{V}/10^7\Omega = 10\mu\text{A}$，而且在 $i \to 0$ 时，V_c 达到最大值 $\mathscr{E}$，即 $V_{c\max} = 100\text{V}$，因此，$q_{\max} = 2\times10^{-6}\text{F}\times100\text{V} = 200\mu\text{C}$. (a) 一个时间常数后，$i = 0.368 i_{\max} = 3.68\mu\text{A}$. 而且 $q = 0.632 q_{\max} = 126\mu\text{C}$. (b) $q_m = q_{\max}$ 则 $q = 0.9 q_{\max} = 180\mu\text{C}$. 而

$$V_c = q/c = 90\text{V}, \quad i = (q - V_c)/R = (100 - 90)\text{V}/10^7\Omega = 1\ \mu\text{A}$$

32.5 一个已充电电容与一只 10kΩ 的电阻串联，放电. 在 7s 后电容两端电势差降为原来的 37%，问电容 C 为多大？

解 ☞ 根据题 32-1，电量在一个时间常数内降为原来的 37%. 而 $V_c = q/c$，即 V_c 与 q 成正比. 因此根据题给数据有 $RC = 7\text{s}$ 即

$$C = 7\text{s}/10^4\Omega = 700\ \mu\text{F}$$

32.6[c] 分析图 32-2 所示的电路，假设 v 为常数，而在 $t = 0$ 时有 $q = 0$($t = 0$，表示开关闭合的瞬间).

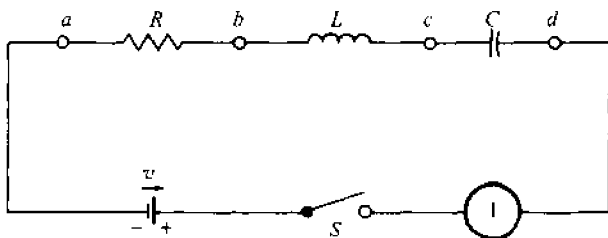


图 32-2

解 ☞ 根据一阶电路的电压方程：

$$R \cdot \dot{q} + \frac{1}{C}q = V \tag{1}$$

因为 $q(t) = e^{-t/RC}$，代入其中便可得到

$$q(t) = C_1 e^{-t/RC} + CV$$

根据初始条件有 $0 = C_1 + CV$，因此

$$q(t) = Cv(1 - e^{-t/RC}) \tag{2}$$

从(2)式我们推出如下结论

电流 $I = \dot{q} = (v/R)\cdot e^{-t/RC}$

电阻两端电压 $v_{ab} = RI = ve^{-t/RC}$

电容两端电压 $v_{cd} = q/c = v(1 - e^{-t/RC})$ (3)

电源输出功率 $P = Iv = (v^2/R)\cdot e^{-t/RC}$

电容储能 $U_c = \int v_{cd}\,dq = \frac{1}{2}Cv^2(1 - e^{-t/RC})^2$

在 $t \to \infty$ 时，电路趋向稳定状态，变化速度取决于 RC 值的大小：$q \to Cv$，$I \to 0$，$v_{ab} \to 0$，$v_{cd} \to v$，$P \to 0$，$U_c \to \frac{1}{2}Cv^2$

32.7 题 32-6 中 RC 表示电路的时间常数. (a)时间常数必有时间的量纲，这样上题(2)式中的指数才是一纯数，试推导之. (b)如果 RC 电路中的电流在最初的 1 ms 内减少 50%，时间常数等于多少？

解 ☞ (a) $RC = [\Omega]\cdot[\text{F}] = \left[\frac{\text{V}}{\text{A}}\right]\cdot\left[\frac{\text{C}}{\text{V}}\right] = \left[\frac{\text{C}}{\text{A}}\right] = \left[\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{A}}\right] = [\text{s}]$

(b)从 $I_0 = I_0 e^{-t/RC}$. 我们可以知道：如果时间以 ms 为单位，则有 $\frac{1}{2} = e^{-RC}$，解得 $RC = \frac{1}{\ln2} = 1.44(\text{ms})$ 这是可以做到的，比方说 $R = 144\Omega$ 时，$C = 10\mu\text{F}$.

32.8 考虑一个没有感应电动势的电路：(a)假设电容最初带电量为 q_0，求电容在各时刻的电量，(b)试证明电容储能的减少等于电阻消耗的能量.

解 ☞ (a)根据题 27-141 可以知道, $q=q_0e^{-t/RC}$.

(b)对(a)的结果微分 $i=-[q_0/RC]e^{-t/RC}$, 而电阻消耗的功率 $P_R=Ri^2=[q_0^2/RC^2]\cdot e^{-2t/RC}$, 在任意时刻储存在电容中的能量为 $U_c=\frac{1}{2}CV_c^2=\frac{1}{2}q^2/C=\frac{1}{2}(q_0^2/C)e^{-2t/RC}$, 对时间求导可以得到 $\frac{dU_c}{dt}=-[q_0^2/RC^2]e^{-2t/RC}$, 其中负号表示能量随时间增大而减少, 因而有 $P_R+dU_c/dt=0$, 即 $\left|\frac{dU_c}{dt}\right|=P_R$ 得证.

32.9 描述图 32-3(a)所示电路的电流变化过程, 以及相关的时间参数.

解 ☞ 开关闭合的瞬间, 电路中的电流如图 32-3(b)所示, 电流不能一下子到达最大值的原因是: 线圈中变化的电流产生阻碍电流增大的感应电动势. 在 $t=L/R$ 时, 电流增大至最终值的 63.2%. 时间足够长后, 电流变化很慢, 以至感应电动势可以忽略. 有 $i=i_\infty=\mathcal{E}/R$.

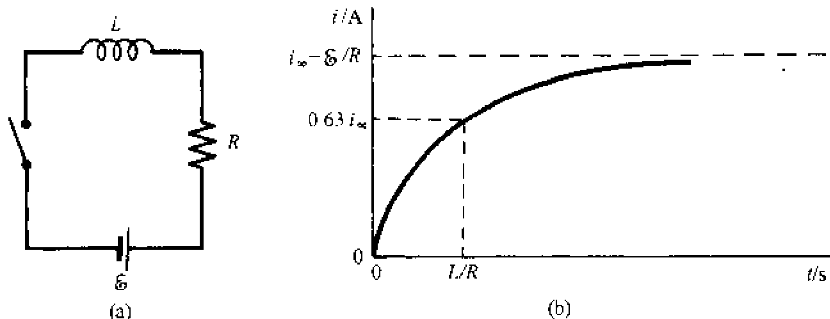


图 32-3

32.10 一个 1.5H 的电感与 0.6Ω 的电阻串联, 给他们接上 12V 的电源, 求多长时间后, 电流达到最终值的 63%? 最终的电流为多大?

解 ☞ $t=L/R=1.5\text{H}/0.6\Omega=2.5\text{s}$

时间足够长后, 电流稳定下来, $I=\mathcal{E}/R=\frac{12\text{V}}{0.6\Omega}=20\text{A}$.

32.11 一个 60V 的稳压源与一个电阻为 30Ω, 自感为 8mH 的线圈串联, 开关闭合后, 问: 电流变化的速率在一开始为多大? 当电流以 500A/s 变化时电路电流为多大? 最终的电流为多大?

解 ☞ 电路如图 32-4 所示. 有方程 $\mathcal{E}-L\left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)-Ri=0$, 在 $t=0, i=0$ 时, $60-0.008\frac{\Delta i}{\Delta t}=0$, 解之得 $\frac{\Delta i}{\Delta t}=\frac{60}{0.008}=7500(\text{A/s})$, 当 $\Delta i/\Delta t=500\text{A/s}$ 时, 方程可以写成

$$60-(0.008\times 500)-30i=0, \text{即 } 30i=60-4$$

$$i=1.867\text{A}$$

到最后 $\Delta i/\Delta t=0$, 有 $\mathcal{E}-L(0)-30I_F=0$

$$I_F=\frac{60}{30}=2(\text{A})$$

32.12 一个带铁芯的螺线管与一个 6V 的电源相连, 当电流达到最大值的 63% 时耗时 0.75s, 当把铁芯取出后, 需时间 $t=2.5\text{ms}$ 才能达到最大值的 63%. 计算: (a)铁芯的相对磁导率, (b)如果最大电流能达到 0.5A, 求 L 的值.

解 ☞ (a)有铁芯时, 时间常数 $L_1/R=0.75\text{s}$, 移去铁芯后, 电感改变, 而电阻不变, 新时间常数为 $L_2/R=0.0025\text{s}$, 两者相比可得 $L_1/L_2=300$.

其实, 由于螺线管取出铁芯前后匝数和大小不变, 因而有 $L_1/L_2=\Phi_1/\Phi_2=B_1/B_2=K_m=300$.

(b)最大电流 i_{max} 满足 $\mathcal{E}=Ri_{max}$, 代入得 $R=12\Omega$. 由 $L_2/R=0.0025\text{s}$ 可以得到 $L_2=0.03\text{H}$.

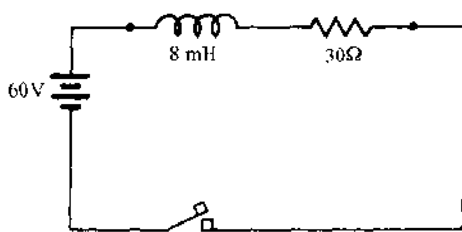


图 32-4

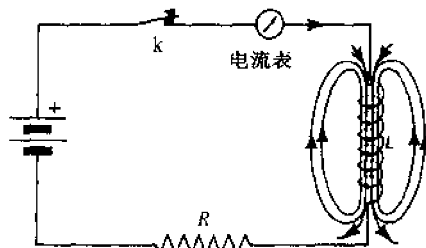


图 32-5

32.13　如图 32-5 所示的电路，电源为 50V，电阻为 200Ω，一个低阻电感为 25mH，求：开关闭合瞬间电流的变化率，当电流以 400 A/s 变化时电流的值以及稳定后电流的值.

解　根据电压方程 $\mathscr{E}-L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}-Ri=0$，初始 $i=0$，因此有 $50-0.025\dfrac{\Delta i}{\Delta t}-R\times 0=0$. 在 $t=0$ 时，有 $\left.\dfrac{\Delta i}{\Delta t}\right|_{t=0}=\dfrac{50}{0.025}=2000(\text{A/s})$. 当 $\Delta i/\Delta t=400\text{A/s}$ 时

$$50-(0.025\times 400)-20i=0,\quad i=2\text{A}$$

稳定后：$50-L(0)-20I_F=0$ 即 $I_F=\dfrac{50}{20}=2.5(\text{A})$.

32.14　图 32-5 所示电路，电源为 30V，电阻为 6Ω，电感为 8 mH，根据基尔霍夫第二定律，闭合开关后，i 与 i 的变化率相互制约. 问：当开关闭合时，电流变化率为多大？求当电流为 3A 时产生的感应电动势，以及此时线圈储存的能量.

解　根据题 32-13 有 $\mathscr{E}-L\left(\dfrac{\Delta i}{\Delta t}\right)-Ri=0$，在 $t=0$，$i=0$ 时有 $30-L\left.\dfrac{\Delta i}{\Delta t}\right|_{t=0}-R\cdot 0=0$. 解得

$$\left.\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|_{t=0}=\frac{30}{0.08}=3750(\text{A/s})$$

当 $i=3\text{A}$ 时，$30-0.008\dfrac{\Delta i}{\Delta t}-3\times 6=0$，解得

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t}=30-18=12(\text{V})$$

能量 $U=\dfrac{1}{2}Li^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{1000}\right)\cdot 3^2=0.036(\text{J})$.

32.15[c]　试分析 R-L 电路(如图 32-2 去掉电容 C)，假设 v 为恒量，在 $t=0$ 时，即开关闭合瞬间，$I=0$.

解　$L\ddot{q}+R\dot{q}=v$　即　$L\dot{I}+RI=v$. 因为该方程在形式上与 32-6(1) 一致，初始条件也一样. 其解便可类推得到 $I(t)=\dfrac{v}{R}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$，由此可以得到 $t=0$ 时 $q=0$. 且有

电量　$q=\int_0^t Idt=\dfrac{v}{R}t-\dfrac{vL}{R^2}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$

电阻两端电压　$v_{ab}=RI=v(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$

电感的电压　$v_{bc}=v-v_{ab}=v\mathrm{e}^{-Rt/L}$

电源消耗功率　$P=Iv=\dfrac{v^2}{R}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$

电感储能　$U_L=\dfrac{1}{2}LI^2=\dfrac{Lv^2}{2R^2}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})^2$

时间常数 L/R 在 32-9 中已讨论过.

32.16　一个 20mH 的电感与 2kΩ 电阻，一只开关，一个 12V 的电源相串联. 这个电路的时间常数为多大？在开关闭合后多长时间，电流达到稳定值的 99%？

解　根据题 32-15，$\tau=L/R=10\mu\text{s}$. 电流遵循方程 $i=i_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$. 要 $-(i-i_0)/i_0=0.01$ 则　$100=\mathrm{e}^{t/\tau}$. 注意到 $\ln 100=4.6$　代入得 $t=4.6\tau=46\mu\text{s}$.

32.17　一电感 L，一电阻 R，一只开关和一电动势为 V_0 的电源相串联. 开始感应电动势为 v_0. 在 $t=0$ 时，闭合开关. 求：(a)在 $t=0$ 时电流值 I，(b)在 $t=0$ 时的感应电动势，

(c)在 $t=\frac{1}{2}(L/R)$时的感应电动势，(d)在 $t=L/2R$ 时的 i 值.

解 ☞ (a)在 $t=0$ 时 $i=0$，或者说 $i=I_0(1-e^{-Rt/L})$. $I_0=V_0/R$，在 $t=0$ 时 $i=0$. (b) $|\mathscr{E}|=V_0$，因为 $t=0$ 时 $iR=0$，所以电压都加在电感上. 或者，由公式 $|\mathscr{E}|=L\frac{di}{dt}=V_0e^{-Rt/L}$ 得 $t=0$，$|\mathscr{E}|=V_0$. (c)在 $t=L/2R$ 时，$\mathscr{E}=V_0e^{-1/2}=0.607V_0$. (d) $i=\left(\frac{V_0}{R}\right)\cdot(1-e^{-1/2})=0.393V_0/R$.

32.18[c] 一个串联电路由一个电感线圈 L，一个电阻 R，一只开关，一个电源 V 组成，求以下的量(开关闭合后)：自感电动势，电源输出功率，电阻消耗功率，电感存储能量的速率.

解 ☞ 令 $\tau=L/R$，电流最大值 $I_{max}=V/R$，因而 $i=\frac{V}{R}(1-e^{-t/\tau})$. 当 $t=\tau$ 时，$i=0.63V/R$. 自感电动势 $=-L(di/dt)=-[(LV)/R\tau]e^{-t/\tau}=-Ve^{-t/\tau}$，在 $t=\tau$ 时为 $-0.37V$.

电源输出功率等于 Vi，在 $t=\tau$ 时，$P_s=0.63V^2/R$. 而电阻消耗功率为 $P_R=i^2R$ 或者写成 $0.40V^2/R$. 剩余能量 $0.23V^2/R$ 便存储在电感中. 这一结果也可求 $\frac{d[Li^2/2]}{dt}$ 得到.

32.19 试证明：对图 32-6 所示电路，通过电源的电流在开关闭合的瞬间达到最大值 V/R. 设并联部分的两支路的时间常数相同，忽略电源内阻和导线电阻.

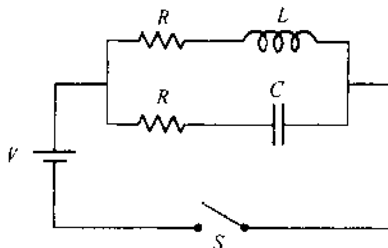


图 32-6

证 ☞ 令 $i_L(t)$ 表示 R-L 支路的电流. 而 $i_c(t)$ 表示 R-C 支路的电流，通过电源的电流 $i(t)=i_L(t)+i_c(t)$. 根据题意有

$$i_L(t)=\frac{V}{R}(1-e^{-(R/L)t}) \tag{1}$$

$$i_c(t)=\frac{V}{R}e^{-t/RC} \tag{2}$$

$$i(t)=i_c(t)+i_L(t)=\frac{V}{R}[1-e^{-Rt/L}+e^{-t/RC}] \tag{3}$$

R-L 支路的时间常数为 $\tau_L=L/R$，R-C 支路的时间常数为 $\tau_c=RC$ 若 $\tau=L/R=RC$，代入后可得

$$i(t)=\frac{R}{V}[1-e^{-\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{t}{\tau}}]=\frac{V}{R}$$

上式在 $t>0$ 时任一时刻的成立，这正是所需证明的结果.

32.20 一种冲击电流计可用于测量通过它的电量. 设想一个有 N 匝的线圈与该电流计的一端相连，线圈与电流计的总电阻为 R，如果将线圈迅速放在一个U型的磁铁中间，通量会迅速从 0 增至 Φ_{max}，试证明：流过电流计的电量 Q 可由 $Q=N\Phi_{max}/R$ 求得. 通过测 Q 可以得 Φ，以及磁铁产生的 B.

证 ☞ Δt 时间以后，流过电流计的平均电流为

$$i_{avg}=\mathscr{E}_{avg}/R=\frac{1}{R}\frac{N\Phi_{max}}{\Delta t},\quad Q=i_{avg}\Delta t=N\Phi_{max}/R$$

32.21 一个冲击电流计的电阻为 240Ω，其满偏电量为 500μC. 串上一个 320 匝的线圈以及一个 160Ω 的电阻用于测量小于 1.4T 的磁场，可以观察从场中突然移去线圈时产生的偏转现象. 试求不超过满偏条件下该线圈的最大面积.

解 ☞ 利用 32-20 的结论，有 $5\times10^{-4}\text{C}=\frac{320\times(1.4\text{T})A}{(240+160)\Omega}$，得 $A=446\text{mm}^2$.

32.22 一个线圈 100 匝，半径为 6mm，电阻为 40Ω，放在电磁铁的两极间，突然移走线圈，32μC 的电量通过与之相联的电流计，电流计的电阻为 160Ω，求磁场 B.

解 ☞ 根据题 32-20 的结果 $Q=\frac{N\Phi}{R}=\frac{NB\cdot A}{R}$，$32\times10^{-6}=\frac{100B(36\pi\times10^{-6})}{40+160}$

解之得 $B=0.566\text{T}$.

32.23[c] 试分析简单的 L-C 电路,假设 V 为恒量,在 $t=0$ 时 $q=q_0$,$I=0$,电容已充电,电路图如图 32-2 所示,其中 $R=0$.

解 ☞ 理想情况下,电阻为零,这种电路在本质上有别于按指数衰减的 R-C 或 R-L 电路. L-C 的电路方程可写成

$$L\ddot{q}+\frac{1}{C}q=V \tag{1}$$

令(1)式中 $V=0$,可以得到瞬变函数 $q_1(t)=\sin\omega_0 t$, $q_2(t)=\cos\omega_0 t$. 其中 $\omega_0\equiv(LC)^{-1/2}$被称作谐振频率,随时间增加,该函数及其导数并不消失,而是呈现无阻尼振荡. 这样(1)式的解的形式为 $q(t)=c_1\sin\omega_0 t+c_2\cos\omega_0 t+Cv$,初始状态有 $q_0=c_2+Cv$ 以及 $I_0=0=\omega_0 c_1$,因此有 $c_1=0$,$c_2=q_0-Cv$. 即

$$q(t)=(q_0-Cv)\cos\omega_0 t+Cv \tag{2}$$

从(2)式可以得到

电流 $I=\dot{q}=-\omega_0(q_0-Cv)\sin\omega_0 t$

电容电压 $v_{cd}=\dfrac{q}{v}=\left(\dfrac{q_0}{C}-v\right)\cos\omega_0 t+v$

电感电压 $v_{bc}=v-v_{cd}=-\left(\dfrac{q_0}{C}-v\right)\cos\omega_0 t$

电源功率 $P=Iv=-\omega_0 v(q_0-Cv)\sin\omega_0 t$

电容储能 $U_c=\dfrac{q^2}{2C}=\dfrac{1}{2C}[(q_0-Cv)\cos\omega_0 t+Cv]^2$

注意这里的 I 是变化的. 就好像一个发电机发出的以 ω_0 为角频率变化的电流.

32.24 一个 L-C 回路,具体的参数为:$L=1.5\text{H}$, $C=4\mu\text{F}$ 初始时刻电容带电 4mC,求(a)振荡的频率为多大,(b)I 关于时间 t 的变化函数.

解 ☞ 对照题 32-23 $v=0$,初始时刻 $q_0=4\times10^{-3}\text{C}$. (a) $\omega_0=1/\sqrt{LC}=1/[1.5\times4\times10^{-6}]^{1/2}=408\ \text{s}^{-1}$, $f_0=\omega_0/2\pi=65.0\text{Hz}$. (b) $q=q_0\cos\omega_0 t$ 即 $I=-\omega_0 q_0\sin\omega_0 t$, $I=-1.63\sin480t\,\text{A}$.

32.25 一个无源的 L-C 回路,开始电容两端电势差为 100.0V,最大电流可达 10.0A,振荡频率为 1000Hz. 问 L、C 的具体值为多少?

解 ☞ 根据题意

$$i_{\max}=\omega_0 q_0=\omega_0 CV_0 \tag{1}$$

其中 ω_0 为谐振频率,q_0 为电容最大储电量,而且我们有 $q_0=CV_0$,其中 V_0 便是初始时电容上的电势差. 也就是说 $\omega_0=2000\pi\text{rad/s}$, $i_{\max}=10.0\text{A}$, $V_0=100\text{V}$. 方程(1)的解为 $C=\dfrac{i_{\max}}{\omega_0 V_0}=\dfrac{10.0}{2000\pi\times100.0}=1.59\times10^{-5}\text{F}=15.9\mu\text{F}$, 因为 L-C 电路的振荡频率 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, 所以 $L=(\omega^2C)^{-1}$由方程(1)可以得到

$$L=\frac{1}{\omega_0^2C}=\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{i_{\max}/\omega_0 V_0}\right)=V_0/\omega_0 i_{\max} \tag{2}$$

代入数据可得

$$L=\frac{100.0}{200\pi\times10.0}=1.59\times10^{-3}(\text{H})=1.59(\text{mH})$$

32.26[c] 试证明:对于题 32-23 所示的电路,其能量守衡.

证 ☞ 对题 32-23 的(1)式,两边乘以 $\dot{q}=I$,可以得到

$$LI\frac{\text{d}I}{\text{d}t}+\frac{1}{C}q\frac{\text{d}q}{\text{d}t}=VI\ \text{即}\ \frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)+\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{q^2}{2C}\right)=P_{\text{入}}$$

这就是说输入功率等于 L、C 储存功率之和.

32.27[c] 观察图 32-7 所示的电路. 在 $t=0$ 前,开关处于 A 位置,电容尚未充电,当 $t=0$ 时,将开关迅速从 A 打到 B. (a)分析 $t>0$ 时的电流,(b)分析在 $t>0$ 时,电容下极板的带电量.

解 ☞ (a)在 $t=0$ 时刻,电感线圈中有稳定的电流 $i=V_0/R$,当 $t\geqslant 0$ 时,应用基尔霍夫电压定律可得到

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{q(t)}{C}=0 \tag{1}$$

其中 $q(t)$ 表示的是下极板的电量.对(1)微分可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{i}{L_c}=-\omega_0^2 i(t) \tag{2}$$

其中 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$,这样,方程的通解为 $i(t)=i_{\max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$.考虑到初态 $i_{\max}=V_0/R$,且 $\varphi=0$,因而有

$$i(t)=\frac{V_0}{R}\cos(\omega_0 t) \tag{3}$$

(b)已知 $t=0$ 时刻下极板上的电量 $q(0)=0$.而

$$\begin{aligned}q(t)&=q(0)+\int_0^t\frac{\mathrm{d}q(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t'=0+\int_0^t i(t')\mathrm{d}t'\\&=\frac{V_0}{R}\int_0^t\cos(\omega t')\mathrm{d}t'=\frac{V_0}{\omega_0 R}\left[\sin(\omega_0 t')\Big|_0^t\right]=\frac{V_0}{\omega_0 R}\sin(\omega_0 t)\end{aligned} \tag{4}$$

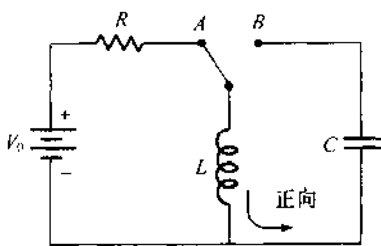


图 32-7

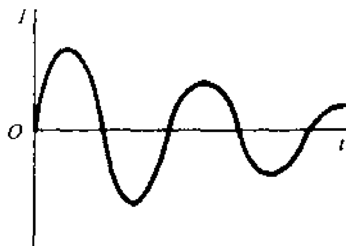


图 32-8

32.28[c] 概要地分析图 32-2 所示的 $R-L-C$ 电路(其中 v 为恒量),假设初始条件与题 32-23 一样,而且电路中参数满足 $R^2<4L/C$.

解 ☞ 对应于 R、L、C 值的不同相对关系,$R-L-C$ 电路的瞬态响应可在指数衰减和无阻尼振荡之间变化,题设中确定的关系将使得电路阻尼振荡(所谓欠阻尼情形),电路的方程可列为

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=v \tag{1}$$

令 $v=0$ 其解为 $q_1(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t$, $q_2(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t$.将其代入(1)式中($v=0$),我们可以得到正实数 $\alpha=R/2L$, $\omega=\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)^{1/2}$.

(显然,要能作阻尼振荡,必有 ω 为实数,即 $1/LC>R^2/4L^2$,即 $R^2<4L/C$).

整个方程的解为 $q(t)=c_1q_1(t)+c_2q_2(t)+Cv$.其中 c_1,c_2 可由初始条件确定.代入初始条件得

$$q=\frac{q_0-Cv}{\omega}\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t)+Cv \tag{2}$$

从而可以求出

$$I=\dot{q}=-\frac{1}{\omega}(q_0-Cv)(\alpha^2+\omega^2)\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t=\frac{-V_L(0)}{\omega L}\mathrm{e}^{-Rt/2L}\cdot\sin\omega t \tag{3}$$

其中 $V_L(0)$ 表示开关闭合瞬间电感两端的电势差.i 的变化如图 32-8 所示,为阻尼振荡形式.

32.29 (a)由题 32-15 证明 $L/R=[\mathrm{s}]$,(b)由题 32-23 证明 $\omega^{-1}=[\mathrm{s}]$.

证 ☞ (a)$[L/R]=[\mathrm{H}/\Omega]=\left[\frac{\mathrm{V\cdot s/A}}{\mathrm{V/A}}\right]=[\mathrm{s}]$

(b)$[\omega]=[(LC)^{-1/2}]=[(\mathrm{H\cdot F})^{-1/2}]=[\{(\mathrm{V\cdot s/A})\cdot(\mathrm{C/V})\}^{-1/2}]$
$=[(\mathrm{s}^2)^{-1/2}]=\mathrm{s}^{-1}$

32.30 试证明:图 32-9 中 a,b 两个体系是等价的.

证 ☞ 对 a、b 可以分别写出下列微分方程:

(a) $L\ddot{q}+R\dot{q}=v$, (b) $m\ddot{x}+a_1\dot{x}=F$ 其数学形式一致.因此(b)的解可由(a)类推而来.类比:$x\to q$, $F\to v$, $a_1\to R$, $m\to L$,再结合初始状态:在 $t=0$ 时,$x=\dot{x}=0$,可以得到

$$x=\frac{F}{a_1}t-\frac{Fm}{a_1^2}(1-e^{-a_1t/m})$$

类似的对能量也有: 动能 $E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{mF^2}{2a_1^2}(1-e^{-a_1t/m})^2$

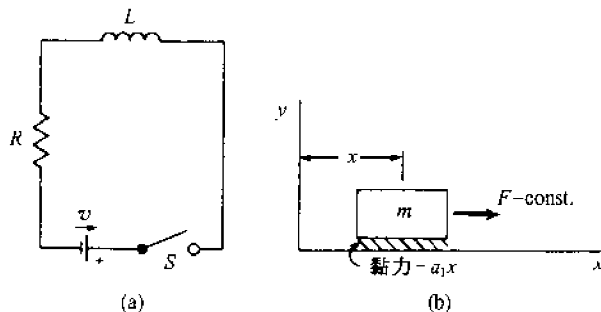


图 32-9

32.31[c] 试证明:在无源 $L-R-C$ 电路中,储存能量 E 的衰减速率满足 $\frac{dE}{dt}=-i^2R$.

证 ☞ 令题 32-28 的(1)式中 $v=0$,将 $\dot{q}=i$ 代入,可得 $Li\frac{di}{dt}+Ri^2+\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}=0$ 即 $\frac{dE}{dt}+Ri^2=0$,其中 $E=\frac{1}{2}Li^2+q^2/2C$ 为总的储能.

32.32 L_1 与 C_1 串联,L_2 与 C_2 串联,它们有相同的谐振频率.试证明:将这串联电路再串联后,其谐振频率与原来一样.

证 ☞ 根据题意

$$\omega_{r_1}=1/\sqrt{L_1C_1} \quad (1)$$

$$\omega_{r_2}=1/\sqrt{L_2C_2} \quad (2)$$

串联之后,电路的总电感与总电容分别为 $L'=L_1+L_2$, $C'=C_1C_2/(C_1+C_2)$因此

$$(\omega'_r)^2=1/L'C'=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)} \quad (3)$$

因为 $\omega_{r_2}=\omega_{r_1}$,所以 $L_2C_2=L_1C_1$.

$$C_1C_2(L_1+L_2)=C_2^2L_2+C_1C_2L_2=C_2^2L_2+C_1C_2L_2=L_2C_2(C_1+C_2)$$

因此由方程(3)可得

$$(\omega'_r)^2=\frac{C_1+C_2}{L_2C_2(C_1+C_2)}=\frac{1}{L_2C_2}=\omega_{r_2}^2=\omega_{r_1}^2$$

32.33 试找出图 32-10 所示的装置产生阻尼振荡的条件.

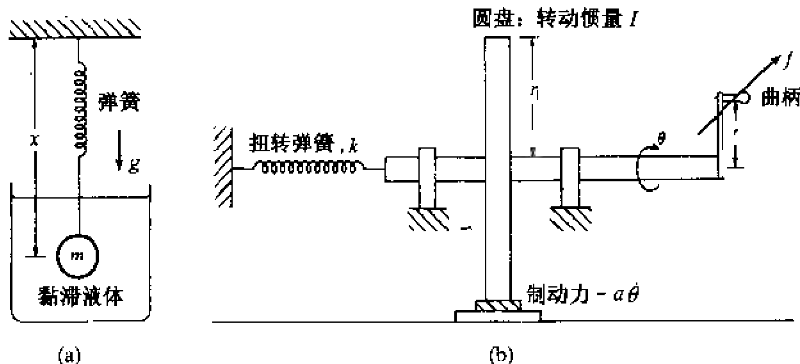


图 32-10

解 ☞ 在装置(a)中小球的质量设为 m,重力为 mg.弹簧拉力为 $-k(x-l_0)$,l_0 为弹簧的自然

长度，粘性液体的阻力为 $-a_1\dot{x}(a_1>0)$. 因而有动力学方程：

$$m\ddot{x} = mg - k(x-l_0) - a_1\dot{x}, \quad 即 \quad m\ddot{x} + a_1\dot{x} + kx = mg + kl_0$$

在装置(b)中，圆盘受到 3 个力矩的作用，其中曲柄上的力矩为 $\tau_1 = fr$；下方有制动力矩为：$\tau_2 = r_1(a\dot{\theta}) = -b\dot{\theta}$，还有弹簧的作用力矩 $\tau_3 = -\kappa\theta$. 因而动力学方程为

$$I\ddot{\theta} = fr - b\dot{\theta} - \kappa\theta \quad 即 \quad I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \kappa\theta = fr$$

可以看出这些与 R-L-C 电路的方程类似

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V$$

对比可以得阻尼振荡的条件为

(a) $a_1^2 < 4mk$，(b) $b^2 < 4I\kappa$.

32.2 稳态交流电路

32.34 将一只电压表接在一只 1000Hz 的正弦式电源两端，其读数为 80V. 试写出电源两端的瞬时电压的表达形式.

解 ☞ 一个正弦式电压可以表示成 $v = v_0\sin\omega t = v_0\sin2\pi ft$，也可以写成余弦形式，如 $v = v_0\cos(\omega t+\phi)$，$\phi$ 为常量. 其中 $\omega = 2\pi f = 2\pi\times1000\text{Hz} = 62800\text{s}^{-1}$，$v_0$ 为电压可达的最大值，而电压表的示数不是其最大值，而是有效值 $v_{\text{rms}} = V = v_0/\sqrt{2}$. 这可以看作是一个周期内 v^2 的平均值的开方. 于是可以得到：$v_0 = \sqrt{2}V = \sqrt{2}(80\text{V}) = 113\text{V}$. 以及 $v = 113\text{V}\sin2000\pi t$

32.35 一只 60 周的正弦交流电，用普通电压表测得其两端电压为 120V. 求(a)电压的最大值，(b)电压的瞬时表达式.

解 ☞ (a) $V = v_0/\sqrt{2}$ 即 $v_0 = \sqrt{2}v = \sqrt{2}\times120\text{V} = 170\text{V}$

(b) $V = v_0\sin2\pi ft = 170\text{V}\sin120\pi t$

32.36 电压 $V = (60\text{V})\sin120\pi t$，加在一只 20Ω 的电阻上，求与电阻串联的电流表的读数为多少?

解 ☞ $V = v_0/\sqrt{2} = 0.707v_0 = 42.4\text{V}$，$I = \frac{V}{R} = \frac{42.4\text{V}}{20\Omega} = 2.12\text{A}$ （注意 $I \equiv i_{\text{rms}} = i_0/\sqrt{2}$）.

32.37 利用有效值定义的电容与电感的阻抗，如果用最大值定义是否也适用?

解 ☞ 设想一个电流有效值为 I，频率为 f(正弦式)，通过一只纯电阻 R 或纯电感 L 或纯电容 C. 此时加在元件两端的电压表的读数为 V. 满足如下关系：

纯电阻　　$V = IR$

纯电感　　$V = IX_L$ 其中 $X_L = 2\pi fL$ 被称作感抗.

纯电容　　$V = IX_C$ 其中 $X_C = 1/2\pi fC$ 被称作容抗.

无论是容抗还是感抗，均有欧姆这一单位，既然 $I = i_0/\sqrt{2}$，$V = v_0/\sqrt{2}$，很显然

$v_0 = i_0R$，　$v_0 = i_0X_L$，　$v_0 = i_0X_C$.

注意：本章的讨论中，除非有其它说明，电流电压一般均是指有效值.

32.38 分析描述下列元件的电压、电流的相位关系. (a)纯电阻，(b)纯电感，(c)纯电容.

解 ☞ (a)对电阻而言，电压与电流同时到达最大值同时为零，也就是说，V，i 相位相同. (b)对于电感，电压要比电流提前 1/4 个周期到达最大值，换句话说：当电压最大时，电流为零. 其实，是感应电动势使得电流的变化延缓了 1/4 个周期(即 $\pi/2$). 即电流相位落后电压 $\pi/2$. (c)对于电容而言，两端电压滞后电流 1/4 个周期. 因为电压的建立必须经过充电，这需要一个过程.

32.39 用电流、电压的平均值定义 R-L-C 串联电路的阻抗和电流、电压之间的相角(即相位差).

解 ☞ R-L-C 串联电路的阻抗被定义为

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{1}$$

Z 的单位是 Ω，如果所加电压为 V，欧姆定律给出

$$V = IZ \quad 或者 \quad v_0 = i_0 Z.$$

如果 ϕ 满足 $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$ 或 $\cos\phi = \frac{R}{Z}$，称 ϕ 为 V 和 I 之间的相角.

32.40　用矢量描述 R-L-C 串联电路的各元件阻抗和电压满足的关系.

解　☞ 如图 32-11(a)所示，可用矢量表示 R-L-C 电路的关系. 因为题 32-39 中的式(1)可用直角三角形的勾股定理描述. Z 是斜边，R 和 $X_L - X_C$ 为两条直角边. ϕ 即为电流、电压之间的相角. 串联电路的电压也满足类似的关系，如图 32-11(b)所示：$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$. 详细的分析表明，$R$-$L$-$C$ 串联电路可用旋转矢量法进行分析.（见题 32.86.）

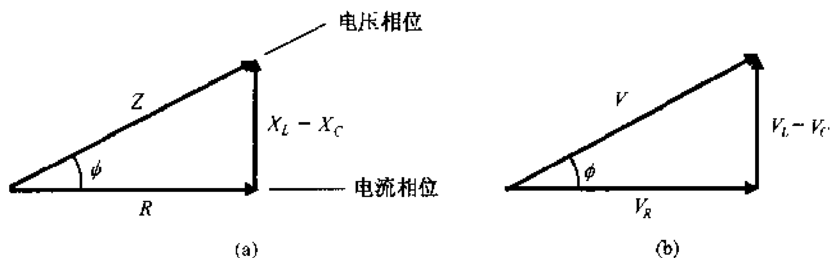


图 32-11

32.41　一个交流电压作用在一只 10Ω 的电阻上，产生的热功率为 360W. 求有效电压和有效电流.

解　☞ 电阻消耗的功率瞬时值为 $P_{瞬} = i^2R = (i_0^2\sin^2 2\pi ft)\cdot R$. 而平均功率 $P = i_0^2/2\cdot R = I^2R$. 其中 $I = i_{rms}$. 这样便有 $360\text{W} = I^2 \times 10\Omega$，解之得 $I = 6\text{A}$. 同理可以得到 $V = IR = (6\text{A})(10\Omega) = 60\text{V}$.
检验：由于电流和电压同相位，$P = VI = (60\text{V}),(6\text{A}) = 360\text{W}$.
注意：若用最大值计算，则 $P = v_0^2 R/2 = v_0 i_0/2$.

32.42　给出 R-L-C 电路平均功率的一般表达式.

解　☞ 设想一交流电压 V，加在电路两端，通过的电流为 I. V 和 I 之间的相角为 ϕ，则阻抗消耗的功率为 $P = VI\cos\phi$，$\cos\phi$ 称为功率因数. 电路为纯电阻时 $\cos\phi = 1$，而当为纯电感或纯电容时为 0（纯电感或纯电容不损耗功率），用最大值表示为 $P = v_0 i_0 \cos\phi/2$.

32.43　计算在频率 $f = 60\text{Hz}$ 的状态下，0.2H 的电感的感抗值.

解　☞ $X_L = 2\pi fL = 6.28 \times 60 \times 0.2 = 75.4(\Omega)$

32.44　一只 40Ω 的电阻，将其两端接到 15V 的交变电子振荡器上，求下列频率时，通过电阻的电流值(a)100Hz，(b)100kHz.

解　☞ 纯电阻　$V = IR$，与频率无关，因而(a)(b)的答案均为　$I = V/R = 15\text{V}/4\Omega = 0.375\text{A}$

32.45　题 32.44 中 40Ω 的电阻改为 2mH 的电感，结果会怎样？

解　☞ $V = IX_L$，$X_L = \omega L = 2\pi fL$.（a）$f = 100\text{Hz}$，$X_L = 6.28 \times 100 \times 2 \times 10^{-3} = 1.256(\Omega)$，$I = 15\text{V}/1.256\Omega = 11.9\text{A}$.（b）$X_L$ 增大 1000 倍，电流减小 1000 倍. $I = 11.9\text{mA}$.

32.46　若题 32-44 中的电阻改为 $0.3\mu\text{F}$ 的电容，结果会如何？

解　☞ $V = IX_C$，　$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$.（a）$X_C = 1/6.28 \times 100 \times 0.3 \times 10^{-6} = 5308(\Omega)$，所以 $I = 15\text{V}/5308\Omega = 2.83\text{mA}$.（b）频率增加 1000 倍，$X_C$ 减少 1000 倍，所以电流增加 1000 倍，$I = 2.83\text{A}$.

32.47　一电路，$V = 160\text{V}$，$I = 5\text{A}$，而功率只有 600W，求其功率因数.

解　☞ $\cos\phi = \frac{P}{IV} = \frac{600}{5 \times 160} = 0.75$

32.48　通过 24Ω 的电阻的交流电，有效值为 5A，求电阻两端电压的最大值.

解　☞　$i_0 = \sqrt{2}I = 7.07\text{A}$，$v_0 = i_0 R = (7.07\text{A}) \times 24\Omega = 170\text{V}$

32.49　题 32-48 中电阻消耗的平均功率为多大？

解 ☞ $P=I_{eff}^2R=5^2\times24=600(\mathrm{W})$, $P=I_{eff}V_{eff}=\frac{7.07\times170}{2}=600(\mathrm{W})$

32.50 一线圈电阻为20Ω,电感为0.35H,计算在25Hz的频率下,它的感抗与阻抗.

解 ☞ $R=20\Omega$, $X_L=2\pi fL=6.28\times25\times0.35=55(\Omega)$

$Z=\sqrt{R^2+X_L^2}=\sqrt{20^2+55^2}=58.5(\Omega)$

32.51 有效值为 $I=30\mathrm{mA}$ 的交流电通过电容 C, $C=4\mu\mathrm{F}$. 计算电容的容抗,以及两端电压的有效值.

解 ☞ $X_C=1/2\pi fC=1/6.28\times500\times4\times10^{-6}=80(\Omega)$

$Z=X_C$, $V=IZ=30\times10^{-3}\mathrm{A}\times80\Omega=2.4\mathrm{V}$

32.52 一个120V的交流电源加在2μF的电容两端,求下列情况下电流值:(a)60Hz,(b)60kHz,(c)电容消耗的功率.

解 ☞ (a)$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=1/2\pi\times60\times2\times10^{-6}=1330\Omega$, $I=\frac{V}{X_C}=120\mathrm{V}/1330\Omega=0.090\mathrm{A}$. (b)同理 $X_C=1.33\Omega$, $I=90\mathrm{A}$. 可以看出电流与频率成正比,容抗与频率成反比. (c)平均功率 $P=VI\cos\phi=VI\cos90^\circ=0$.

32.53 一只120V的交流电源加在0.7H的电感两端,试求下列情况下的电流.(a)60Hz,(b)60kHz,(c)电感消耗的功率.

解 ☞ (a)$X_L=2\pi fL=2\pi\times60\times0.7=264(\Omega)$, $I=\frac{V}{X_L}=\frac{120\mathrm{V}}{264\Omega}=0.455\mathrm{A}$. (b)同理 $X_L=264\times10^{+3}\Omega$, $I=0.455\times10^{-3}\mathrm{A}$. 可以看出感抗与频率成正比. (c)平均功率 $P=VI\cos\phi=VI\cos90^\circ=0$.

32.54 一线圈电感值为0.1H,电阻值为12Ω.接上110V,60Hz的交流电,试确定(a)线圈的感抗,(b)阻抗,(c)线圈中的电流,(d)电压与电流之间的相角,(e)功率因数,(f)电路中瓦特计的读数.

解 ☞ (a)$R=12\Omega$, $X_L=2\pi fL=6.28\times60\times0.1=37.7(\Omega)$. (b)$z=(R^2+X_L^2)^{1/2}=39.6\Omega$. (c)$I=V/Z=110\mathrm{V}/39.6\Omega=2.78\mathrm{A}$. (d)$\cos\phi=\frac{R}{Z}=\frac{12}{39.6}=0.303$, $\phi=72.4^\circ$ 电压超前电流. (e)功率因数 $\cos\phi=0.303$. (f)$P=VI\cos\phi=110\mathrm{V}\times2.78\mathrm{A}\times0.303=92.6\mathrm{W}$.

32.55 一只10μF的电容与40Ω的电阻相串联.两端加110V,60Hz的交流电压,计算(a)容抗,(b)电路阻抗,(c)电路电流,(d)电流电压之间的相角,(e)功率因数.

解 ☞ (a)$X_C=1/2\pi fC=(6.28\times60\times10\times10^{-6})^{-1}=265(\Omega)$. (b)$Z=(R^2+X_C^2)^{1/2}=(40^2+265^2)^{1/2}=268(\Omega)$. (c)$I=V/Z=110\mathrm{V}/268\Omega=0.410\mathrm{A}$. (d)$\cos\phi=\frac{R}{Z}=\frac{40}{268}=0.149$, $\phi=-81.4^\circ$ 电压滞后电流. 其中 $\phi=+81.4^\circ$ 被舍去,因为需满足 $\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{-X_C}{R}$(见题32.38). (e)功率因数为 $\cos\phi=0.149$.

32.56 一串联电路中,感抗为20Ω,容抗为60Ω,电阻为30Ω,电流有效值为2A,试求电路的阻抗值.

解 ☞ $Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{30^2+(20-60)^2}=50(\Omega)$

32.57 求题32.56中的功率因数.

解 ☞ $\cos\theta=\frac{R}{Z}=\frac{30}{50}=0.6$

32.58 在题32.56中,电阻上消耗的功率为多少?

解 ☞ 法Ⅰ 平均功率只由电阻消耗的功率决定,电容和电感不消耗能量.因而有

$$P=I^2R=2^2\times30=120(\mathrm{W})$$

法Ⅱ $P=VI\cos\theta=ZII\cos\theta=50\times2^2\times0.6=120(\mathrm{W})$

32.59 在题32.56中,电感两端的电压的最大值为多少?

解 ☞ $V_{max}=\sqrt{2}V_{rms}=\sqrt{2}I_{rms}\cdot X_L=I_{max}X_L=2.0\times20/0.707=56.6(\mathrm{V})$

32.60 一个交流串联电路，其中 $R=14\Omega$，电源为75V的交流电，感抗为48Ω；频率为60Hz．求(a)电路的阻抗，(b)电路中的电流．

解 ☞ (a)$Z=\sqrt{R^2+X_L^2}=\sqrt{14^2+48^2}=50(\Omega)$．(b)$I=\frac{\mathscr{E}}{Z}=\frac{75\text{V}}{50\Omega}=1.5\text{A}$.

32.61 在题32.60中，求(a)电流滞后电压的相位，(b)电路中的自感．

解 ☞ (a)$\tan\theta=\frac{X_L}{R}=\frac{48}{14}=3.43$，$\theta=73.7°$

(b)$X_L=2\pi fL$，$L=X_L/2\pi f=48/2\pi\times 60=0.127(\text{H})$

32.62 一电路电阻为60Ω，阻抗为135Ω，试计算：消耗在整个电路中的功率 P

解 ☞ $Z^2=R^2+(X_L-X_C)^2$，其中 $Z=135\Omega$，$R=60\Omega$．所以 $|X_L-X_C|=120.9\Omega$，又 $|\tan\theta|=\frac{|X_L-X_C|}{R}=120.9/60$，得 $\theta=63.6°$，所以 $P=\frac{V^2}{Z}\cos\theta=\frac{120^2}{135}\cos(63.6°)=47.4(\text{W})$．电流、电压哪个超前，取决于 X_L-X_C 的符号．

32.63 一只线圈，电阻 $R=12\Omega$，电感 $L=0.14\text{H}$，与110V，25Hz的电源相连，试计算(a)线圈中的电流，(b)电压与电流之间的相角，(c)功率因数，(d)线圈消耗的功率．

解 ☞ (a)$X_L=2\pi fL=2\pi\times 25\times 0.14=22.0\Omega$，$Z=\sqrt{R^2+X_L^2}=\sqrt{12^2+22^2}=25.1\Omega$，$I=\frac{V}{Z}=\frac{110\text{V}}{25.1\Omega}=4.4\text{A}$．(b)$\tan\phi=\frac{X_L}{R}=1.83$，$\phi=61.3°$，电压超前电流61.3°．(c)功率因数 $\cos\phi=\cos 61.3°=0.48$．(d)$P=VI\cos\phi=110\text{V}\times 4.4\text{A}\times 0.48=230\text{W}$，或者 $P=I^2R=(4.4\text{A})^2\times 12\Omega=230\text{W}$.

32.64 一只电容与一只30Ω的电阻相串联，接到220V的交流电线上，电容的容抗为40Ω，试计算(a)电路中的电流，(b)电压电流之间的相角．(c)电路消耗的功率．

解 ☞ (a)$Z=\sqrt{R^2+X_C^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50(\Omega)$，$I=\frac{V}{Z}=\frac{220\text{V}}{50\Omega}=4.4\text{A}$．(b)$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{0-40}{30}=-1.33$，$\phi=-53°$，负号表明电压滞后于电流，图32-11中的 ϕ 角位于水平轴下方．(c)$P=VI\cos\phi=220\text{V}\times 4.4\text{A}\times\frac{4}{5}=580\text{W}$．或者 $P=I^2R=(4.4)^2\times 30=580(\text{W})$.

32.65 一个 $R-L-C$ 串联电路：$R=100\Omega$，$L=0.1\text{H}$，$C=20\mu\text{F}$．接到110V、60Hz的电源上，求(a)电路中的电流 I，(b)消耗的功率．

解 ☞ (a)对整个电路

$$Z=\sqrt{R^2+(X_C-X_L)^2}$$
$$=\sqrt{100^2+(2\pi\times 60\times 0.1-1/2\pi\times 60\times 20\times 10^{-6})^2}=138(\Omega)$$

所以 $I=\frac{V}{Z}=\frac{110\text{V}}{138\Omega}=0.8(\text{A})$.

(b)功率全部消耗在电阻上，$P=I^2R=0.8^2\times 100=64(\text{W})$

32.66 继续讨论题32.65，求(a)电流和电源电压之间的相角，(b)并联在三个元件两端的电压表的读数．

解 ☞ (a)$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=-95\Omega/100\Omega=-0.95$，$\phi=-43.5°$(b) $V_R=IR=0.79\times 100=79(\text{V})$，$V_C=IX_C=0.79\times 132.7=105(\text{V})$，$V_L=IX_L=0.79\times 37.3=30(\text{V})$．注意：电源电压 $V\neq V_R+V_C+V_L$．由图32-11(b)可知 $V^2=V_R^2+(V_L-V_C)^2$，所以 $V=\sqrt{V_R^2+(V_L-V_C)^2}=\sqrt{79^2+(-75)^2}=109(\text{V})$.

32.67 一个 R-L-C 串联电路，$R=5\Omega$，$L=0.2\text{H}$，$C=4\times 10^{-8}\text{F}$，接上30V、1780Hz的电源．求(a)电路中的电流，(b)电压和电流之间的相角．

解 ☞ (a)$X_L=2\pi fL=2\pi\times 1780\times 0.2=2240(\Omega)$，$X_C=1/2\pi fC=1/2\pi\times 1780\times 4\times 10^8=2240(\Omega)$，$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=R=5\Omega$，$I=\frac{V}{Z}=\frac{30}{5}=6(\text{A})$．(b)$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=0$，$\phi=0°$.

32.68 继续32.67题，求(a)电路消耗功率，(b)各元件两端的电压值．

解 ☞ (a)$P=IV\cos\phi=30\times6\times1=180(\mathrm{W})$，

或者 $P=I^2R=(6\mathrm{A})^2*5\Omega=180\mathrm{W}$. (b) $V_R=IR=6\times5=30(\mathrm{V})$, $V_C=IX_C=6\mathrm{A}\times2240\Omega=13.44\mathrm{kV}$, $V_L=IX_L=6\mathrm{A}\times2240\Omega=13.44\mathrm{kV}$.

32.69 如图 32-12 所示，一串联电路接在 220V、60Hz 的电源两端，其中电容容抗为 30Ω. 电阻 R 为 44Ω，一只线圈电阻为 36Ω，感抗为 90Ω，试确定(a)电路中的电流，(b)各元件两端的电压.

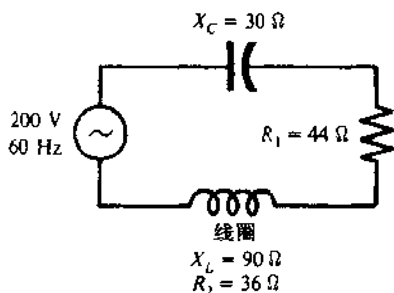


图 32-12

解 ☞ (a)

$$Z=\sqrt{(R_1+R_2)^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{(44+36)^2+(90-30)^2}=100(\Omega)$$

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{200\mathrm{V}}{100\Omega}=2\mathrm{A}.$$

(b)电容两端 $IX_C=2\mathrm{A}\times30\Omega=60\mathrm{V}$. 电阻两端 $IR_1=2\mathrm{A}\times44\Omega=88\mathrm{V}$. 线圈两端阻抗：$Z_L=\sqrt{R_2^2+X_L^2}=\sqrt{36^2+90^2}=97(\Omega)$，电压：$(2\mathrm{A})(97\Omega)=194\mathrm{V}$.

32.70 对题 32.69 中的电路，试求(a)电路的功率因数，(b)电路消耗的功率.

解 ☞ (a)功率因数：$\cos\phi=\frac{R}{Z}=\frac{80}{100}=0.8$. (b)消耗功率：$VI\cos\phi=(200\mathrm{V})(2\mathrm{A})(0.8)=320\mathrm{W}$，或者：$I^2R=(2\mathrm{A})^2\cdot80\Omega=320\mathrm{W}$. (c)线圈消耗功率 $I^2R_2=(2\mathrm{A})^2(36\Omega)=144\mathrm{W}$.

32.71 一电路中一只电阻，一只电感，以及一只电容相串联，两端接上 110 V 的交流电源，$R=9.0\ \Omega$, $X_L=28\ \Omega$, $X_C=16\Omega$. 计算：(a)电路的阻抗，(b)电流，(c)电流与电压间的相角，(d)功率因数.

解 ☞ (a)$Z=[R^2+(X_L-X_C)^2]^{1/2}=15\ \Omega$, (b)$I=\frac{V}{Z}=\frac{110\ \mathrm{V}}{15\ \Omega}=7.33\ \mathrm{A}$. (c)$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{12}{9}=1.33$，即 $\phi=53.1°$. (d)$\cos\phi=0.60$ 或 $\cos\phi=\frac{R}{Z}=\frac{9}{15}=0.60$.

32.72 一电路，电阻为 11Ω，一线圈感抗为 120Ω，一只电容容抗 120Ω，串联后接在 110V、60Hz 的电源两端，求各元件两端的电压.

解 ☞ 首先我们看到：$I=\mathcal{E}/Z$, $\mathcal{E}=110\mathrm{V}$, $Z=\sqrt{11^2+(120-120)^2}=11\Omega$，因此 $I=10\mathrm{A}$, $V_R=IR=10\mathrm{A}\cdot11\Omega=110\mathrm{V}$. $V_L=IX_L=10\mathrm{A}\cdot120\Omega=1200\mathrm{V}$, $V_C=IX_C=10\mathrm{A}\cdot120\Omega=1200\mathrm{V}$. 检验：$\mathcal{E}^2=V_R^2+(V_L-V_C)^2=(100\mathrm{V})^2$ 得 $\mathcal{E}=110\mathrm{V}$. 正确.

32.73 一只 120V、60Hz 的电源，接在一个 800Ω 电阻与未知电容串联电路的两端，电阻的电压降为 102V. (a)求电容两端的电压，(b)电容的容抗为多大?

解 ☞ (a) $V_R=IR$ 即 $102=I\cdot800\Omega$，得 $I=0.128\mathrm{A}$. 又因为 $\mathcal{E}^2=V_R^2+V_C^2(120\mathrm{V})^2=(102\mathrm{V})^2+V_C^2$，得 $V_C=63\mathrm{V}$. (b)$X_C=IX_C$ 即 $63=0.128\mathrm{A}\cdot X_C$，得 $X_C=494\Omega$.

32.74 一只线圈电阻可以忽略，与 1 只 90Ω 的电阻相串联，接在 120V、60Hz 的电源两端，电阻两端电压读数为 36V，求电感两端的电压以及电感感抗.

解 ☞ $V_R=IR$，即 $36\mathrm{V}=I\cdot90\Omega$. 所以 $I=0.4\mathrm{A}$. 我们可采用与题 32-73 一样的方法求出 V_L，不过，这里我们先求出 X_L. $\mathcal{E}=IZ$. 即 $120\mathrm{V}=0.4\mathrm{A}\cdot Z$ 即 $Z=300\Omega$，而 $Z^2=R^2+X_L^2$ 即 $300^2=90^2+X_L^2$，所以 $X_L=286\Omega$. 而 $X_L=2\pi fL$ 即 $286=6.28\times60L$，所以 $L=0.76\mathrm{H}$, $V_L=IX_L=0.4\times286=114(\mathrm{V})$.

32.75 一只变压器将 120V 的电压变为 1800V 输出，初级线圈为 100 匝，求次级线圈的匝数.

解 ☞ 根据题 31.28 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}$ 即 $\frac{120\mathrm{V}}{1800\mathrm{V}}=\frac{100}{N_2}$，所以 $N_2=1500$ 匝.

32.76 一只变压器，输入 120V，输出 900V，设效率为 100%，试求输入电流的值.

解 ☞ 初级线圈的功率－次级线圈的功率．即 $I_1 120V - 2A \cdot 900V, I_1 - 15A$.

32.77 一只降压变压器，初级线圈与次级线圈匝数比为20∶1，输入端电压2.5kV，输出电流为80A，设效率为100%，求输出电压 V_2，输入电流 I_1，以及输出功率 P_2．

解 ☞ $V_2 = \frac{1}{20}V_1 = 125V, I_1 = \frac{1}{20}I_2 = 4A, P_2 = V_2 I_2 = 10kW$.

32.78 一只降压变压器，输入2200V，输出110V．如果次级线圈25匝，试求初级线圈的匝数．

解 ☞ 电压降低了20倍．因此初、次级线圈的匝数比为20．所以初始线圈的匝数 $N_p = 500$．

32.79 一只降压变压器；输入电压为1650V；输出电压为110V，电流为45A．求初级线圈的电流．

解 ☞ $V_1 I_1 = V_2 I_2$ 即 $1650 I_1 = 110 \times 45$．所以 $I_1 = 3.0A$．

32.80 一只升压变压器输入电压110V．输出电流为2A．初次级线圈的匝数比为1∶25，试求输出电压，初级线圈电流，以及输出功率．

解 ☞ 令1、2分别代表初级与次级．$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$ 即 $V_2 = 25 \times 110V = 2750V$． $V_1 I_1 = V_2 I_2$

即 $I_1 - 2750V \times 2A/110V = 50A$．

又 $P = V_1 I_1 = 110V \times 50A - 5500W$．

32.81 试计算由40mH的电感及600pF的电容组成的电路的谐振频率．

解 ☞ 在 $R-L-C$ 电路中，阻抗最小时发生谐振 $Z = (R^2 + (X_L - X_C)^2)^{1/2}$ 要 Z 最小，需 $X_L = X_C$．即 $2\pi f_0 L = 1/2\pi f_0 C$．所以 $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$．这也适合纯电感电容电路（参见题32.23且注意 $\omega_0 = 2\pi f_0$）．在本题中 $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) - 1/(2\pi\sqrt{(40 \times 10^{-3}H)(600 \times 10^{-12}F)}) = 32.5kHz$．

32.82 我们想用一只3mH的电感与一只电容连接，要使电路的谐振频率为1MHz，试确定电容的大小．

解 ☞ 根据题32.81 $f_0 - 1/(2\pi\sqrt{LC})$，一即 $4\pi^2 LC = 1/f_0^2$

$$4 \times 3.14^2 \times 3 \times 10^{-3} \times C = 10^{-2}, \quad C = 8.45pF$$

32.83 一发报机的工作频率为1MHz，振荡电路的电容为200pF，试求电路中的电感和电容容抗．

解 ☞ $L = 1/4\pi^2 f^2 C = 1/39.4 \times 10^{12} \times 2.0 \times 10^{-10} = 130(\mu H)$

$X_C = 1/2\pi f C = 1/6.28 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-10} = 800(\Omega)$

32.84 R-L-C 串联电路，当 $f = 60Hz$ 时，阻抗为8Ω．$f = 80Hz$ 时，阻抗为10Ω．试计算 L、C 的大小．

解 ☞ $f = 1/2\pi\sqrt{LC}$ 即 $1/LC = (2\pi)^2 \times 60^2$

$$L = 1/(2\pi)^2 \times 60^2 \times C \tag{1}$$

若 $X_L = X_C$ 则 $Z = R = 8\Omega$．$\nu = 80Hz$ 时 $Z^2 = 8^2 + (X_L - X_C)^2 = 10^2$

且 $X_L - X_C = 2\pi \times 80 \times L - \frac{1}{2\pi \times 80C} = 6\Omega$．利用(1)式 $X_L - X_C = \frac{2\pi \times 80}{(2\pi)^2 \times 60^2 \times C} - \frac{1}{2\pi \times 80C} =$ 6Ω，所以 $C = \frac{80}{2\pi \times 60^2 \times 6} - \frac{1}{2\pi \times 80 \times 6} = 0.00027(F)$，代入(1)式得 $L = 0.0261H$．注意：我们发现 $\nu = 80Hz$ 时 $X_L > X_C$，因为 X_L 随频率增大，而 X_C 随频率减少．

32.3 交流电路的瞬态行为

32.85[c] 对照图32-13所示的电路，试给出其稳态电流的表达式并确定阻抗 Z，定义 $Z \equiv \mathscr{E}_{max}/i_{max} = \mathscr{E}_{rms}/i_{rms}$．

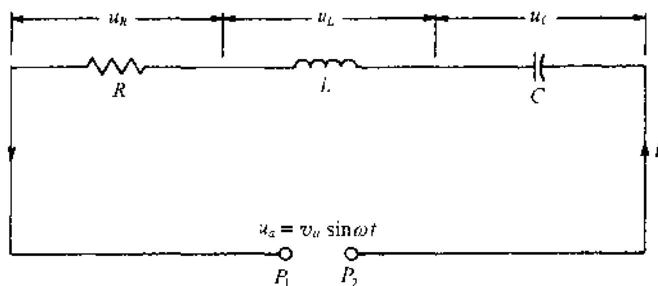


图 32-13

解 ☞ 给出电压方程

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v_a \sin\omega t \tag{1}$$

方程(1)的瞬态解已在题 32.28 中解出. 这里我们只关心稳态解:

$$q = -\frac{v_a}{\omega Z}\cos(\omega t - \phi) \Rightarrow i = \frac{v_a}{Z}\sin(\omega t - \phi) \tag{2}$$

将(2)式代入(1),可以求出未知常数 Z 和 ϕ

$$Z = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2} = [R^2 + (X_L - X_C)^2]^{1/2}$$

$$\tan\phi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R \equiv (X_L - X_C)/R \tag{3}$$

其中借助于电阻 $R(\Omega)$、感抗 $X_L = \omega L(\Omega)$和容抗 $X_C = (\omega C)^{-1}(\Omega)$,我们给出了阻抗 $Z(\Omega)$和相角 $\phi(\text{rad})$的定义.

32.86 对于题 32-85,求出各元件两端的电压的瞬时值表达式,并画出其向量图

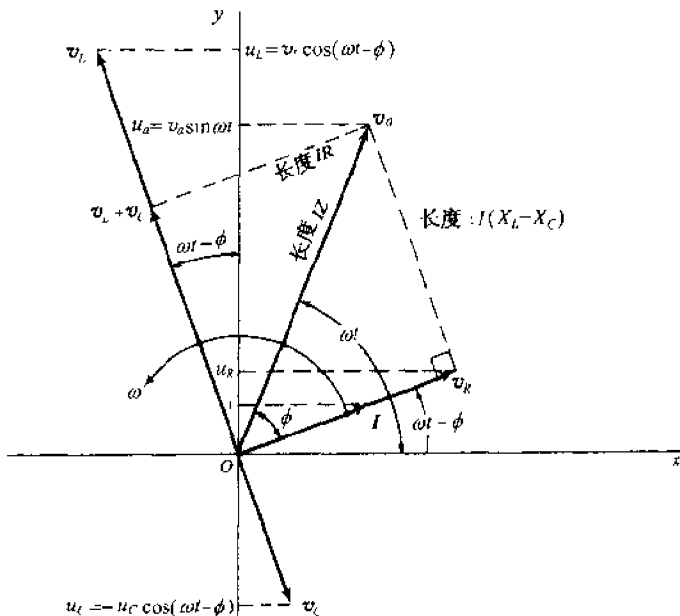


图 32-14

解 ☞ 对稳态电流式(2):$i_{max} = I \equiv v_a/Z$. 对三个元件分别有

$$u_R = v_R\sin(\omega t - \phi), \quad u_L = v_L\cos(\omega t - \phi), \quad u_C = -v_C\cos(\omega t - \phi) \tag{1}$$

其中 $v_R \equiv IR(V)$, $v_L \equiv IX_L(V)$, $v_C \equiv IX_C(V)$. u_R, u_C, u_L 可在图 32-14 中表示出来,分别从原点引出向量 $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{v}_R$, $\boldsymbol{v}_L$, $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_a$,其大小分别为 I, v_R, v_L, v_C, v_a, 矢量 $\boldsymbol{v}_R$, $\boldsymbol{v}_L$, $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_a$ 与 $\boldsymbol{I}$ 的夹角分别为 0°, 90°, 270°. 如果将这 5 个矢量以角速度 ω 绕原点逆时针转动,则每个矢量在 Y 轴上的投影给出相应的量的瞬时值.

注意：v_R 与 I 同相位，v_L 超前 I 90°，而 v_C 落后 I 90°，v_a 超前或落后视 ϕ 的正负而定. 电路方程(1)反映为矢量恒等式

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{v}_L + \boldsymbol{v}_C \tag{2}$$

32.87ᶜ 对图 32-13 所给的电路，求稳态下的平均输入功率.

解 ☞ 在一个周期内，例如，t 从 $0\to 2\pi/\omega = T$. 根据能量守恒，消耗在电路的能量为 $P_{avg}T$. 它等于储存在电感与电容中的以及消耗在电阻上的能量之和. 所以

$$P_{avg}T = \frac{1}{2}Li^2\Big|_0^T + \frac{q^2}{2C}\Big|_0^T + \int_0^T i^2R\,dt$$

稳态时，i，q 的周期均为 T，因而上式右边的前两项值为零，即有

$$P_{avg} = R\left(\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt\right) \equiv R[I_{rms}]^2$$

而 i 是正弦式变化的，很容易得到

$$I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}}I = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{v_a}{Z} = \frac{v_{a\,rms}}{Z}$$

这里的 I 是最大电流，与题 32.85 中的意义相同. 所以

$$P_{avg} = RI_{rms}v_{a\,rms}/Z = I_{rms}v_{a\,rms}\cos\phi$$

其中 ϕ 为相角.

32.88 一正弦电压，频率为 60 Hz，峰值为 150 V. 加在 $R-L$ 串联电路两端，其中 $R=20\Omega$. $L=40$ mH. (a)计算周期 T，以及 ω，X_L，Z，ϕ，(b)计算 I，v_R，v_L 以及 i，u_R，u_L 在 $t=T/6$ 时的值.

解 ☞ (a) $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{60}$ s, $\omega = 2\pi f = 377$ rad/s, $X_L=\omega L = 377\times 0.04 = 15.08(\Omega)$

$$Z=(R^2+X_L^2)^{1/2}=25.05\ \Omega,\ \phi = \arctan\frac{X_L}{R}=\arctan 0.754 = 37°$$

(b)电流的最大值 $I=\frac{v_a}{Z}=\frac{150}{25.05}=6(\text{A})$，$v_R = IR = 120$ V

$$v_L = IX_L = 90.5\ \text{V}, 在\ t=\frac{T}{6}时, \omega t = \pi/3 = 60°$$

$$i = I\sin(\omega t-\phi) = 6\sin 23° = 2.344(\text{A}),\ u_R = iR = 2.344\times 20 = 46.88(\text{V})$$

$$u_L = v_L\cos(\omega t-\phi) = 90.5\cos 23° = 83.29(\text{V})$$

这里所用符号含意与题 32.85 相同.

32.89 对于题 32.88(a)试验证在 $t=T/6$ 时刻，$u_a = u_R + u_L$. 且 $v_a = (v_R^2+v_L^2)^{1/2}$，(b)计算 I_{rms}，$v_{a,rms}$ 以及电路消耗的平均功率.

解 ☞ (a)在 $\omega t = 60°$ 时，$u_a = 150\sin 60° = 130(\text{V}) = 46.88(\text{V}) + 83.29(\text{V})$

又：$[120^2+90.5^2]^{1/2}=150.3(\text{V})\approx 150(\text{V})$.

(b) $I_{rms}=6/\sqrt{2}=4.24(\text{A})$，　$v_{a\,rms}=150/\sqrt{2}=106.07(\text{V})$

$P_{avg} = I_{rms}^2R = 18\times 20 = 360(\text{W})$

32.90 若题 32.88 中的频率增大到 1200Hz. 求此时电路消耗的功率.

解 ☞ f 增加了 20 倍. $X_L = 20\times 15.08 = 301.6(\Omega)$，$Z=[20^2+301.6^2]^{1/2}\Omega = 302.3\Omega$

而 $P_{avg} = I_{rms}^2R = v_{a,rms}^2/Z^2R$ 其中 $v_{a,rms}$ 和 R 不变，故 P_{avg} 与 $\frac{1}{Z^2}$ 成正比，利用题 32.89 的结果，得

$$P_{avg} = \frac{20^2+15.08^2}{20^2+301.6^2}\times 360 = 2.47(\text{W})$$

32.91 对图 32-13 所示的电路，令 $R=20\Omega$，$L=0.16$H，$C=30\mu$F，电源为 $u=250\sin 400t$. (a)计算 X_L，X_C，Z，ϕ，I，v_R 以及 v_L，v_C，(b)证明 $v_a = [v_R^2 + (v_L - v_C)^2]^{1/2}$.

解 ☞ (a) $X_L = 400\times 0.16 = 64(\Omega)$，　$X_C = \frac{1}{400\times 30\times 10^{-6}} = 83.333(\Omega)$

$Z = [20^2+(64-83.33)^2]^{1/2} = 27.817(\Omega)$，　$\phi = \arctan\frac{64-83.33}{20} = -0.7685$rad

$I = 250/27.817 = 8.987(\text{A})$(最大值)，　$v_R = 8.987\times 20 = 179.75(\text{V})$

$v_L = 8.987 \times 64 = 575.17(\mathrm{V})$, $v_C = 8.987 \times 83.33 = 748.91(\mathrm{V})$

(b)$[179.75^2 + (575.17 - 708.91)^2]^{1/2} = 250.0$

32.92 写出题 32.91(a)的 i, u_R, u_L, u_C 表达式,证明 $u_a = u_R + u_L + u_C$,(b)计算 P_{avg}.

解 ☞ (a) $i = 8.987\sin(400t + 0.7685)\mathrm{A}$, $u_L = 575.17\cos(400t + 0.7685)\mathrm{V}$

$$u_R = 179.75\sin(400t + 0.7685)\mathrm{V}, \quad u_C = -748.91\cos(400t + 0.7685)\mathrm{V}$$

利用三角函数关系,有

$$A\sin\theta + B\cos\theta = (A^2 + B^2)^{1/2}\sin(\theta + \delta) \text{其中} \tan\delta = \frac{B}{A}$$

根据题 32-91 的结果有

$$u_R + u_L + u_C = 179.75(\sin400t + 0.7685) + (575.17 - 748.91)\cos(400t + 0.7685)$$

$$= 250.0\sin(400t + 0.7685 + \delta) = u_a$$

$$\delta = \arctan\frac{575.17 - 748.91}{179.75} = \arctan\frac{64 - 83.33}{20} = -0.7685$$

(b)$P_{avg} = I_{rms}^2 R = \left(\frac{8.987}{\sqrt{2}}\right)^2 \times 20 = 807.66(\mathrm{W})$

32.93 对某一角频率 ω_0, R-L-C 电路的功率因数为 1(电压谐振). 因为 $P_{avg} = I_{rms} \cdot v_{a,rms}\cos\phi = \frac{v_{a,rms}^2}{R}\cos^2\phi$ 在达到谐振时,电路消耗功率最大,在谐振状态下重新计算题 32.91.

解 ☞ 令 $\cos\phi = 1$,得 $X_L = X_C$ 即 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, $\omega = \omega_0 \equiv \sqrt{1/LC}$ 所以

$$\omega_0 = \sqrt{1/0.16 \times 30 \times 10^{-6}} = 456.4\mathrm{rad/s}, \quad X_C = X_L = 456.4 \times 0.16 = 73.03(\Omega)$$

$$Z = R = 20\Omega, \quad \phi = 0, \quad I = \frac{250}{20} = 12.5(\mathrm{A})$$

$$v_R = v_a = 250\mathrm{V}, \quad v_L = 12.5 \times 73.03 = 913(\mathrm{V}) = v_C$$

注意:在电感或电容两端电压最大值是电源电压的 $\frac{913}{250} = 3.65$ 倍.

32.94[c] 对图 32-15,求每一元件的瞬时电流.

解 ☞ 三个电流方程为

$$Ri_R = u_a, \quad L\frac{di}{dt} = u_a, \quad \frac{1}{C}i_c = \frac{du_a}{dt} \tag{1}$$

对(1)的稳态解为

$$i_R = \frac{v_a}{R}\sin\omega t = I_R\sin\omega t, \quad i_L = -\frac{v_a}{\omega L}\cos\omega t \equiv -\frac{v_a}{X_L}\cos\omega t \equiv -I_L\cos\omega t$$

$$i_C = v_a\omega C\cos\omega t = \frac{v_a}{X_C}\cos\omega t \equiv I_C\cos\omega t \tag{2}$$

其中阻抗 X_L、X_C 前面已定义过了.

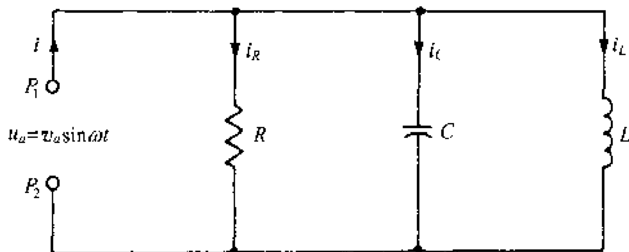


图 32-15

32.95 对图 32-15 所示的电路,试求出流过电源的电流的瞬态表达式. 以及电流和电路的阻抗之间的相角.

解 ☞ $i = i_R + i_L + i_C = v_a\left[\frac{1}{R}\sin\omega t + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)\cos\omega t\right] \equiv I\sin(\omega t + \phi)$

其中 $I \equiv v_a/Z$,阻抗和相角分别为(与题 32.92 相似).

$$\frac{1}{Z}=\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2\right]^{1/2},\quad \tan\phi=\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)\bigg/\frac{1}{R}$$

32.96　由图 32-15 以及题 32.94、32.95 的结果，画出相应的矢量图，说明瞬时电流与电动势的关系．

解　☞ 图 32-16 中 5 个矢量为 $\boldsymbol{v}_a$，$\boldsymbol{v}_R$，$\boldsymbol{I}_L$，$\boldsymbol{I}_C$，$\boldsymbol{I}$．其中 $\boldsymbol{I}_R$ 与 $\boldsymbol{v}_a$ 同相，$\boldsymbol{I}_C$ 超前 $\boldsymbol{v}_a$ 90°，$\boldsymbol{I}_L$ 落后 $\boldsymbol{v}_a$ 90°，$\boldsymbol{I}$ 超前或落后 $\boldsymbol{v}_a$ $|\phi|$ 角度．与前面一样，y 方向分量表示瞬时值，等式 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_R+\boldsymbol{I}_L+\boldsymbol{I}_C$ 表明电路内电荷守恒．

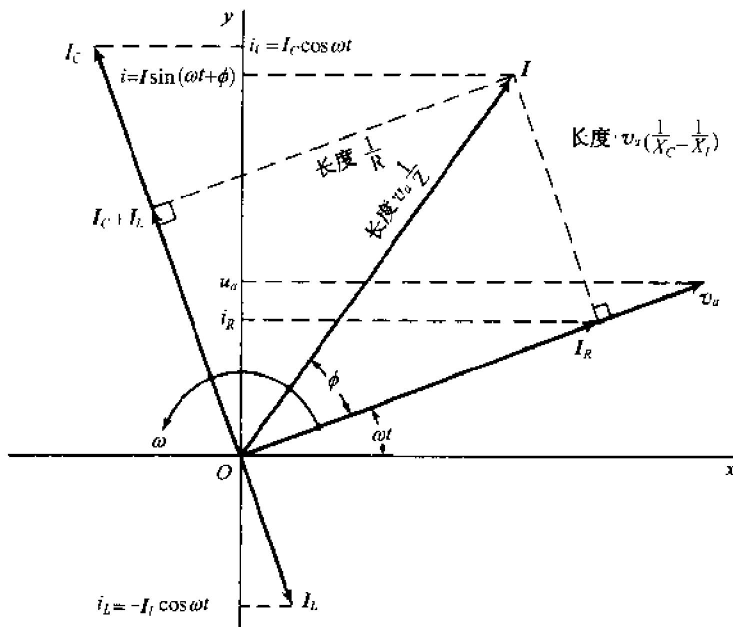


图 32-16

32.97　对题 32.96，写出电源提供的平均功率的表达式．

解　☞ 交流发电机的平均功率的表达式为

$$P_{avg}=I_{rms}V_{a,rms}\cos\phi=(I_{R,rms})^2R$$

这与串联电路形式一样，只不过这里 $\cos\phi=\frac{Z}{R}$，ϕ 是 i 与 v_a 之间的相角．

32.98　设在图 32.15 中 $v_a=150\sin400t$，$R=20\Omega$，$L=0.06\text{H}$，$c=18\mu\text{F}$，分析该电路．

解　☞ $X_L=\omega L=400\times0.06=24(\Omega)$，　$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{400\times18\times10^{-6}}=139(\Omega)$

$\frac{1}{Z}=\left[\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{139}-\frac{1}{24}\right)^2\right]^{1/2}$，即 $Z=16.5\ \Omega$．　$I_R=\frac{150}{20}=7.5(\text{A})$．$I_L=\frac{150}{24}=6.25(\text{A})$，

$I_C=\frac{150}{139}=1.08(\text{A})$，．$I=\frac{150}{16.5}=9.09(\text{A})$

瞬态值：$i_R=7.5\sin400t$ A，　$i_L=-6.25\cos400t$ A，　$i_C=1.08\cos400t$ A

相角由下式给出 $\tan\phi=R\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)=-0.689$，$\phi=-0.604$ rad

$$i=9.09\sin(400t-0.604)\text{A}$$

平均功率 $P_{avg}=(I_{R,rms})^2R=(7.5/\sqrt{2})^2\cdot20=562.5(\text{W})$．

第三十三章　电　磁　波

33.1　位移电流;麦克斯韦方程组;光速

33.1[c]　平板电容器的电荷随时间变化的方程为 $q=q_0\sin 2\pi ft$. 两板足够大,且距离很近(面积 $=A$,间距 $=d$). 忽略边缘效应,求通过电容的位移电流,写出描述进入电容电流的方程式.

解　☞ 通过一个表面的位移电流等于 ε_0 乘以穿过该表面的电通量的变化率. 在两板之间,选择一个环形区域,环面平行于两板且与板面积等大. 这样,所有的磁场线都通过此区域. 因为 $E=q/(A\varepsilon_0)$,且垂直于两板,变化的电流穿过的面积为 A,即 $EA=q/\varepsilon_0$,且有 $\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q/\varepsilon_0)=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=i$,此即实际通过电流的电流. 所以,位移电流为 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=2\pi fq_0\cos 2\pi ft$.

33.2[c]　如图 33-1,电容两极板之间的磁感应强度为 B,以电场的变化率 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 表示两板间的 B.

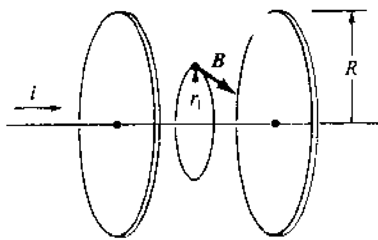


图 33-1

解　☞ 考虑平行于两板间半径为 r_1 的环. 根据由麦克斯韦修正的包含位移电流的安培定律,对于此闭合曲线 l 及曲线围成的曲面 S,有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left[\iint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}+\varepsilon_0\iint_S\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}\right] \tag{1}$$

在两板间,$\boldsymbol{J}=0$,$\boldsymbol{E}$ 是空间均匀的,因而(1)为

$$B2\pi r_1=\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi r_1^2,\quad B=\frac{\mu_0\varepsilon_0 r_1}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},\quad r<R \tag{2}$$

33.3　参见题 33.2,计算 $r_1=R=0.100\mathrm{m}$,且 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=1.00\times10^{10}\mathrm{V/m\cdot s}$ 时的 B 值.

解　☞ $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m/A}$, $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$,由题 33.2 的等式(2)得

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m/A})(8.85\times10^{-12}\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(1.00\times10^{-1}\mathrm{m})(1.00\times10^{10}\mathrm{V/m\cdot s})}{2}$$

$$=5.56\times10^{-9}\mathrm{T}$$

33.4[c]　写出麦克斯韦方程的积分形式并简介各方程. 假定存在电荷密度和电流密度分布,且介质的 $\mu=\mu_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$.

解　☞ 方程组可写为

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=0 \tag{2}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3}$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\iint \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}+\varepsilon_0\iint\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{4}$$

方程(1)是电场 $\boldsymbol{E}$ 的高斯定理,与库仑定律等价;方程(2)是磁场 $\boldsymbol{B}$ 的高斯定理,它的基础是实验观察没有发现磁单极子,因而没有场线能从闭合面内发出;方程(3)是法拉第感应定律的积分形式;方程(4)是安培环路定律,包含了传导电流与位移电流的等价性. 整个电磁学的实验基础被概括在上述四个方程和下面定义 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方程之中. 作用在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的试验电荷 q 上的力 $\boldsymbol{F}$ 由方程

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{5}$$

给出,这就是洛伦兹力公式.

33.5[c]　在自由空间中,写出麦克斯韦方程组的微分形式.

解 ☞ 若空间无电荷和电流，题 33.4 中方程(1)至(4)有各自不同的微分形式

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t},\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t},\quad \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t},\quad \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{4}$$

33.6 为何说麦克斯韦方程组表明在自由空间存在电磁波以及光是一种电磁波?

解 ☞ 适当地微分并结合题 33.5 中的八个不同方程(见题 33.23)，可得下列简单的二阶方程：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

这里 ψ 代表 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 的任一分量，上式正是众所周知的三维波动方程(见题 33.21)，其传播速度

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{1}{\sqrt{(8.854\times10^{-12}\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m})}}=2.998\times10^8\mathrm{m/s}=c \qquad (实验光速)$$

33.7 检查题 33.6 中 v 的单位.

解 ☞ 因为 $1\mathrm{H}=1\mathrm{J/A^2}=1\mathrm{N\cdot m\cdot s^2/C^2}$

$$[v]=\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(\mathrm{N\cdot s^2/C^2})}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{s^2/m^2}}}=\mathrm{m/s}$$

33.8 一束激光发射到月球，再被一个由宇航员放置的镜子反射回地球，如果月球离地球有 240000mi，光来回一次需多长时间?

解 ☞ 令 S 为来回一次的距离，则 $S=ct$，即 $2(240000)=(186000\mathrm{mi/s})t$ 得

$$t=2.58\mathrm{s}$$

33.9 天文距离单位光年(l.y.)是指光在一年中行进的距离. 将这个距离换算成 km.

解 ☞ $1\mathrm{l.y.}=(2.998\times10^5\mathrm{km/s})(365.25\mathrm{d})(24\mathrm{h/d})(3600\mathrm{s/h})=9.47\times10_{12}\mathrm{km}$

33.10 如图 33-2，迈克耳孙用八边镜测量光速的实验中，若旋转的八边镜与反射镜之间距离 35.4km，求所需的最小旋转频率.

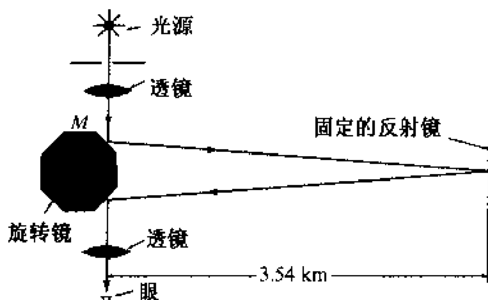


图 33-2

解 ☞ 在光从八边镜到达反射镜再返回的时间内，八边镜必须旋转 $\frac{1}{8}$ 周，令旋转频率为 f，我们得到

$$t=\frac{70.8\mathrm{km}}{3\times10^5\mathrm{km/s}}=\frac{1}{8f},\ f=529.7\mathrm{r/s}$$

33.11 用迈克耳孙法测光速时，一个十二边镜以 500r/s 旋转，若光速为 300000 km/s，则旋转镜到反射镜间距多远?

解 ☞ 由题 33.10，来回所需时间为

$$t=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{500}\right)=\frac{1}{6000}(\mathrm{s}),\quad s=ct=300000\left(\frac{1}{6000}\right)=50(\mathrm{km}),\quad \frac{s}{2}=25\mathrm{km}$$

33.12 在地球上某一特定的位置，中午 12 点太阳看上去正经过子午线，当太阳发出这些光时它是在什么角度?

解 ☞ 太阳到地球的距离近似为 92×10^6mi. 因为 $c=186000$mi/s，光需 $495\mathrm{s}\left(8\frac{1}{4}\mathrm{min}\right)$ 到达地球. 太阳的角度位于子午线以东. 为得到精确的经度，以子午线往东算. 域为地球自转一周需 $24\mathrm{h}=86400\mathrm{s}$. 设 θ 为此题中的角度：$\theta/360=495/86400$. 得 $\theta=2.07°$，子午线以东.

33.13 菲佐(Fizeau)设计了一个测量光速的方法:一束光经镜子的反射经过齿轮的两齿,返回时恰好经过下一个齿缝.菲佐的齿轮有720个齿,反射镜与齿轮距离8.6km,他观察发现在转速为12.6r/s时没有光反射回齿轮,而最大光强出现在转速为25.2r/s时.求出菲佐方法测得的光速.

解 ☞ 令光往返一次的时间等于旋转周期的$\frac{1}{720}$.

$$t=\frac{2\times 8.6\text{km}}{c}=\frac{1}{25.2\times 720\text{s}^{-1}},\qquad c=3.12\times 10^5\text{km/s}$$

33.2 一维和三维波的数学描述

33.14 证明$f(x-vt)$是沿正x方向传播的行波.

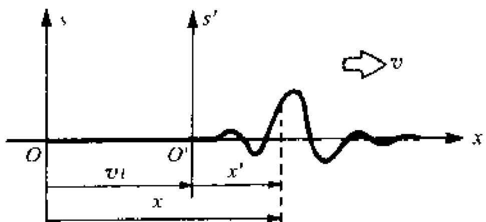


图 33-3

证 ☞ 如图33-3,建立一个以v向右移动的坐标系S',在$t=0$时,坐标系S,S'重合,则$x'=x-vt$,在S'系中,波函数与时间无关.因而,在S'系中,波形不变,而在S系中波以速度v向右移,故是行波.

33.15[c] 证明$\psi(x,t)=f(x\mp vt)$是一维波动微分方程的解.

证 ☞ 此处f是x'的函数,$x'=x\mp vt$是x和t的函数.因而由连乘规则

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x'},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}=\mp v\frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\mp v\frac{\partial f}{\partial x'}\right)=\mp v\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\mp v\frac{\partial}{\partial x'}\left(\mp v\frac{\partial f}{\partial x'}\right)=v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}=v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\quad 或\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

33.16[c] 如果$\psi_1(x,t)$和$\psi_2(x,t)$是微分波动方程的两个解,证明$\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)$也是波动方程的解.

证 ☞ 因为ψ_1和ψ_2是解

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\quad 且\quad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$$

叠加此两方程

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right)\quad 即\quad \frac{\partial^2(\psi_1+\psi_2)}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(\psi_1+\psi_2)}{\partial t^2}$$

此即一维波动方程的叠加原理

33.17 证明简谐波$\psi(x,t)=A\sin(kx\mp\omega t)$的空间周期性$\psi(x,t)=\psi(x\pm\lambda,t)$要求$k=2\pi/\lambda$.

证 ☞ 我们知道正弦函数周期为2π,即

$$A\sin k(x-vt)=A\sin k[(x\pm\lambda)-vt]=A\sin[k(x-vt)\pm 2\pi]$$

第二个等号给出$|k\lambda|=2\pi$,又k和λ为正,得$k=2\pi/\lambda$

33.18 证明:当$v=\omega/k$时,简谐波函数$\psi(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$是一维波动微分方程的解.

证 ☞ 因为$\psi(x,t)=A\sin k(x-vt)=f(x-vt)$,所以由题33.15可直接得到本题结论.

33.19 证明简谐波动方程可以被描述为(a)$\psi=A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\mp\frac{t}{\tau}\right)$,(b)$\psi=A\sin 2\pi\nu\left(\frac{x}{v}\mp t\right)$,(c)$\psi=A\sin 2\pi(\kappa x\mp\nu t)$

此处$\kappa\equiv 1/\lambda$,而λ和τ分别是波长和周期.

证 ☞ (a)从 $\psi = A\sin k(x \mp vt)$ 开始，由 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，我们得 $\psi = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\mp\frac{vt}{\lambda}\right)$，而 $v/\lambda = \nu = 1/\tau$.(b)由(a)的结果 $\psi = A\sin 2\pi\nu\left(\frac{x}{\lambda\nu}\mp\frac{t}{\tau\nu}\right) = A\sin 2\pi\nu\left(\frac{x}{v}\mp t\right)$，因为 $\lambda\nu = v$ 且 $\tau\nu = 1$.(c)将 $\lambda=\frac{1}{k}$ 和 $\tau=\frac{1}{\nu}$ 代入(a)中即得要证结果.

33.20　一光波的波动方程为 $\psi(x,t) = 10^3\sin\pi(3\times10^6 x - 9\times10^{14}t)$(SI 制)，试确定其(a)波速，(b)波长，(c)频率，(d)周期.

解 ☞ (a)比较形式 $\psi(x,t) = A\sin k(x-vt)$，给定的方程可以写为 $\psi(x,t) = 10^3\sin 3\times10^6\pi(x - 3\times10^8 t)$，即可得 $v = 3\times10^8\text{m/s}$.(b)由(a)$k = 3\times10^6\pi\text{m}^{-1}$，因此 $\lambda = 2\pi/k = 666\text{nm}$.(c)$\nu=\frac{v}{\lambda}=\frac{3\times10^8\text{m/s}}{\frac{2}{3}\times10^{-6}\text{m}} = 4.5\times10^{14}\text{Hz}$.(d)$\tau = 1/\nu = 2.2\times10^{-15}\text{s}$.

33.21　一维波动方程如何推广到三维？简谐波的普遍形式是什么？

解 ☞ 我们可以由空间变量的对称性推出三维波动方程，就是说，在右手系中变换空间变量，方程的形式不变.在笛卡尔坐标系中

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

为三维波动方程的合适形式

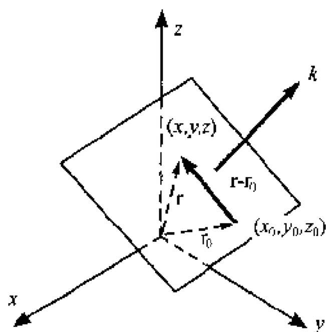


图 33-4

如图 33-4，对过定点(x_0,y_0,z_0)且垂直波矢 $\boldsymbol{k}$ 的平面写出其方程，只要$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{k}=0$，即 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$ 常量，矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 在给定平面内，这就是平面方程，所以 $\psi(\boldsymbol{r}) = A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$定义在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面簇中，因为 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=$ 常量，所以 $\psi(\boldsymbol{r})$为常量，当由一平面向另一平面移动时，$\psi(\boldsymbol{r})$按正弦变化.我们将其写为 $\psi(\boldsymbol{r},t) = A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\mp\omega t)$，沿 $\boldsymbol{k}$ 正向时取负号，反向时取正号.像一维空间中一样，我们还可以在正弦函数中加入一任意的相角常数.

33.22　三维空间中存在从一点发散(或会聚于一点)的球面波.试描述球面谐波.

解 ☞ 球面波动方程用球面坐标写来比较容易.通常写作

$$\psi(r,t)=\frac{A}{r}\sin k(r\mp vt)$$

式中常数 A 为给定波源强度，由$\frac{A}{r}$知，波动振幅由源点向远处逐渐减弱.这体现了能量守恒定律，同样，减号和加号分别表示波动传播方向背离还是朝向源点.任意时刻的表达式代表一个同心球面，在此面上 r 为常量，因此 $\psi(r,t)$为常量.

(同样可以考虑球面脉冲，例如一个点源不是简谐振动而是反复振动、停止.所得的信号尽管很短，仍会以某种形式的球面脉冲向各个方向传播).

33.23[c]　利用自由空间中的麦克斯韦方程组证明 E_x 实际遵从三维空间波动方程，传播速度为 $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\equiv C$.

解 ☞ 由题 33.5 将方程(4a)对时间微分得

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^2 B_y}{\partial z\partial t}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

利用方程(3b)和(3c)得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

方程(1)对 x 求偏导得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}$$

比较包含 E_y，E_z 的最后两个方程，可得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

这就是 33.5 的结论，与题 33.6 的方程比较可得 $v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

33.24 据 33.21，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ = 常量是垂直 $\boldsymbol{k}$ 且过定点 (x_0, y_0, z_0) 的平面方程. 试确定此常量的形式并写出笛卡尔坐标系中的简谐波函数.

解 ☞ 平面方程为 $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$，其笛卡尔系坐标 $\boldsymbol{r}=[x, y, z]$，$\boldsymbol{r}_0=[x_0, y_0, z_0]$ 并且 $\boldsymbol{k}=[k_x, k_y, k_z]$. 因此

$$(x-x_0)k_x+(y-y_0)k_y+(z-z_0)k_z=0$$

即

$$xk_x+yk_y+zk_z=x_0k_x+y_0k_y+z_0k_z$$

方程左侧为 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$，右侧即所求的常量. 简谐波函数 $\psi(\boldsymbol{r}, t)=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\mp\omega t)$ 变为

$$\psi(x, y, z, t)=A\sin(xk_x+yk_y+zk_z\mp\omega t).$$

33.25[c] 当方向角的余弦为 α、β、γ 时，写出笛卡儿系中的平面简谐波函数，这里 $k_x=\alpha k$，$k_y=\beta k$，$k_z=\gamma k$ 且 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. 然后证明这个方程是三维波动方程的解.

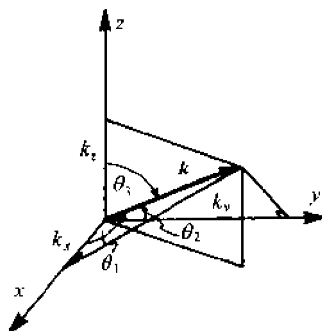


图 33-5

解 ☞ 由 $\psi(\boldsymbol{r}, t)=A\sin(k_xx+yk_y+zk_z-\omega t)$；用相应的方向余弦代替 k_x、k_y、k_z. 如图 33-5 所示.

$k_x=k\cos\theta_1=k\alpha$，$k_y=k\cos\theta_2=k\beta$，

$k_z=k\cos\theta_3=kr$.

而 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=k^2$，因此

$$\psi(\boldsymbol{r}, t)=A\sin[k(\alpha x+\beta y+\gamma z)-\omega t]$$

下面证明其为波动方程的解. 取偏微分得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\partial^2k\psi,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\beta^2k^2\psi,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\gamma^2k^2\psi,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega^2\psi$$

根据前三个方程利用 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 和 $k=2\pi/\lambda=\omega/v$，得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-k^2\psi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

33.26 (a)写出振动方向和沿波传播方向的波动方程形式，(b)如果振动发生在一个平面之中，即所谓平面振动，这种波常被叫作平面偏振波或线偏振波. 写出线偏振平面简谐波的表达形式.

解 ☞ (a)将振幅写为向量形式，可以确定横波的位移方向

$$\psi(\boldsymbol{r}, t)=\boldsymbol{A}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$$

此处 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 叫作波矢. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 在任意时刻确定振动平面.

(b)对一个线性偏振平面谐波，$\boldsymbol{A}$ 为常量且 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}=0$. 图 33-6 画出许多垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的波阵面，描述了一个平面简谐波，$\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 由一个平面向另一个平面按正弦规律变化. 而且它线性偏振，所以在任意一

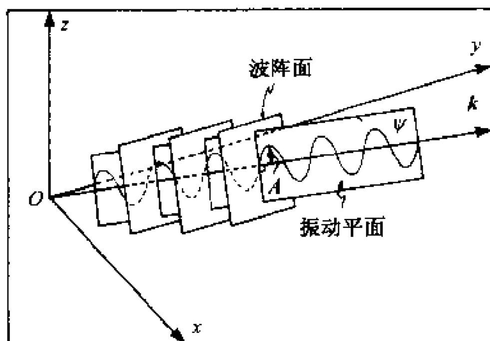


图 33-6

个波阵面上所有点的振幅矢量是相同的,相应的振动平面平行.如果振幅矢量是随时间迅速而无规则变化的函数.这种波称为非偏振波.

33.27 由于平面简谐波具有空间周期性.我们可以写 $\psi(\boldsymbol{r},0)=\psi(\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{k}/k,0)$.也就是说,空间某处的情形与传播方向上经 λ 距离后的情形一样,利用此点证明 $|\boldsymbol{k}|=k=2\pi/\lambda$.

证 ☞ 对任意固定时刻 t, $\psi(\boldsymbol{r},t)=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ 且 $\psi[(\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{k}/k),t]=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot[\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{k}/k]-\omega t)=A\sin[k^{-1}\cdot r^{-1}+\lambda k-\omega t]$.比较两边,对最小重复距离 λ, $\lambda k=2\pi$,即 $k=2\pi/\lambda$.

33.28 什么是波阵面?

解 ☞ 波的相位相同的点组成的面叫波阵面,对一个平面波,波阵面方程由 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=\alpha$ 给出.这是一个沿 $\boldsymbol{k}$ 方向以速度 $\omega/k=v$ 传播的平面的方程.在 $t=0$ 时刻,平面距离源点为 $|\alpha|/k$,相似的(见题 33.22),球面源波阵面方程为 $r-vt=\beta$,是一个以 v 的速度扩张的球壳.

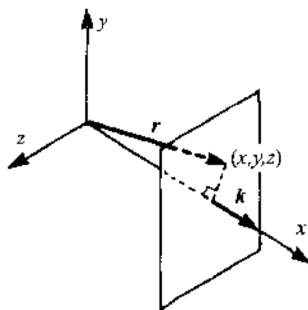


图 33-7

33.29 (a)画出一个沿 x 轴正向传播的平面波波阵面,(b)写出这种沿 x 轴的平面简谐波的表达式.

解 ☞ (a)见图 33-7.(b)波动方程的一般表达式为 $\psi(\boldsymbol{r},t)=A\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$,或用笛卡尔坐标写为 $\psi(\boldsymbol{r},t)=A\sin(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)$,但此处 $\boldsymbol{k}$ 沿 x 方向 因此 $k_x=k$, $k_y=k_z=0$. $\psi(\boldsymbol{r},t)=A\sin(kx-\omega t)$.

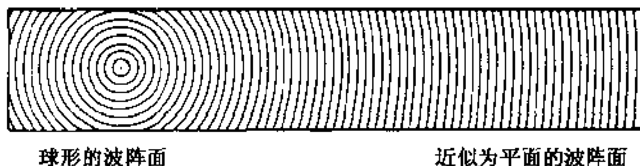
33.30 对球面波源拍照片需要将相机聚焦于无穷远,以便接收平面波,为什么?

解 ☞ 见图 33-8,对相机而言,远处的球面波在一个相对很小的范围内波阵面可近似为平面.

33.31 一无线电波频率 900kHz,求其波长.某点距其波源 50km,每秒有多少个波峰通过此点?

解 ☞ 波长 $\lambda=c/f=(3.00\times10^8)/(9.00\times10^5)=333(\text{m})$

每秒钟通过该点的波峰数为频率 9.00×10^5Hz(与距离无关).



球形的波阵面　　　　近似为平面的波阵面

图 33-8

33.32 你面向一个 161km(100mi)远处的无线电台,无线电波传到你要多长时间?如果频率为 10^6Hz,每秒它将发出多少波峰?自由空间中波峰每秒走多远?此波 λ 为多少?

解 ☞ 时间 $t=s/c=(1.61\times10^5)/3\times10^8=540(\mu\text{s})$.电台每秒发出波峰 10^6 个,速度 3×10^8m/s,峰峰距离 $\lambda=3\times\times10^8/10^6=300(\text{m})$.

33.33 一个标准的无线电频率在 535kHz 和 1605kHz 之间.VHF 高频电台(2～13 频道)的频率在 54MHz 和 216MHz 之间,而 UHF 电台(14～83 频道)的频率在 470MHz 和

890MHz 之间，所涉及频率的相应波长是多少？

解 ☞ 所有情况下波以光速运动，所以

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3\times 10^8 \text{m/s}}{\nu}$$

ν/MHz	λ/m	ν/MHz	λ/m
0.535	561	216	1.39
1.605	187	470	0.638
54	5.56	890	0.337

33.34 光的波长通常用 nm 测量. 例如，位于光谱中间的黄光波长约为 580nm，以此来和人的头发粗细相比较（直径约 4×10^{-2}mm）

$$\frac{4\times 10^{-5}\text{m}}{580\times 10^{-9}\text{m}} = 69$$

每根头发的直径相当于 69 个波长.

33.35 光的波长从紫到红分布在 390nm 到 780nm 之间. 真空光速约为 3×10^8m/s，这等同于其它电磁波. 请说明相应的频率的分布范围.

解 ☞ 因为 $v=\nu\lambda$， $\nu_{紫} = \dfrac{3\times 10^8\text{m/s}}{390\times 10^{-9}\text{m}} = 7.7\times 10^{14}\text{Hz}$， $\nu_{红} = \dfrac{3\times 10^8\text{m/s}}{780\times 10^{-9}\text{m}} = 3.8\times 10^{14}\text{Hz}$.

所以频率分布为 380～770THz（$1\text{THz}=10^{12}\text{Hz}$）.

33.36 光速为 18600mi/s，一雷达系统发出速度为光速的超短无线电波脉冲，一个脉冲发出多少微秒后雷达站将接收到距其 18.6mi 远的飞机的反射信号？

解 ☞ 设 s 为往返路程 则 $s=ct$，即 $2\times 18.6 = 18600t$， $t=2\times 10^{-4}\text{s}=200\mu\text{s}$.

33.37 用雷达如何通过多普勒效应测汽车速度？

解 ☞ 光的多普勒效应涉及到相对论因素，但因为波源速率同光速相比很小，对静止观察者来说，$\nu_L \approx (1+v/c)\nu_s$. 式中 v 是波源速率（朝向观测者），ν_L 是观测者所感觉的频率. 如果光从移动的平面镜（汽车）反射回来，反射频率为移动波源的频率. 此时波源以其自身的象的速率移动，为两倍的镜子的速率. 应用多普勒效应测量汽车速率时，反射波与入射波频率有一微小差别

$$F=\nu_r-\nu \approx \frac{2v\nu}{c}, \quad 即 \quad v\approx \frac{Fc}{2\nu}$$

因此由此频率差，光速以及已知的入射频率即可测得车速.

33.38 一个用来检测驶来汽车速率的雷达发出频率 1000MHz 的电磁波，如果观测到的频率差为 150Hz，求车速.

解 ☞ 由 33.37 题，

$$v=\frac{(150\text{Hz})(186000\text{mi/s})\cdot(3600\text{s/h})}{2(10^9)\text{Hz}} = 50.2\text{mi/h}$$

33.39 简单讨论二维空间的波.

解 ☞ 二维空间中波的方程有如下形式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1}$$

其具有物理意义的解与奇维空间中的波有不同的形式，为证明这一点，我们注意到在一维情况下方程的解为 $f(x\pm vt)$，代表由源点 O 发出的沿 x 轴传播的扰动. 在三维空间中，相应的波应为从源点发出的球面波 $(1/r)f(r-vt)$，它们的振幅会逐渐减小，但仍保持球形. 对存在于二维中的点源，它发出的波常常会变形，典型的是拖一条长长的尾巴. 如图 33-9.

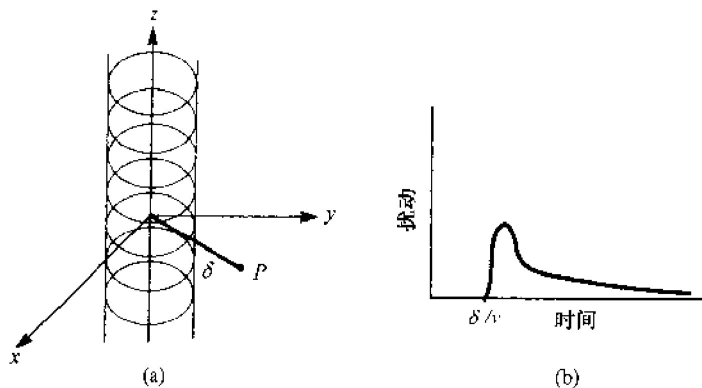


图 33-9

33.3　电磁波的场的分量;感应电动势

33.40[c]　平面电磁波的电场和磁场在垂直于传播方向的平面内是一常数,证明此电磁波一定有横向的电场.

证　☞ 如果波沿 z 方向传播,那么电场一定与 x 和 y 无关.即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(z,t)$.因为 $\boldsymbol{E}$ 不是 x、y 的函数.所以由题 33.5 中(1)式可得出 $\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$,因此,$E_z=$常数,我们对此不感兴趣而只关心沿 z 轴变化的电磁波,它一定具有 x,y 分量,所以 $\boldsymbol{E}$ 是横向的.

33.41[c]　假设有一个线偏振平面电磁波(题 33.26),其电场为 $\boldsymbol{E}=E_x(z,t)\boldsymbol{i}$,证明 $\boldsymbol{B}=B_y(z,t)\boldsymbol{j}$

证　☞ 电场在 x 轴方向偏振,因为只有 $\boldsymbol{i}$ 分量,而且电磁波沿 z 轴传播,因为 $E_y=E_z=0$ 且 $E_x=E_x(z,t)$,题 33.5 中方程(3)变为

$$0=\frac{-\partial B_x}{\partial t},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t},\quad 0=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

这意味着 B_x、B_z 为常量与我们所关心的无关.因此 B_y 是唯一时变因素,所以 $\boldsymbol{B}=B_y(z,t)\boldsymbol{j}$ 是电磁波的磁场部分.$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 互相垂直且均垂直于电磁波传播方向.

33.42[c]　假设平面简谐电磁波其电场为

$$E_z(y,t)=E_{0z}\sin\left[\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)+\epsilon\right]\quad(\text{其中 }\epsilon\text{ 为不变的相位角})$$

确定其相应磁场 $\boldsymbol{B}$,并对波作一简单描述.

解　☞ 因为 $E_x=E_y=0$,由题 33.5(3a)得

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\quad\text{或}\quad\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\omega}{c}E_{0z}\cos\left[\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)+\epsilon\right]$$

两边对 t 积分得

$$B_x(y,t)=\frac{1}{c}E_{0z}\sin\left[\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)+\epsilon\right]=\frac{1}{c}E_z(y,t)$$

(我们忽略了积分常量,因为它最多描述一个附加的稳定的磁场).总之,电场磁场是正交的,它们的值满足 $E=cB$,并都垂直波的传播方向.$E=cB$ 对穿越自由空间的任何平面电磁波都成立

33.43[c]　通常,电磁波的传播方向由 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 给出.证明沿 x 轴正方向传播的平面简谐波,其电场为 $E(x,t)=E_z(x,t)$

证　☞ 由题 33.5 的麦克斯韦方程组(3)得

$$0=\frac{\partial B_x}{\partial t},\quad -\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t},\quad 0=\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

这就是说和题 33.42 一样,$B_x=B_z=0$,$B_y=-\frac{E_z}{c}$;用矢量形式,$\boldsymbol{E}=E_z\boldsymbol{k}$,　$\boldsymbol{B}=-(E_z/c)\boldsymbol{j}$,　且 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=-(E_z^2/c)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}$.因为 $-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$,所以均成立

33.44 无线电站发出 1.20MHz 的电场波,写出电场方程.假设你离无线电站足够远,电场波可看作沿 $-x$ 方向传播的平面波,电场的方均根值为 3.0mV/m,如果波沿 $-x$ 方向呢?

解 ☞ 标准形式 $E=E_0\sin\omega[t-(x/c)]$, $\omega=2\pi(1.20\times10^6)=7.54\times10^6(\text{rad/s})$, $c=3\times10^8\text{m/s}$, $E_0=\sqrt{2}(3.0)=4.24\text{mV/m}$,因此,$E=4.24\sin[(7.54\times10^6)]\left(t-\dfrac{x}{3\times10^8}\right)\text{mV/m}$.传播方向反向时用 $-x$ 代替式中 x 即可.

33.45 假设真空平面电磁波电场 $\boldsymbol{E}$ 为(SI 制)$E_x=10^2\sin\pi(3\times10^6z-9\times10^{14}t)$, $E_y=0$, $E_z=0$.确定波速,频率,波长,周期,初相角,电场振幅和偏振情况.

解 ☞ 波函数的基本形式为 $E_x(z,t)=E_{0x}\sin k(z-vt)$.与 $E_x=10^2\sin\pi(3\times10^6z-9\times10^{14}t)$ 相比较可以看出

$$k=3\times10^6\pi\text{m}^{-1},\quad v=3\times10^8\text{m/s}$$

因为 $k=2\pi/\lambda=3\times10^6\pi$,所以 $\lambda=666\text{nm}$

$$\nu=\frac{v}{\lambda}=\frac{3\times10^8\text{m/s}}{\frac{2}{3}\times10^{-6}\text{m}}=4.5\times10^{14}\text{Hz}$$

周期 $\tau=\dfrac{1}{\nu}=2.2\times10^{-15}\text{s}$,初相角显见为 0,电场振幅为 $E_{0x}=10^2\text{V/m}$,波沿 z 方向传播,沿 x 方向线性偏振,此波应为红光.

33.46 写出与题 33.45 中电磁波相关的磁场表达式.

解 ☞ 波沿 z 方向传播而电场沿 x 方向振动.换句话说,电场位于 xz 平面.相应地,因为 $\boldsymbol{B}$ 垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和传播方向,其一定位于 yz 平面内.因此,$B_x=0$, $B_z=0$, $\boldsymbol{B}=B_y(z,t)\boldsymbol{j}$.由题 33.42, $E=cB$ 得

$$B_y(z,t)=0.33\times10^{-6}\sin\pi(3\times10^6z-9\times10^4t)\text{T}$$

33.47 在地球上某特定区域内,平面电磁波的电场按下列方式分布:$E=2\times10^{-4}\cos(5\times10^6t)$(SI 制).如果在 $x=0$ 处电场沿 $-x$ 方向,那么,用 x, t 表示的波动方程为何?相应的磁场方程呢?

解 ☞ 用余弦形式,初相角为 0,标准形式为 $E=2\times10^{-4}\cos[2\pi ft+(2\pi fx)/v]$,用加号是因为波沿 $-x$ 方向,但 $2\pi f=5\times10^6$ 且 $v=3\times10^8$,因此 $E=2.0\times10^{-4}\cos(5\times10^6t+0.017x)\text{V/m}$.由于 $B=E/c$,得 $B=6.7\times10^{-13}\cos(5\times10^6t+0.017x)\text{T}$. $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直且在 yz 平面内,$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $-\hat{x}$ 成右手系.

33.48 电磁波的电场分布由方程 $E=10^{-4}\sin(6\times10^5t-0.01x)$给出(SI 制).求波的频率和速度.电场的最大值是多少?相应的磁场方程呢?

解 ☞ 波动方程一般形式为 $E=E_0\sin[2\pi ft-(2\pi x)/\lambda]$,比较得 $f=95.5\text{kHz}$,同样$(2\pi x)/\lambda=0.01x$,所以 $\lambda=628\text{m}$.又因为 $\lambda=v/f$,所以 $v=6.0\times10^7\text{m/s}$.振幅为 10^{-4}V/m,即 E 的最大值.磁场方程为 $B=E/v=c\times10^{-13}\sin(6\times10^5t-0.01x)\text{T}$. $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 x 轴正向构成右手系.注意到 $v<c$ 说明电磁波是在介质中传播的.

33.49 平面简谐电磁波频率 $600\times10^{12}\text{Hz}$(绿光),在真空中沿 x 轴正向传播,电场振幅 42.42V/m,由于线性偏振,振动平面和 xz 平面成 45°夹角,写出 E、B 的表达式.

解 ☞ 电场振幅 $E_0=(E_{0y}^2+E_{0z}^2)^{\frac{1}{2}}$,因为夹角为 45°, $E_{0y}=E_{0z}$,所以 $E_0=42.42=\sqrt{2}E_{0y}$, $E_{0y}=E_{0z}=30\text{V/m}$.把相位写成 $\omega(t-x/c)$的形式,电场为 $E_x=0$,

$E_y=E_z=30\sin\left[2\pi600\times10^{12}\left(t-\dfrac{x}{3\times10^8}\right)\right]$, $\omega=2\pi\nu$,由 $E=cB$,得 $B_x=0$,

$B_z=B_y=10^{-7}\sin\left[2\pi600\times10^{12}\left(t-\dfrac{x}{3\times10^8}\right)\right]$,因而

$$\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}=E_y(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),\quad \boldsymbol{B}=B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}=B_z(-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

得 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=E_yB_z(-1+1)=0$,所以 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$,且 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=E_yB_z(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i})=(E_y^2/c)2\boldsymbol{i}$,沿 x 轴正向.

33.50 电磁波的磁场在特定区域内满足下列关系：$B=10^{-12}\sin(5\times10^6t)$（SI 制）. 垂直该区域面积为 20cm^2 的 300 匝线圈内产生的感生电动势为多大？

解 ☞ 穿过线圈的磁通量 $\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=20\times10^{-16}\sin(5\times10^6t)$ 而

$$E=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-300\cdot(2\times10^{-15})(5\times10^6)\cos(5\times10^6t)$$
$$=-3.0\times10^{-6}\cos(5\times10^6t)(\text{V})$$

33.51 电视频率约为 100MHz，收音机频率的数量级为 1MHz，把它们作为典型频率，求在相同电场强度下由电视天线和收音机产生的感生电动势之比.

解 ☞ 感生电动势 $\mathscr{E}$ 正比于 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$，因为 $B=B_0\sin(2\pi ft+\phi)$，$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 有最大值正比于 f，由于两波具有相同的强度，B_0 对两波是相同的，因此最大的感生电动势比率为

$$\mathscr{E}_{10}/\mathscr{E}_{20}=f_1/f_2=100,\text{因为 } \mathscr{E}_0=\sqrt{2}\mathscr{E}_{\text{rms}},\text{所以有 } \mathscr{E}_{1,\text{rms}}/\mathscr{E}_{2,\text{rms}}=100$$

33.52 一无线电波磁场为 $B=3\times10^{-14}\sin(6\times10^6t)$（SI 制）. 求出绕在磁导率为 100 的铁芯上的 200 匝线圈产生的感生电动势，线圈面积为 30mm^2.

解 ☞ 穿过线圈的磁通量 $\Phi=k_mBA=100B(3.0\times10^{-5})=9.0\times10^{-17}\sin(6\times10^6t)$ 所以

$$\mathscr{E}=-200\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-1.08\times10^{-7}\cos(6\times10^6t)\text{V}$$

33.53 无线电站在远处某特定区域产生的电场（SI 制）为 $E=10^{-4}\cos(1\times10^7t)$. 其频率是多少？它在沿其方向放置的 3m 长的导线两端产生的电势差最大值为多少？面积为 35cm^2 的单匝线圈在相应磁场中产生的最大感生电动势为多少？

解 ☞ 在任意时刻该电场在导线长度方向上为一常量. 因为电磁波可以写成 $\cos2\pi ft$ 的形式，由 $2\pi f=1\times10^7$，得 $f=1.60\times10^6\text{Hz}$. 因为 $V=-Es$，$V_{\max}=10^4(s)=3\times10^{-4}\text{V}$. $B_0=E_0/c=10^{-4}/c=3.33\times10^{-13}$；

$$\mathscr{E}_{\max}=\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right)_{\max}=A2\pi fB_0=2\pi(35\times10^{-4})(1.60\times10^6)(3.33\times10^{-13})$$
$$=11.7(\text{nV})$$

33.4 能流和动量流

33.54 讨论光波的能量，定义坡印亭矢量.

解 ☞ 电磁波的能量沿其传播方向流动（见题 33.43），即沿 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 的方向. 单位时间垂直流入自由空间表面单位面积的能量定义为坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}=c^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})/\mu_0$. $\boldsymbol{S}$ 的 SI 制单位为 W/m^2.

33.55 定义辐射流密度和辐射强度.

解 ☞ 光频的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 都是极高频的振动，直接测量 $\boldsymbol{S}$ 的瞬时值是不可能的，因此，我们可以考虑在一段时间上其平均值 $\langle S\rangle$，$\langle S\rangle$ 称为辐射流密度. 当能量从表面入射时，辐射流密度称为辐射强度，用 $I\equiv\langle S\rangle$ 表示.

33.56 一激光器发出直径 2mm 的平行光束，功率即辐射流为 100mW. 光束发散部分忽略不计，求其辐射强度.

解 ☞ 光束的横截面积为 $\pi(10^{-3})^2$，因此

$$I=\frac{100\times10^{-3}}{\pi(10^{-3})^2}=31.8(\text{kW/m}^2)$$

33.57 一自由空间中的简谐电磁波描述为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos(kx-\omega t)$. 证明 $I=(c\varepsilon_0/2)E_0^2$

证 ☞ 磁场形式为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\cos(kx-\omega t)$，所以

$\boldsymbol{S}=c^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=c^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0\cos^2(kx-\omega t)$ 因此

$$\langle S\rangle=c^2\varepsilon_0|\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0|\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle$$

在时间段 T' 上对 $\langle S\rangle$ 积分得

$$\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle=\frac{1}{T'}\int_t^{t+T'}\cos^2(kx-\omega t')\mathrm{d}t'$$

由于在 T' 与在另一个时间段 T 上平均值相同，由 $\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle=\frac{1}{2}$，

$E_0=cB_0$，且 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$，得

$$\langle S'\rangle=I=\frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2=\frac{1}{2c\mu_0}E_0^2$$

33.58 穿过自由空间的平面电磁波电场由 $E_x=0$, $E_y=0$, $E_z=100\sin\left[8\pi\times10^{14}\left(t-\frac{x}{3\times10^8}\right)\right]$确定．计算辐射强度 I.

解 ☞ 由 33.57，$I=(c\varepsilon_0/2)E_0^2$．由 $\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}\mathrm{c}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$

$E_0=100\mathrm{V/m}$　得

$$I=\frac{(3\times10^8)(8.85\times10^{-12})100^2}{2}=13.3(\mathrm{W/m^2})$$

33.59 平面简谐波在空间沿 y 轴传播．如果电场在 yz 平面内线性偏振，且 $\lambda_0=500\mathrm{nm}$．写出相应的磁场表达式，假定 $I=53.2\mathrm{W/m^2}$.

解 ☞ 由 I 可求得 E_0，　$I=\frac{c\varepsilon_0E_0^2}{2}$，　$53.2=\frac{3\times10^8\times8.85\times10^{-12}E_0^2}{2}$

得 $E_0=200\mathrm{V/m}$ 由 $B_0=E_0/c=66.7\times10^{-8}\mathrm{T}$

$B_x=66.7\times10^{-8}\sin\frac{2\pi}{500\times10^{-9}}(y-3\times10^8t)$，　$B_y=B_z=0$

33.60 真空中 60W 的单色光源向周围均匀发光，2.0m 外检测，求检测到的电场振幅．

解 ☞ 若 A 是以光源为中心，半径为 r 的球面面积．I 为辐射强度，则辐射能量为

$IA=I4\pi r^2$ 即 $\langle S\rangle4\pi r^2$．因而 $60=\left(\frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2\right)4\pi r^2=\frac{4\pi r^2}{2\mu_0c}E_0^2$，所以

$$E_0=\left(\frac{30\mu_0c}{\pi r^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{30(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)}{\pi(2)^2}\right]^{1/2}=30\mathrm{V/m}$$

33.61 测量垂直太阳光的吸光盘温度的升高可得出，晴天太阳光载到地表的能流为 $1.0\mathrm{kW/m^2}$．假定太阳光为单色光，求其电场、磁场的振幅．

解 ☞ 由题 33.57 知，

$E_0=\sqrt{2\mu_0c\langle S\rangle}=\sqrt{2(4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m})(3.0\times10^8\mathrm{m/s})(1.0\times10^3\mathrm{W/m^2})}=900\mathrm{V/m}$

$$B_0=\frac{E_0}{c}=\frac{900\mathrm{V/m}}{3.0\times10^8\mathrm{m/s}}=3.0\mu\mathrm{T}$$

33.62 一激光束横截面积为 $2.0\mathrm{mm^2}$，功率 $0.80\mathrm{mV}$，求光束的 I, E_0, B_0．假定光束由平面简谐单色波构成．

解 ☞ $I=P/A=8.0\times10^{-4}/2.0\times10^{-6}=400(\mathrm{W/m^2})$．由题 33.59 和 33.61 知，$E_0=[2I/c\varepsilon_0]^{\frac{1}{2}}=550\mathrm{V/m}$．$B_0=E_0/c=1.83\mu\mathrm{T}$

33.63 一无线电源发出 0.9MHz、50W 的电磁波，假定在以波源为球心的球面上电磁波分布均匀，(a)求 15km 远处的电磁波强度，(b)求此处电场磁场的振幅．

解 ☞ (a)球面积为 $A=4\pi R^2=4\pi(15\times10^3)^2=2.83\times10^9(\mathrm{m^2})$．所以 $I=P/A=50/A=1.77\times10^{-8}\mathrm{W/m^2}$．(b)由 $I=(c\varepsilon_0E_0)^2/2$，$E_0=(2I/c\varepsilon_0)^{1/2}=3.65\times10^{-3}\mathrm{V/m}$．$B_0=E_0/c=1.22\times10^{-11}\mathrm{T}$．

33.64 证明平面电磁波的平均能量密度 $\langle\rho_e\rangle=\langle S\rangle/c$，其中 $\boldsymbol{S}$ 为坡印亭矢量，波的动量密度是多少？

解 ☞ $I=\langle\boldsymbol{S}\rangle$是每秒钟穿过垂直于能量传播方向上单位面积的平均辐射能量．我们假设有垂直方向面积为 A，Δt 时间内穿过该面积的能量分布于体积 $V=(c\Delta t)A$ 中．平均能量密度 $\langle\rho_e\rangle$各处

相同，所以 Δt 内穿过 A 的总能量为 $\langle\rho_e\rangle c\Delta tA$．而单位时间内穿过单位面积的能量可以除以 $A\Delta t$ 得到．因而 $\langle S\rangle=c\langle\rho_e\rangle$．对于平面电磁波，简谐电场的平均能量密度为 $\varepsilon_0E_0^2/4$，简谐磁场的平均能量密度为 $B_0^2/4\mu$，由 $B_0=E_0/c$ 得 $\langle\rho_e\rangle=(\varepsilon_0E_0^2)/4+E_0^2/4c^2\mu_0=\varepsilon_0E_0^2/2$ 最后得 $\langle S\rangle=(c\varepsilon_0E_0^2)/2$．稍微深入分析我们发现辐射波带有动量．因此可以产生压力．动量密度 $\langle\rho_m\rangle=\langle\rho_e\rangle/c=\langle S\rangle/c^2$（量子理论指出，每个光子能量 $E=h\nu=hc/\lambda$，$\langle\rho_e\rangle=c\langle\rho_m\rangle$）．

33.65　利用地球表面太阳平均能流密度 $\langle S\rangle=1.0\text{kW/m}^2$，估计太阳光的 $\langle\rho_e\rangle$，$\langle\rho_m\rangle$

解　☞ 利用33.64的结果，

$$\langle\rho_e\rangle=\frac{\langle S\rangle}{c}=\frac{1.0\times10^3\text{W/m}^2}{3.0\times10^8\text{m/s}}=3.3\times10^{-6}\text{J/m}^3$$

$$\langle\rho_m\rangle=\frac{\langle S\rangle}{c^2}=\frac{1.0\times10^3\text{W/m}^2}{(3.0\times10^8\text{m/s})^2}=1.1\times10^{-14}\text{kg}\cdot\text{m/s}\cdot\text{m}^3$$

33.66[C]　一真空平行平板电容器已充电，平板为圆形，半径为 R，某时刻两板间电场强度大小为 E，取圆盘内部圆柱如图．(a)用 E 表示该圆柱表面上三部分的电场大小和方向（忽略边缘效应．即假定电容器外部无电场，内部电场均匀），(b)用 E 表示出圆柱表面三部分的磁场大小和方向．

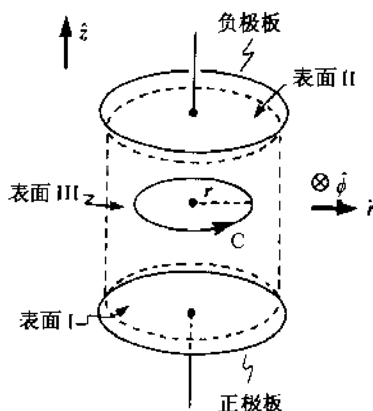


图 33-10

解　☞ 电容和圆柱体三部分表面如图33-10．取柱坐标，单位方向矢量 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{\varphi}$，$\boldsymbol{z}$，表面Ⅰ为正极板附近的圆柱底面，Ⅱ为负极板附近的圆柱顶面，Ⅲ为圆柱侧面．

(a)忽略边缘效应，板间场强处处为 $\boldsymbol{E}(t)$ 且平行于中轴线．由正极板指向负极板．

$$\boldsymbol{E}(r,t)=\boldsymbol{z}E(t)\tag{1}$$

电场线垂直于表面Ⅰ指向圆柱内部，垂直于表面Ⅱ指向圆柱外部，平行于表面Ⅲ．

(b)磁场来源于位移电流．因为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}$ 沿轴向，所以磁场没有 z 分量，又因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{z}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)$$

只是 t 的函数，所以 $\boldsymbol{B}$ 是沿着 $\boldsymbol{\varphi}$ 方向的，其数值由 t，r 决定，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\varphi}B_\varphi(r,t)$．由题33.2，沿图示同心圆环 c，有

$$[B_\varphi(r,t)]2\pi r=\mu_0\varepsilon_0\pi r_2\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{B}(r,t)=\boldsymbol{\varphi}\frac{\mu_0\varepsilon_0r}{2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\tag{2}$$

对表面Ⅲ，上式中 $r\approx R$．

33.67　参见题33.66．估计圆柱三个表面的坡印亭矢量．

解　☞ 由上题方程(1)、(2)和 $\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{\varphi}=-\boldsymbol{r}$ 得

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{r}\frac{\varepsilon_0r}{2}E(t)\frac{d\mathscr{E}}{dt}$$

对表面Ⅲ取 $r\approx R$．

33.68[C]　参考题33.66和题33.67．(a)计算穿过圆柱形闭合曲面的功率．(b)证明由(a)得到的数值等于圆柱体内电场能量的变化率．

解　☞ (a)此区域内能量的损失等于流出闭合曲面的 $\boldsymbol{S}$，同样的能量的增加 P 等于闭合曲面上流入的 $\boldsymbol{S}$．

$$P=\oint\!\!\!\oint\boldsymbol{S}\cdot(-\boldsymbol{n})\mathrm{d}a\tag{1}$$

$\boldsymbol{n}$ 为垂直向外．现在闭合曲面由三部分构成，因为 $\boldsymbol{S}$ 平行于表面Ⅰ、Ⅱ，所以只有面Ⅲ起作用．又 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}$，由题 33.67，

$$P = \iint_{\text{Ⅲ}} \left[-\boldsymbol{r} \cdot \frac{\varepsilon_0 R}{2} E(t) \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right] \cdot (-\boldsymbol{r}) \mathrm{d}a = \frac{\varepsilon_0 R}{2} E(t) \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \iint_{\text{Ⅲ}} \mathrm{d}a = \varepsilon_0 \pi R^2 h E(t) \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

其中 h 为板间距离．

(b)上式的 P 可写作

$$P = (\pi R^2 h) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(t) \right]$$

而 $\pi R^2 h$ 为板间体积，板间电场能量密度为 $\rho_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$，因此 P 等于电容器中电场能量的增加率．（这个问题说明，在没有辐射的情况下，沿一个闭合曲面的坡印亭矢量的积分给出在曲面内部电磁能量的积累率．只有在真正辐射的情况下，坡印亭矢量才能表示电磁场能量穿过某边界的实际能流．）

33.69 经典理论中，什么是辐射能量最根本的原因？

解 ☞ 根据麦克斯韦方程组，电磁场由时变电流和加速电荷引起．对非相对论粒子($v \ll c$)，可以证明在任意时刻产生的辐射强度 $P = (q^2 a^2)/6\pi\varepsilon_0 c^3$．其中 q 为电荷电量，a 为其加速度，SI 单位制中 P 单位为 W．这样的辐射一经产生，沿自由空间传播时必遵从自由空间波动方程．如果 a 在时间上是简谐的(SHM)，则电磁波以同频率谐振．一般说来，加速电荷的辐射是各向异性的．

33.70 动能为 $K = 50.0\text{MeV}$ 的质子在均匀磁场中沿半径为 1.00m 的圆形轨道运动，计算它绕行一圈要辐射出的能量．

解 ☞ 质子剩余能量为 938MeV，所以用非相对论处理是对的．在环形轨道上质子的加速度 $a = \frac{v^2}{R}$ 即 $a = \frac{2mv^2}{2mR} = \frac{2K}{mR}$，其中 m 为质子质量，所以每秒钟电磁波的能量为(题 33.69)

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{2e^2 K^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 m^2 R^2}，e \text{ 为质子电荷}$$

每圈放出的能量为 P 乘以每圈的时间 $2\pi R/v = 2\pi R\sqrt{m/2K}$，这部分能量只能来源于质子动能．所以质子动能的损失

$$\Delta K = -\frac{4e^2 K^{3/2}}{3\sqrt{2}\varepsilon_0 c^3 m^{3/2} R}$$

$$= \frac{4 \times (1.60 \times 10^{-19}\text{C})^2 \times [50.0 \times 1.60 \times 10^{-13}\text{J}]^{3/2}}{3\sqrt{2}(8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.00 \times 10^8\text{m/s})^3(1.67 \times 10^{-27}\text{kg})^{3/2}(1.00\text{m})}$$

每圈的能量损失 ΔK 相比于质子动能 $K = 50.0\text{MeV}$ 完全可以忽略不计．

33.71 一个原子发光波长为 500nm，估计其辐射功率．假计只有一个电子产生辐射并将其视为简谐振子，其振幅为典型原子尺寸 0.1nm．

解 ☞ 发光频率 $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^8\text{m/s}}{5.0 \times 10^{-7}\text{m}} = 6.0 \times 10^{14}\text{Hz}$．同样也是电子的振动频率，利用它和 $a_{\max} = \omega^2 A = 4\pi\nu^2 A$，而 $\langle a^2 \rangle = a_{\max}^2/2$．由题 33.69 得

$$P = \frac{4\pi^3(6.0 \times 10^{14}\text{Hz})^4(1.6 \times 10^{-19}\text{C})^2(1.0 \times 10^{-10}\text{m})^2}{3(8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.0 \times 10^8\text{m/s})^3} = 5.7 \times 10^{-12}\text{W}$$

33.72 求在地球重力场中自由落体的电子辐射功率．

解 ☞ 应用题 33.69 中的辐射方程且

$$q = -e = -1.60 \times 10^{-19}\text{C}, a = g = 9.80\text{m/s}^2.$$

$$P = \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2(9.80)^2}{6\pi(8.85 \times 10^{-12})(3 \times 10^8)^3} = 5.46 \times 10^{-52}\text{W}$$

33.73 一个从静止开始在地球重力场中下落了 1.0km 的电子，求其辐射能量与动能增量的比值．

解 ☞ 对从静止下落的粒子有 $s = \frac{1}{2}gt^2$．所以下落时间 $t = \sqrt{2s/g} = \sqrt{(2 \times 10^3)/9.80} = 14.3$ (s)．因此辐射能量为 $E_{\text{rad}} = Pt = (5.46 \times 10^{-52})(14.3) = 7.80 \times 10^{-51}$(J)．由 $m = m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，得动能增量

$$\Delta K = mgs = (9.11\times10^{-31})(9.80)(1.0\times10^{3}) = 8.93\times10^{-27}(\mathrm{J})$$

$$\frac{E_{rad}}{\Delta K} = \frac{7.80\times10^{-51}\mathrm{J}}{8.93\times10^{-27}\mathrm{J}} = 8.74\times10^{-25}$$

33.74 对题33.73中的电子,辐射的能量来源于什么?

解 ☞ 惟一的能量是重力势能,某个与重力反向的力在明显起作用,部分重力势能被这个力消耗.所以实际加速度要稍低于重力加速度.然而,由题33.73得出的比值可以看出忽略这个力只会产生一个小小的误差.这种力叫作辐射反作用或辐射阻力.

第三十四章　光和光学现象

34.1　反射和折射

34.1　定义介质的折射率

解　☞ 麦克斯韦方程预言了真空中电磁波的传播速度为 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$；相比之下，在介质中传播的波速 $v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. 其中 ε 和 μ 为介质的电容率及磁导率. 绝对折射率 n 定义为

$$n\equiv\frac{c}{v}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

通常介质的磁场特性对 v 的影响很小，所以对于一般介质都认为：$\mu\approx\mu_0$.

入射电磁波给介质提供了电场，导致其电极化. 从而确定了 ε，决定了 n 值. 这些值都取决于入射波的振动频率. 图 34-1 给出了各种介质 n 与入射波频率的关系.

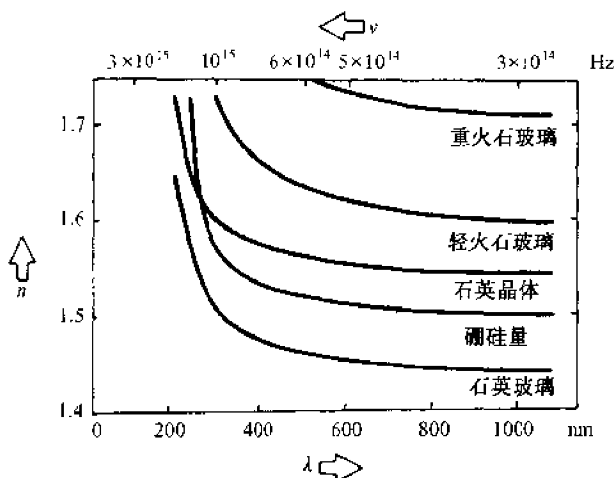


图 34-1

34.2　真空中波长为 $\lambda_0=500\text{nm}$ 的一束光从真空射入钻石中（$n_d=2.4$）. 通常情况下，光在不同介质中传播时不改变频率，计算光波在钻石中的速度和波长.

解　☞ 因为 $n=c/v$，$v=c/n=3\times10^8/2.4=1.25\times10^8(\text{m/s})$，对于波长，$n=c/v=(\lambda_0\nu_0)/(\lambda\nu)=\lambda_0/\lambda$，由于 $\nu_0=\nu$，因此，$\lambda=500/2.4=208(\text{nm})$.

34.3　(a)求石英中的光速，(b)光在锌中的速度为 $1.52\times10^8\text{m/s}$，求锌的折射率. 石英的折射率 $n=1.553$.

解　☞ (a) $v=\frac{c}{n}=\frac{3.0\times10^8\text{m/s}}{1.553}=1.93\times10^8\text{m/s}$

(b) $n=\frac{c}{v}=\frac{3.0\times10^8\text{m/s}}{1.52\times10^8\text{m/s}}=1.97$

34.4　(a)光进入折射率为 n 的介质时频率不变，但波长和波速改变. 证明：在介质中波长 $\lambda'=\lambda/n$，其中 λ 为真空中的波长，(b)蓝光在空气中的波长为 420nm，求它在水中的波长（水：$n=1.33$）.

解　☞ (a) $\lambda'=\frac{v}{f}=\frac{c}{nf}=\frac{\lambda}{n}$，(b) $\lambda'=\frac{\lambda}{n}=\frac{420\text{nm}}{1.33}=316\text{nm}$

34.5　某种色光在空气中每微米内有 1800 个波，求它的频率. 它在水和玻璃板中传播时，每微米内有多少个波？并求它在上述两种介质中的波长.（水和玻璃的折射率分别为 $n=1.333$ 和 1.52.）

解 ☞ $\lambda=\frac{1\text{mm}}{1800}=5.556\times10^{-7}\text{m}=556\text{nm}$

$$\nu=\frac{3\times10^{8}}{5.556\times10^{-7}}=5.4\times10^{14}(\text{Hz})$$

在水中时，每微米内波数 $=1800\times1.333=2399(\text{mm})^{-1}$

在玻璃中，每微米内波数 $=1800\times1.52=2736(\text{mm})^{-1}$

在水中，$\lambda=\frac{555.6\text{nm}}{1.333}=417\text{nm}$；在玻璃中 $\lambda=\frac{555.6\text{nm}}{1.52}=365\text{nm}$

34.6 一束光从 A 点传播到 B 点，现在 A、B 点间插入一块玻璃板($n=1.5$)，板厚 $l=1\text{mm}$. 若 $\lambda_0=500\text{nm}$，插入玻璃板后，B 点处的波的相位改变了多少？

解 ☞ 设空气的折射率(0℃，1atm 时，$n=1.000293$)等于 1，在空气中，$\overline{AB}$ 段间的波数为：$\overline{AB}/\lambda_0$，相位差为 $2\pi(\overline{AB}/\lambda_0)$. 插入玻璃后，空气中波数为：$(\overline{AB}-l)/\lambda_0$，玻璃中波数为 l/λ，于是相位差为

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi(\overline{AB}-l)}{\lambda_0}+\frac{2\pi l}{\lambda}-\frac{2\pi\overline{AB}}{\lambda_0}=2\pi l\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right)$$

又有 $1/\lambda=n/\lambda_0$，所以 $\Delta\varphi=\frac{2\pi l}{\lambda_0}(n-1)$. 在此题中

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi10^{-3}}{500\times10^{-9}}(1.5-1)=2\pi10^{3}(\text{rad})$$

若数据精确，则波被精确地移动了 1000 个波长，其结果与不移动一致.

34.7 一平面简谐红外光波穿过透明介质，满足方程

$$E_x(y,t)=E_{0x}\sin2\pi\left(\frac{y}{5\times10^{-7}}-3\times10^{14}t\right)$$

都取 SI 制. 求出此频率下介质的折射率和此波在真空中的波长.

解 ☞ 我们熟悉的相位形式为 $k(y-vt)$，因此，将上述公式写为 $E_{0x}\sin\phi$ 的形式，

$$\phi=\frac{2\pi}{5\times10^{-7}}(y-15\times10^{7}t)$$

因此：$\lambda=5\times10^{-7}\text{m}$，$v=1.5\times10^{8}\text{m/s}$. $n=c/v=2$，$\lambda_0=n\lambda=1000\text{nm}$.

34.8 钠灯射出的光($\lambda_0=589\text{nm}$)在时间 t_1 内穿过厚为 20m 的一桶甘油(折射率为 1.47)，在时间 t_2 内穿过同样一桶二硫化碳(折射率为 1.63)，求 t_2-t_1 的差值.

解 ☞ 因为 $v=c/n$，$t_1=\frac{20}{c/n}=\frac{20(1.47)}{c}$，　$t_2=\frac{20(1.63)}{c}$

所以

$$t_2-t_1=\frac{20}{c}(1.63-1.47)=1.07\times10^{-8}\text{s}$$

34.9 一束 436nm 的光垂直入射到厚度为 2.0cm，折射率为 $n=1.66$ 的玻璃板内. (a)光束上一点穿过玻璃板需要多少时间？(b)玻璃板的厚度等于几个波长？

解 ☞ (a)玻璃板内的光速 $v=c/1.66=1.807\times10^{8}\text{m/s}$，所以，$t=d/v=0.020/v=0.111\text{ns}$. (b)波长 $\lambda'=(436\text{nm})/1.66$；总的波数为 $d/\lambda'=76147$.

34.10 光线以多大的入射角射向丙酮液面时，折射角为 25°？($n=1.358$)

解 ☞ 由斯涅耳定律得 $n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$，$\theta_1$，$\theta_2$ 表示光线与法线的夹角，所以

$$\sin\theta_1=\frac{n_2\sin\theta_2}{n_1}=\frac{(1.358)(\sin25^\circ)}{1.00}=0.574，\theta_1=35^\circ$$

34.11 求光在水中的速度. 当光以 48°的入射角射入水面时，折射角 θ 为多大？($n=1.333$.)

解 ☞ $v=\frac{c}{n}=\frac{3\times10^{8}\text{m/s}}{1.333}=2.25\times10^{8}\text{m/s}$. 根据斯涅耳定律

$$1\sin48^\circ=1.333\sin\theta，\quad \sin\theta=0.5575，\quad \theta=33.9^\circ$$

34.12 已知正丙醇的折射率为 1.39，求在此酒精中的光速，光的入射角为 55°时，折射角 θ 为多大？

解 ☞ $v=\frac{c}{n}=\frac{3\times10^8}{1.39}=2.16\times10^8(\mathrm{m/s})$

$\frac{\sin55^\circ}{\sin\theta}=1.39,\quad \sin\theta=0.58932,\quad \theta=36.1^\circ$

34.13 当光以 52°的入射角从空气射入某种液体时,光线偏折了 19°,求此液体的折射率.

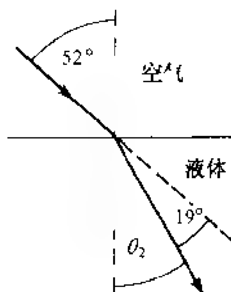


图 34-2

解 ☞ 入射,折射情况如图 34-2 所示

$$\theta_2=52^\circ-19^\circ=33^\circ,$$

$$n=\frac{\sin52^\circ}{\sin33^\circ}=\frac{0.7880}{0.5446}=1.45$$

34.14 当光线以多大的入射角射入平静的湖面时,反射光线与折射光线之间的夹角为 90°? (水的折射率 $n=1.33$.)

解 ☞ 设入射角和折射角为 θ 和 ϕ,则有 $\theta+\phi=90^\circ$,或写为 $\phi=90^\circ-\theta$. 根据斯涅耳定律, $\sin\theta=n\sin(90^\circ-\theta)=n\cos\theta$,所以 $\tan\theta=n$, $\theta=\arctan\theta=\arctan1.33=53^\circ$.

34.15 求空气-水界面的临界角的正弦值.

解 ☞ 当光从水面射向空气时,折射角大于入射角,所以当入射角大于 i_c (<90°)时,折射角将大于 90°,意味着无折射现象. i_c 为临界角,对应的折射角为 90°,故

$$1\sin90^\circ=1.333\sin i_c,\quad \sin i_c=0.750$$

34.16 一束光从冕牌玻璃射向水面,临界角多大? 若在玻璃中的入射角为 55°,折射角多大? (水和冕牌玻璃的折射率分别为 $n=1.333$ 和 $n=1.52$.)

解 ☞ 当光从玻璃射向水时存在临界角,根据临界角的定义得

$$1.52\sin\theta_c=1.333\sin90^\circ,\quad \sin\theta_c=0.877,\quad \theta_c=61.3^\circ$$

在第二问中,入射角 $<\theta_c$,所以水中的折射角 θ 满足

$$1.52\sin55^\circ=1.333\sin\theta,\quad \theta=69.1^\circ$$

34.17 假设某玻璃球的折射率 $n_1=1.76$,光线从玻璃球内射出,当此玻璃球浸在(a)空气($n_2=1$)中,(b)水($n_2=1.33$)中时,临界角分别为多大?

解 ☞ 由 $\sin\theta_c=n_2/n_1$ 可求出临界角大小,所以

(a) $\theta_c=\arcsin\frac{1}{1.76}=34.6^\circ$, (b) $\theta_c=\arcsin\frac{1.33}{1.76}=49.1^\circ$

34.18 从某种程度上说,钻石闪烁就是因为产生了全反射现象,计算钻石-空气界面处临界角的大小.

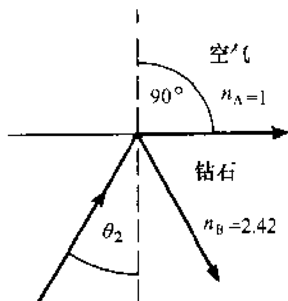


图 34-3

解 ☞ 根据图 34-3,

$$\theta_c=\theta_2=\arcsin\frac{n_A}{n_B}=\arcsin\frac{1}{2.42}$$

$$=\arcsin0.4132=24^\circ$$

34.19 若冰中的光速为 $2.3\times10^8\,\mathrm{m/s}$,求冰的折射率. 当光从冰射向空气时,临界角为多大?

解 ☞ 根据题意可计算出冰的折射率 $n=c/v=(3\times10^8)/(2.3\times10^8)=1.304$. 所以,临界角为

$$1\sin90^\circ=1.304\sin i_c,\quad \sin i_c=0.7667,\quad i_c=50.1^\circ$$

34.20 某火石玻璃的折射率为 1.64,求出光在这种玻璃中的速度. 若光从水中以 44°的入射角射向玻璃,折射角为多大? 再求出玻璃-水界面上的临界角.

解 ☞ $v_{gl}=\frac{c}{n}=\frac{3\times10^8}{1.64}=1.83\times10^8(\mathrm{m/s})$. 所以 $\frac{\sin44^\circ}{\sin\theta_{gl}}=\frac{v_w}{v_{gl}}$, 或 $1.333\sin44^\circ=1.64\sin\theta$,得

$\sin\theta_{gl}=0.56462$，　$\theta_{gl}=34.4°$. 故临界角有

$$1.333\sin 90° = 1.64\sin i_c,\quad \sin i_c = 0.8128,\quad i_c = 54.4°$$

34.21　在图 34-4 中，鱼看到的落日在什么方向？水的折射率 $n_2=\frac{4}{3}$，空气的折射率 $n_1\approx 1$.

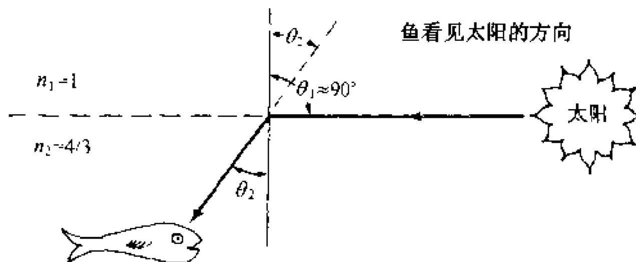


图 34-4

解　☞ 落日的光线几乎平行于水面. 根据斯涅耳定律，$\theta_1=90°$，

$$1=\frac{4}{3}\sin\theta_2,\quad \theta_2=\arcsin\frac{3}{4}=48.6°$$

注意：对逆光线（从鱼射向落日）而言，θ_2 应为临界角. 鱼看到的落日与水平面间夹角为 $90°-\theta_2=41.4°$

34.22　当水中的鱼仰视平静的湖面时，除了它正上方一片圆形区域外其它区域都是暗的. 计算看到明亮区域的视角.

解　☞ 从图 34-5 可以看出，θ_2 取最大值时对应空气中的可观察光线 $\theta_1=90°$. 因此，θ_2 即为临界角，大小为

$$\sin\theta_2=\frac{n_1\sin 90°}{n_2}=\frac{(1.00)(1.0)}{1.333}=0.75,\quad \theta_2=48.6°$$

由图可知：$\phi=2\theta_2$，所以 $\phi=(2)(48.6°)=97.2°$

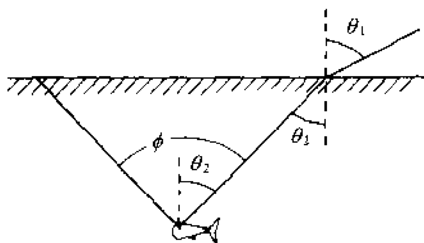


图 34-5

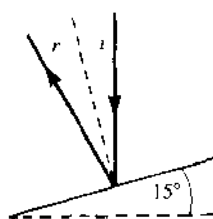


图 34-6

34.23　高 0.4m 的圆柱形铁罐顶部可以打开，罐内盛满水（$n=1.33$），罐底中心有个小黑点. 若在水面上中心处漂浮一圆盘将小黑点完全挡住，求此圆盘的最小半径.

解　☞ 此题与题 34.22 相反，水从黑点（附近）射向水面，当水中的入射角小于临界角时，光线在空气中产生折射. 在题 34.22 中已经计算出临界角为 48.6°. 因此，若水高 0.4m，则圆盘半径 $r=0.4\tan 48.6°=0.45$m.

34.24　一平面镜与水平面成 15°放置，镜面朝上. 一束光竖直射向镜面，求入射角的度数及反射光线与水平面间的夹角度数.

解　☞ 如图 34-6 所示，入射角应为入射光线与镜面法线间的夹角，所以 $i=15°$. 因为 $i=r$，所以反射光线也为 15°. 因此，反射光线与竖直方向夹角为 30°，则与水平方向夹角为 60°.

34.25　证明：若镜面绕垂直于入射光线和法线所在平面的轴转过 θ 角，则反射光线转过 2θ

角.

证 ☞ 在图34-7中,从固定方向射入的入射光线在转动前的反射情况用1表示,转动后的反射情况用2表示.镜面在转动前后的法线分别为 m_1 和 m_2.反射光线1与入射光线的夹角为 $2i$,反射光线2与入射光线的夹角为 $2(i+\theta)=2i+2\theta$.所以,两反射光线间的夹角为 2θ.

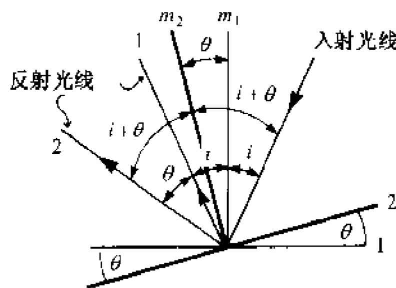


图 34-7

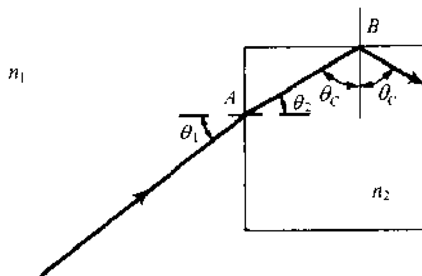


图 34-8

34.26 一束光以52°的入射角从空气射入某种液体内部后,光线偏折了19°.在什么情况下,在此界面处能发生全反射现象?

解 ☞ 当光从液体射向空气时,若入射角大于临界角,则在界面上发生全反射现象.要求临界角,必须先求出液体的折射率 n_1.对于液体 $\theta_1=52°-19°=33°$, $1\sin52°=n_1\sin33°$.所以 $0.7880=0.54464n_1$, $n_1=1.447$.因此,临界角为

$$1\sin90°=1.447\sin\theta_c,\quad \sin\theta_c=0.69116,\quad \theta_c=43.7°$$

34.27 一束光从折射率为 n_2 的玻璃立方体左侧面射入,如图34-8所示,入射平面为纸所在的平面,玻璃立方体浸在折射率为 n_1 的液体中.最大入射角 θ_1 为何值时,玻璃立方体上表面处发生全反射?

解 ☞ 在 A 点处利用斯涅耳定律,

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \tag{1}$$

又 $\theta_2=90°-\theta_c$,所以

$$\cos\theta_2=\sin\theta_c=\frac{n_1}{n_2} \tag{2}$$

联立(1)、(2),消去 θ_2,得

$$\sin\theta_1=\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2-1} \tag{3}$$

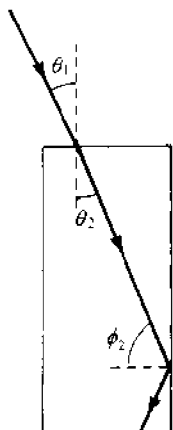


图 34-9

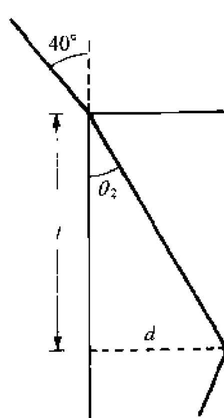


图 34-10

34.28 图34-9中,一束光线以 θ_1 为入射角从光纤的一端射入,折射角为 θ_2,又以角 ϕ_2 射到光纤的侧面.若光纤的折射率为1.30,求使光线全反射通过光纤的最大入射角 θ_1.

解 ☞ 根据题 34.27 中公式(3),代入 $n_1=1$,得

$$\sin\theta_1=\sqrt{1.30^2-1}=0.831,\quad \theta_1=56.2^\circ$$

34.29 图 34-10 中光纤长 2m,直径为 20μm,若一束光以入射角 $\theta_1=40^\circ$ 从光纤的一端射入,光从光纤另一端射出之前经过了几次反射?

解 ☞ 在图 34-10 中,根据题 34.28,此处满足发生全反射的条件,所以

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1=\frac{\sin 40^\circ}{1.3}=0.495,\quad \theta_2=29.7^\circ$$

第一次反射时,经过光纤的距离为

$$l=\frac{d}{\tan\theta_2}=\frac{2\times10^{-5}\mathrm{m}}{0.570}=3.51\times10^{-5}\mathrm{m}$$

根据反射定理,l 也为相继反射间经过光纤的距离,则反射次数为

$$\frac{L}{l}=\frac{2\mathrm{m}}{3.51\times10^{-5}\mathrm{m}}=57000$$

34.30 在实际应用中,为了保护光纤表面,通常要在光纤表面上涂一层玻璃($n_3=1.512$),若光纤自身的折射率 $n_2=1.700$,求光纤内部发生全反射时的临界角.

解 ☞ 临界角由光纤和玻璃界面决定,所以

$$\sin\theta_c=\frac{n_3}{n_1}=\frac{1.512}{1.700}=0.889,\ \theta_c=62.7^\circ$$

34.31 将题 34.28 和题 34.29 中的光纤都换成题 34.30 中涂有玻璃层的光纤,结果如何?

解 ☞ 先如题 34.28,求出最大入射角 θ_1. 根据题 34.30, $\phi_2>\theta_c=62.7^\circ$, 则 $\theta_2<90^\circ-62.7^\circ=27.3^\circ$. 所以, $\sin\theta_1<n_2\sin 27.3^\circ=(1.700)(0.459)=0.780$, $\theta_1<51.3^\circ$. 再求反射次数,设光纤的长度和直径与题 34.29 中一致.

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1=\frac{\sin 40^\circ}{1.700}=0.378,\ \theta_2=22.1^\circ$$

每次反射经过光纤的距离为

$$l=\frac{d}{\tan\theta_2}=\frac{2\times10^{-5}\mathrm{m}}{\tan 22.1^\circ}=4.93\times10^{-5}\mathrm{m}$$

反射次数 $=\dfrac{L}{l}=\dfrac{2\mathrm{m}}{4.93\times10^{-5}\mathrm{m}}=40600$

34.32 反射定律和折射定律对于声波同样适用.某种介质对声波的折射率定义为空气中的声速(343m/s)与此介质中声速的比值.(a)求水对声波的折射率(水中 $v_w=1498\mathrm{m/s}$).(b)求声波在水面处的临界角 θ_c.

解 ☞ 因为水中的声速大于空气中的声速,所以水的折射率大于 1.

$$(\mathrm{a})\ n_w=\frac{v_a}{v_w}=\frac{343\mathrm{m/s}}{1498\mathrm{m/s}}=0.229,\ (\mathrm{b})\ \sin\theta_c=\frac{n_w}{n_a}=0.229,\ \theta_c=13.2^\circ$$

34.33 一束钠光从空气射过水后又射入火石玻璃中,三层表面相互平行.若空气中的入射角为 45°,求玻璃中的折射角(水和火石玻璃的折射率分别为 $n=1.333, 1.63$.)

解 ☞ 在图 34-11 中,对空气-水界面利用斯涅耳定律

$$n_w=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2},\ 1.333=\frac{\sin 45^\circ}{\sin\theta_2}=\frac{0.7071}{\sin\theta_2},\ \sin\theta_2=\frac{0.7071}{1.333}=0.5305,\ \theta_2=32^\circ$$

再对水-玻璃界面利用斯涅耳定律

$$n_{BA}=\frac{n_g}{n_w}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3},\ \frac{1.63}{1.333}=\frac{0.5305}{\sin\theta_3}$$

$$\sin\theta_3=\frac{0.5305(1.333)}{1.63}=0.4338,\ \theta_3=26^\circ$$

34.34 一苯层(折射率 = 1.50)浮在水面上,若一束光线以 60°的入射角从空气中射入苯中,光线在苯层和水层中与竖直方向的夹角多大?

解 ☞ 如图 34-12 所示，光线射过苯层后又射入水层．分别在空气-苯界面和苯-水界面处应用斯涅耳定律．

$$n_b=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2},\ 1.50=\frac{\sin60°}{\sin\theta_2},\ \sin\theta_2=\frac{0.8660}{1.50}=0.5773,\ \theta_2=35°$$

$$\frac{n_w}{n_b}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3},\ \frac{1.333}{1.50}=\frac{0.5773}{\sin\theta_3},\ \sin\theta_3=\frac{0.5773(1.50)}{1.333}=0.6496,\ \theta_3=41°$$

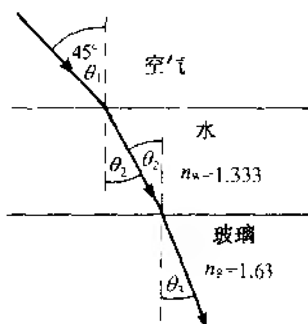


图 34-11

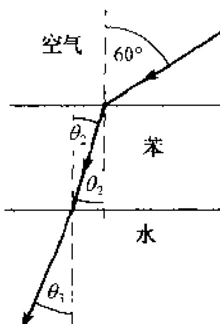


图 34-12

34.35 一底为平行平面的玻璃杯折射率为 1.51，下半杯装水，上半杯装有二硫化碳液体，最后，在杯顶盖一块用相同的玻璃材料制成的平面玻璃板．一束光以 50°的入射角从杯盖射入，光束穿过玻璃、二硫化碳、水、玻璃、空气的过程中与竖直方向的夹角各为何值？

解 ☞ 在相继界面处应用斯涅耳定律

$$1\sin50°=1.51\sin\theta_g,\ 1.51\sin\theta_g=1.63\sin\theta_{CS_2},\ 1.63\sin\theta_{CS_2}=1.333\sin\theta_w$$

所以 $\sin\theta_g=0.5073,\quad \sin\theta_{CS_2}=0.4700,\quad \sin\theta_w=0.5747$

得 $\theta_g=30.5°,\quad \theta_{CS_2}=28.0°,\quad \theta_w=35.1°$

同样 $1.333\sin\theta_w=1.51\sin\theta'_g,\quad 1.51\sin\theta'_g=\sin\theta'_A$

所以 $\sin\theta'_g=0.5073,\quad \sin\theta'_A=0.766$

得 $\theta'_g=30.5=\theta_g$；$\theta'_A=50°=\theta_A$，等于初始入射角（见题 34.36）．

34.36 若有一由多层不同厚度的透明材料组成的层化系统，证明：出射光的传播方向只与入射方向和第一层、最后一层的折射率（n_1, n_f）有关．

证 ☞ 根据题 34-13，由斯涅耳定律得

$$n_1\sin\theta_{i1}=n_2\sin\theta_{t2},$$
$$n_2\sin\theta_{i2}=n_3\sin\theta_{t3},\cdots,$$
$$n_l\sin\theta_{il}=n_f\sin\theta_{tf}$$

因为 $\theta_{t2}=\theta_{i2}$，$\theta_{t3}=\theta_{i3}$，以此类推，得到等式

$$n_1\sin\theta_{i1}=n_2\sin\theta_{i2}=\cdots=n_l\sin\theta_{il}=n_f\sin\theta_{tf}$$

$$n_1\sin\theta_{i1}=n_f\sin\theta_{tf}$$

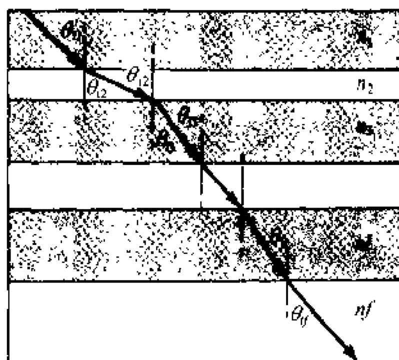


图 34-13

注意到，只要 $n_1=n_f$，如将此系统放在空气中，则有 $\theta_{i1}=\theta_{tf}$，即入射光线和出射光线平行．

34.37 某容器底为一块折射率为 1.50 的厚玻璃块，容器内盛有水．若光线能穿过玻璃底，求光线射向水面的最大入射角．将此入射角与水-空气界面处的临界角 48.6°比较，得到什么结论？再求出玻璃底中的折射角．

解 ☞ 根据光路互逆，考虑从容器底下部空气向上入射的光线．最大入射角为 $\theta_a=90°$时，玻璃底中光线折射角为

$$1\sin90°=1.50\sin\theta_g,\ \sin\theta_g=0.66667,\ \theta_g=41.8°$$

再求出水中光线角度为

$$1.50\sin\theta_g = 1.333\sin\theta_w, \sin\theta_w = 0.7500, \theta_w = 48.6°$$

比较发现，此结果与空气-水界面时一致. 因为在第一层和第三层中光线角度间的关系与第二层无关，(根据题 34.36). 但若光在一、二层界面处发生全反射，光线不能穿过第二层时例外.

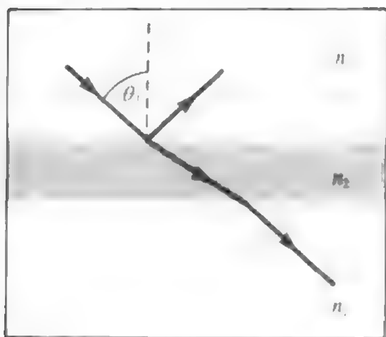


图 34-14

34.38 图 34-14 中，两层玻璃板($n_1 = 1.50$)中间夹有一层液体薄膜(n_2). 证明，若液体为水($n_2 = 1.33$)，当一束光以 $\theta_1 = 64°$的入射角从上层琉璃处射入时，将发生全反射；但若液体为酒精($n_2 = 1.36$)，则将有一部分光线透射到下层玻璃内.

证 ☞ 将 θ_1 与上层界面处的临界角 θ_c 比较，判断是否发生全反射现象. $\sin\theta_c = n_2/n_1$. 对于玻璃-水界面：$\frac{1.33}{1.50} = 0.887$，$\theta_c = 62.5°$. 对于玻璃-酒精界面：$\frac{1.36}{1.50} = 0.907$，$\theta_c = 65°$. 所以，光以 64°的入射角射入时，在玻璃-水界面处将发生全反射；而在玻璃-酒精界面处不发生全反射.

34.39 一束光线从空气透过油层射向水中. (a)如果在空气中的入射角为 40°，求水中的折射角. 已知油层的折射率为 1.45. (b)如果存在，光线无法进入水层时对应空气中的入射角为何值? (c)考虑逆光线，如果存在，光线无法进入空气层时对应水中的入射角为何值?

解 ☞ (a)在空气-油层界面，$\sin 40° = 1.45\sin\theta_o$；在油-水界面，$1.45\sin\theta_o = 1.33\sin\theta_w$，所以 $\theta_W = \arcsin[(\sin 40°)/1.33] = 28.9°$. (b)因为 $\theta_o > \theta_w$，θ_o 比 θ_w 更早到达 90°，所以这种情况不存在. (c)在这种情况下，$\sin 90° = 1.45\sin\theta_o = 1.33\sin\theta_w$，所以$(\theta_w)_c = \arcsin(1/1.33) = 48.6°$，与空气-水界面结果一致.

34.40 一窄光束以 53°的入射角射到一块玻璃板($n = 1.60$)上，板厚 20mm，光束从玻璃板中射出时侧位移为何值?

解 ☞ 入射情况如图 34-15 所示，CE 为侧位移：

$$\overline{AB} = 20\text{mm}, \quad \sin r = \frac{\sin 53°}{1.60}, r = 30°$$

$$\overline{BD} = 20\tan 53° = 26.5, \overline{BC} = 20\tan 30° = 11.5$$

$$\overline{CD} = 26.5 - 11.5 = 15.0, \quad \overline{CE} = \overline{CD}\cos 53° = 9.0\text{mm}$$

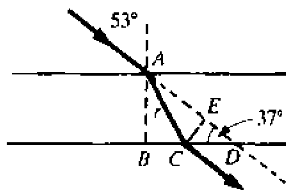


图 34-15

34.41 两个完全相同的杯子，一杯盛满水($n = 1.361$)，另一杯盛满矿物油($n = 1.47$). 当观察者从杯口竖直向下看时，哪只杯子的视深深些? 两只杯子的视深之比又为多少?

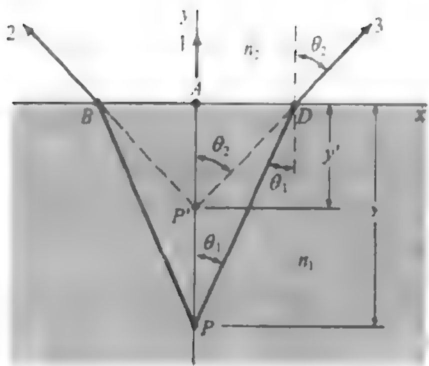


图 34-16

解 ☞ 在图 34-16 中，P 表示杯底．当观察者沿 y 轴方向向下观察时，P 点的像在 P' 处．此像点位置由垂直光线 1 和近垂直光线 3(或 2)决定．当 θ_1 和 θ_2 很小时，利用斯涅尔定律得

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2 \text{ 或 } \frac{\theta_1}{\theta_2} \approx \frac{n_2}{n_1}$$

又因为 $\overline{AD} = y\tan\theta_1 = y'\tan\theta_2$ 或 $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \approx \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{y'}{y}$．所以，当 y 和 n_2 给定时，y' 与 n_1 成反比，故装满水的杯子看起来深一些，比例系数为 $1.47/1.361 = 1.08$．

34.42 一人朝下观察 5ft 深的游泳池底，他看到的池底深多少？

解 ☞ 由题 34.41，n = 实际深度/视深，故 $1.333 = (5\text{ft})/y$，$y = 3.75\text{ft}$(视深)．

34.43 光线射入一块折射角为 60°的玻璃棱镜，若入射角为 30°(入射光线与棱镜底面平行)，玻璃折射率为 1.50．求光线出射时与法线所成的角度．

解 ☞ 在图 34-17 中，从左至右分析折射情况．

$$n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}, 1.50 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta_2}, \sin\theta_2 = \frac{0.5}{1.50} = 0.3333, \theta_2 = 19.5^\circ$$

从图中可以看出，$\theta_2 + \theta_3 + 120^\circ = 180^\circ$，即 $\theta_2 + \theta_3 = 60^\circ$，所以 $19.5^\circ + \theta_3 = 60^\circ$，$\theta_3 = 40.5^\circ$．又有

$$n = \frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_3}, 1.50 = \frac{\sin\theta_4}{\sin 40.5^\circ}, 0.6494(1.50) = \sin\theta_4, \theta_4 = 77^\circ$$

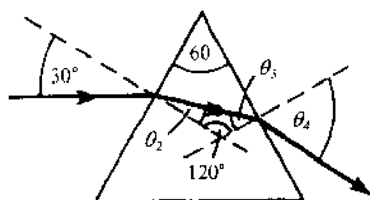


图 34-17

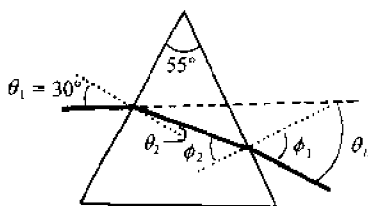


图 34-18

34.44 一束光线以 30°的入射角射入顶角 $A = 55^\circ$，折射率为 1.50 的棱镜中．计算(a)光线与棱镜两边所成角度，(b)偏向角大小．

解 ☞ 根据斯涅耳定律和 $\theta_2 + \phi_2 + (180^\circ - A) = 180^\circ$，即 $\theta_2 + \phi_2 = A$，在图 34-18 中标出各角大小．

(a) $\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{\sin 30^\circ}{1.50} = 0.333$，$\theta_2 = 19.5^\circ$，$\phi_2 = A - \theta_2 = 55^\circ - 19.5^\circ = 35.5^\circ$

(b) $\sin\phi_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\phi_2 = (1.5)(0.581) = 0.871$，$\phi_1 = 60.6^\circ$

因为两法线(虚线)间所成角度为 $180^\circ - A$，θ_D 为入射光线(虚线)与出射光线间的夹角，得到 $\theta_D = \theta_1 + \phi_1 - A = 30^\circ + 60.6^\circ - 55^\circ = 35.5^\circ$

34.45 光线以入射角 θ_1 射入一顶角为 α，折射率为 $n > 1$ 的等边棱镜(图 34-19)．(a)写出偏向角取最小值 $\delta_{\min}$ 时的表达式，(b)证明当 α 足够小时，$\delta \approx (n-1)\alpha$，与 θ_1 无关．

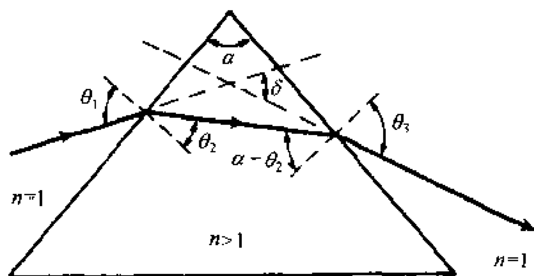


图 34-19

证　☞ (a)根据棱镜的对称性及光路可逆，容易看出：当 $\theta_1=\theta_3=k$ 时，偏向角 δ 取到最小值．在此条件下，在棱镜两边处利用斯涅耳定律得 $\sin k=n\sin\theta_2$，　$n\sin(\alpha-\theta_2)=\sin k$．得出 $\theta_2=\alpha/2$．于是 $\sin k=n\sin\frac{\alpha}{2}$．而 $\delta_{min}=\theta_1+\theta_3-\alpha=2k-\alpha$，即 $k=\frac{\alpha+\delta_{min}}{2}$，因此 $\sin\frac{\alpha+\delta_{min}}{2}=n\sin\frac{\alpha}{2}$．此方程为 δ_{min} 的表达式．(b)当 α 很小时，(a)中 δ_{min} 的结果变为 $\frac{\alpha+\delta_{min}}{2}\approx n\frac{\alpha}{2}$，即 $\delta_{min}\approx(n-1)\alpha$．当 α 足够小时，偏向角 δ 趋近于 δ_{min}，所以 $\delta\approx(n-1)\alpha$．

34.46　用一个折射率为 1.60 的棱镜测入射光的最小偏向角．若棱镜的顶角为 45°，求最小偏向角 D(图 34-20)．

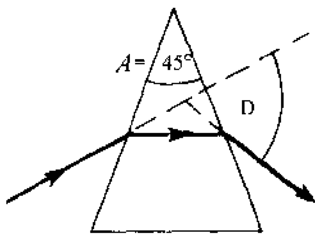


图 34-20

解　☞ 根据题 34.45(a)的结果，得到

$$n=\frac{\sin[(A+D)/2]}{\sin(A/2)},\ 1.60=\frac{\sin[(45°+D)/2]}{\sin(45°/2)}$$

$$1.60(\sin22.5°)=\sin\frac{45°+D}{2}\quad 即$$

$$0.6122=\sin\frac{45°+D}{2}$$

取反正弦得，$37.8°=(45°+D)/2$，$D=30.6°$．

34.47　一束光线穿过一块顶角为 50°的棱镜．转动棱镜使光线以不同的偏向角射出，发现最小偏向角为 30°．求制成此棱镜所用玻璃的折射率大小．

解　☞ 令 $D=30°$，$A=50°$，利用题 34.45(a)的结果，得到

$$n=\frac{\sin[(A+D)/2]}{\sin A/2}=\frac{\sin40°}{\sin25°}=1.52$$

34.48　如图 34-21 所示，一束光线以 45°的入射角射到一平面镜上．经过平面镜反射后，光线又射入一块折射率为 1.50，顶角为 4°的棱镜内．求要使光线总的偏向角为 90°，则应将平面镜转过一多大的角度？

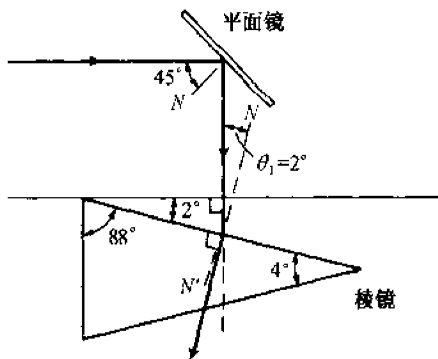


图 34-21

解　☞ 根据题 34.45(b)，不论平面镜方向如何，光线经过棱镜后的偏向角恒为 $\delta=(1.50-1)(4°)=2°$．对于题中给定的方向，平面镜产生的偏向角为 90°，因此必须转动平面镜以抵消多余的 2°．所以，应将平面镜逆时针转过 $\frac{1}{2}(2°)=1°$，如图34-21．

34.49　一束光线以 40°的入射角射入一块折射率为 1.52，顶角 $A=56°$的棱镜．光线经过棱镜后产生的偏向角多大？此偏向角是否为最小值？

解　☞ 采用以 34.43 和 34.44 同样的解法，求在第二界面处的入射角 θ'_g

$1\sin40°=1.52\sin\theta_g$，　$\sin\theta_g=0.42289$，　$\theta_g=25.017°$，　$\theta'_g=56-25.017=30.983°$．很显然不是最小偏向角，因为根据对称，应有 $\theta'_g=\theta_g$．又有

$1.52\sin30.983°=1\sin\theta'_a$，$\sin\theta'_a=0.78247$，$\theta'_a=51.487°$　偏向角 $=40°+51.487°-56°=35.5°$

34.50　求一块顶角为 60°的有机玻璃棱镜的最小偏向角．此时光线的入射角应取何值？若入射角小于 5°，求偏向角的大小(有机玻璃 $n=1.63$．)

解　☞ 利用题 34.47 中所标各角，得到

$$1.63=\frac{\sin[(A+D)/2]}{\sin A/2}=\frac{\sin[(A+D)/2]}{\sin30°}$$

即　　$\sin\frac{A+D}{2}=0.815$，$\frac{A+D}{2}=54.587°$，$D=109.2°-60°=49.2°$

当入射角，折射角，A 和 D 都很小时，利用题 34.44 的有关公式及最小偏向角时的对称条件，得到

$2\theta_a = A + D$, $\theta_a = 54.587°$. 新 $\theta_a = 49.587°$, $1\sin 49.587 = 1.63\sin\theta_g$, $\theta_g = 27.847$. $\theta'_g = 60° - 27.847° = 32.153°$, $1.63\sin 32.153° = 1\sin\theta'_a$, $\theta'_a = 60.164°$. 偏向角 $= 60.164° + 49.587° - 60° = 49.75°$.

34.51 将一块顶角为 4°,折射率为 1.50 的棱镜放在一竖直平面镜前面,如图 34-22 所示.一束水平光线入射到棱镜上.(a)求平面镜的入射角,(b)求光线总的偏向角.

解 ☞ 第一次折射发生在棱镜的第二侧面处,其入射角 $\theta_g = 4°$.所以在空气中的折射角为

$$n\sin\theta_g = \sin\theta_a,\ 1.5\sin 4° = \sin\theta_a,\ \theta_a = 6.0°$$

在图中看出,出射光线在棱镜右侧面法线下 6°处,此法线在水平面上方 4°处,所以折射光线与水平面成 2°,即为平面镜的入射角.折射光线在水平面下 2°处,方向向左.所以总的偏向角为 178°.

注意:平面镜的入射角也可直接根据小顶角棱镜的偏向角公式求出,由题 34.45(b)得 $\delta \approx (n-1)\alpha = (1.5-1)(4°) = 2°$,结果一致.

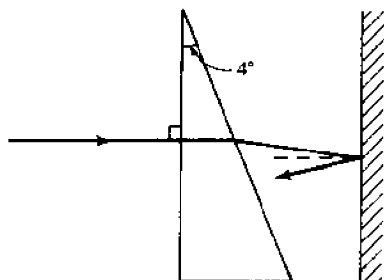


图 34-22

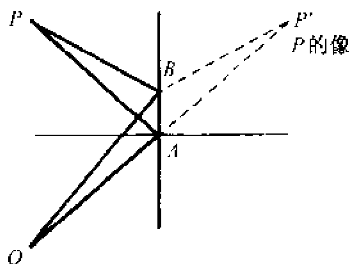


图 34-23

34.52 证明,在图 34-23 中,从 O 点发出的光线经平面镜反射到 P 点,光线所走过的路程最短.此为费马原理的一种特例,此原理表述为:光线由一点至另一点,沿所需时间为最短的路径传播.(见题 34.53.)

证 ☞ 设 OBP 为从 O 经镜面至 P 的另一段路程. $PAO = P'AO$, $PBO = P'BO$. $P'BO > P'AO$.从 P' 到 O,直线距离最短,又因为光速 c 为常数,所以 OPA 所需时间最短.

34.53[c] 定义光程和费马原理.

解 ☞ 设一束光线从 S 传播至 P 点的过程中在不同介质中走过的路程为 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_m$,介质的折射率分别为 $n_1, n_2, n_3, \cdots n_m$.则总的传播时间为

$$t = \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{v_i} = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{m} n_i s_i$$

上式中最后的求和表示的就称为光程,O.P.L.费马原理表述如下:光线由一点至另一点,沿所需时间为最短的路径传播.(此表述不是普遍成立,需作一些修正.)引入光程,将以上原理重新表述为:光线沿光程最小的路径传播.

下面我们引入极值,给出普遍成立的费马原理的表述.若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处,导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$,则称此函数在 $x = x_0$ 处存在极值.极值可对应最大值、最小值或有水平切线的拐点.一般地,在极值 $f(x_0)$ 附近, $f(x)$ 变化缓慢.所以, $x \approx x_0$,有 $f(x) \approx f(x_0)$.利用极值概念,可将费马原理表述如下:光线从一点行进至另一点,不论包含何种介质,光路的光程为极值.对于非单一介质,此表述仍成立.

$$\text{O.P.L.} = \int_S^P n(s)\mathrm{d}s$$

计算从 S 到 P 的所有可能光路,找出"极值"情况,就能知道光线实际的路径.

34.54[c] 利用费马原理推出反射定律.

解 ☞ 如图 34-24 所示,从 S 发出的光线经过界面上任意一点 B 反射至 P 点,假设介质均匀,折射率为 n,则有

$$\text{O.P.L.} = n\overline{SB} + n\overline{BP} = n(h^2 + x^2)^{1/2} + n[b^2 + (a-x)^2]^{1/2}$$

此处 O.P.L.为变量 x 的函数,光传播的路径应满足

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{O.P.L.})}{\mathrm{d}x}=0,\text{即 } nx(h^2+x^2)^{-1/2}-n(a-x)[b^2+(a-x)^2]^{-1/2}=0$$

等价于 $n\sin\theta_i-n\sin\theta_r=0$，即有 $\theta_i=\theta_r$. 因此，当光线从 S 点经 B 点反射至 P 点，费马原理要求 B 的位置应满足入射角等于反射角.

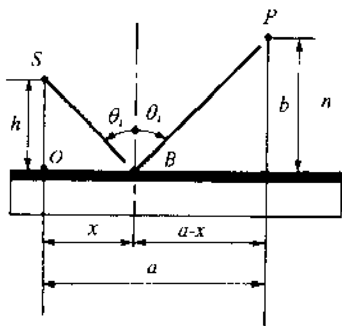


图 34-24

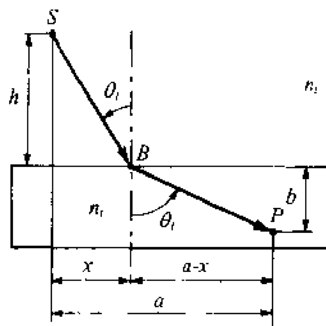


图 34-25

34.55[c]　利用费马原理推出折射的斯涅耳定律.

解　在图 34-25 中，一束光线从 S 出发，经界面处点 B 折射至点 P. 根据光程的导数等于 0 得出点 B 的位置，即

$$\mathrm{O.P.L.}=n_i\overline{SB}+n_t\overline{BP}=n_i(h^2+x^2)^{1/2}+n_t[b^2+(a-x)^2]^{1/2}$$

x 为自变量，应有

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{O.P.L.})}{\mathrm{d}x}=0=n_ix(h^2+x^2)^{-1/2}-n_t(a-x)[b^2+(a-x)^2]^{-1/2}$$

上式即为 $0=n_i\sin\theta_i-n_t\sin\theta_t$，等价于斯涅耳定律. 在 O.P.L. 取极值对应的 x 处斯涅耳定律成立，其余位置均不是 O.P.L. 取极值的位置.

34.56　从 S 点发出的球面波经过某一个光学系统后成一收缩至 P 点的球面波，如图 34-26，根据费马原理得到各光线的光程有何特点？

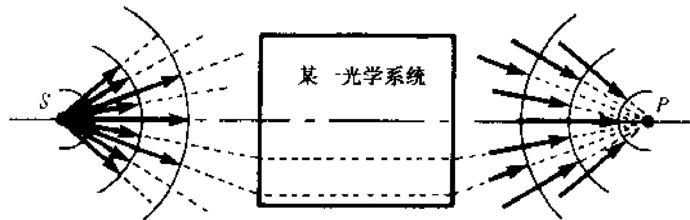


图 34-26

解　光线从 S 点经过系统至 P 点将经过各种不同的光路. 假设其中一条光路的 O.P.L. 最小，根据费马原理，光线只沿此光路传播. 但因为从 S 点发出的光线沿各个方向，所以肯定会沿其余光路传播，则有结论：最小(或最大)光程都相等，即：从 S 点发出的光线经过光学系统至 P 点，所经过的光路光程都相等. 此结论对所有聚光系统(如透镜、面镜)都成立.

34.57　一束平行光沿凹面镜对称轴方向入射，经凹面镜反射，成为一束会聚光. 利用费马原理证明，镜面为抛物面.

解　图 34-27 所示的截面中，对应于平面波 Σ 的平行光线射到镜面 M 上，反射光线会聚于点 F. 所有光路的光程相等，所以

$$n_i(\overline{AB}+\overline{BF})=n_i(\overline{EG}+\overline{GF})=\cdots=n_i(\overline{XY}+\overline{YF})$$

现将线段 $\overline{AB},\overline{EG},\cdots,\overline{XY}$ 延长至点 $C,H,\cdots,Z$，使

$$\overline{BC}=\overline{BF},\overline{GH}=\overline{GF},\cdots,\overline{YZ}=\overline{YF}$$

由上述两等式，得到 $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{EG}+\overline{GH}=\cdots\overline{XY}+\overline{YZ}$，即 Σ 与经过 $C,H,\cdots Z$ 的直线间距离为常

数.于是我们可以作直线Σ′,则 M 上的点到Σ′的距离和此点到 F 点的距离相等.根据定义,M 是抛物线(F 为焦点,Σ′为准线).注意:球面镜只是近似地将平行光会聚于一点.

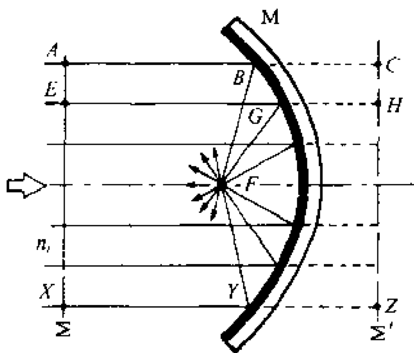


图 34-27

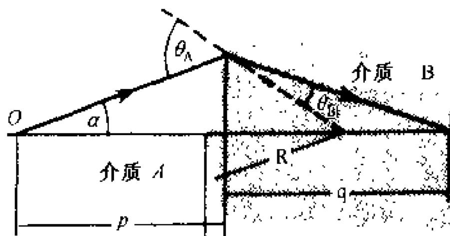


图 34-28

34.58 写出光在球形界面处发生折射成像时,像距与物距满足的方程.

解 ☞ 从物点 O 发生的光在球形界面处发生折射(如图 34-28),物距 p 与像距 q 满足的方程为

$$\frac{n_A}{p}+\frac{n_B}{q}=\frac{n_B-n_A}{R}$$

其中 R 为折射面的曲面半径,在图中,R 为正值.若折射表面在图中曲面的另一侧,则 R 为负值.即光线入射在凸面上,R 取正;光线入射在凹面上,则 R 取负.

当 α 很小时(平行光线),公式(1)仍成立.

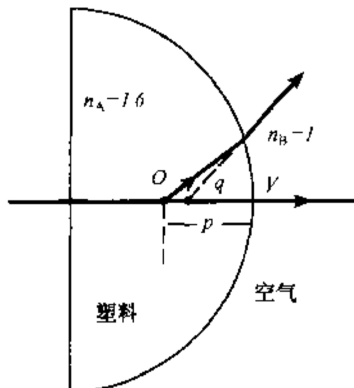


图 34-29

34.59 一个塑料半球的曲面半径为 8cm,折射率为 1.6.轴上离平面和曲面等距处(4cm)有一小瑕疵.当观察者沿轴方向观察时,他看到瑕疵离曲面有多远?

解 ☞ $R=-8\text{cm}$,利用 34.58 中公式(1)得

$$\frac{1.6}{4}+\frac{1}{q}=\frac{1-1.6}{-8},\quad q=-3.25\text{cm}$$

负号表示像与入射光线在同一侧(虚像).



图 34-30

34.60 一塑料半球(半径 $=R$, $n=1.42$)粘在由相同材料制成的长柱体的一端,如图 34-30,一束平行窄光线从左至右射入此系统,光线的会聚点离入射点有多远?

解 ☞ 令 p, p' 分别代表物距和像距.此处,$p=\infty$,代入球面折射公式得 $1.42/p'=(1.42-1.00)/R$, $p'=3.38R$.

34.61 一条小鱼在球形鱼缸左侧 7cm 处,鱼缸的直径为 28cm,不计玻璃缸壁的影响,问观察者看到的小鱼的像在何处?

解 ☞ 如 34-31,

$$\frac{n_A}{p}+\frac{n_B}{q}=\frac{n_B-n_A}{R}$$

$R=-14\text{cm}$,则有

$$\frac{1.333}{21}+\frac{1}{q}=\frac{1-1.333}{-14}$$

求得 $q=-25.2\text{cm}$(在鱼缸左侧).

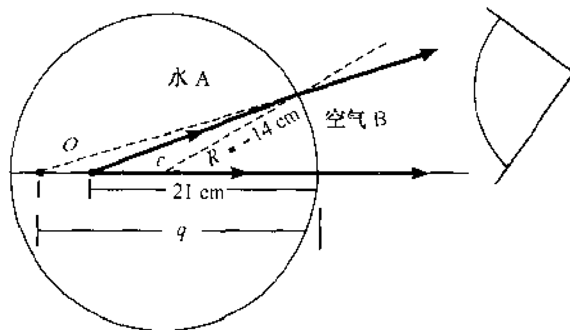


图 34-31

34.62　河面下 40cm 处有条鱼，它看见河面上方有只飞虫. 若这只飞虫在河面上 15cm 处，问鱼看见的飞虫在河面上多少 cm 处?

解　☞ 在题 34.58 公式(1)中，令 $q=p'$，$R=\infty$，则有 $\frac{1}{15}+1.33/p'=0$，得 $p'=-20$cm. 像在河面上方.

34.63　鱼缸底部掉有一个直径为 2.5cm 的硬币，鱼缸内水深 20cm. 从鱼缸上方垂直观察时，(a)看见的硬币在水面下多少 cm 处? (b)看见的硬币直径为多大?

解　☞ 按照题 34.62 的解法，(a)$1.33/p+1/p'=0$，得 $p'=-15.0$cm，在水面下方. (b)对于折射面为平面的情况，放大率为 1. 所以，硬币像的大小与它本身的大小相同.

34.64　折射率为 1.50 的一根塑料棒一端磨平，另一端为半径为 20cm 的曲面. 现将一光源放置在离曲面外 50cm 处，若要使光源的像也在平面外 50cm 处，则此塑料棒应为多长?

解　☞ 光经过了两个折射界面，分别应用球形折射面公式有：$1/50+1.5/p'=0.5/20$，得 $p'=300$cm. 则有 $1.5/(L-300)+1/50=-0.5/\infty$，得 $L=225$cm. 注意，对于平面 $p=L-300$ 为负值，说明第二次成像的"物"与入射光线在同一侧(虚像).

34.65　若在上题中塑料棒两端都为半径为 20cm 的曲面，结果又如何?

解　☞ 与题 34.64 同理，且 $p'=300$cm，则有 $1.5/(L-300)+1/50=-0.5/\pm 20$，考虑到一端的曲率可能为(+)或(-)，求得 $L=267$cm 和 600cm.

34.66　一个空心玻璃球外径 10cm，内径为 5cm，一束平行窄光束沿半径方向射向玻璃球. 问光线在何处成像? 已知玻璃的折射率为 1.50.

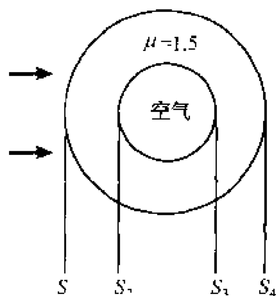


图 34-32

解　☞ 在图 34-32 中，从左至右的四个连续界面上应用球形面折射公式，求得像距球左侧 15cm 处，与入射光线居于同侧(虚像). 经 S_1 折射面成像公式为 $1/\infty+1.5/p'=(1.5-1)/10$，得 $p'_1=+30$. 此像又成为 S_2 折射面的物，(物距为 -25)，用同样的方法依次求解得出最后的结果

34.67　装满水的球形鱼缸中心处有条鱼，小孩将鼻子贴在鱼缸壁上看鱼. 问鱼看见他的鼻子在何处? 小孩看见的鱼又在何处?

解　☞ 根据球形折射面折射公式，$p=R$，有 $1/R+1.33/p'=0.33/R$；解得 $p'=-2R$. 鼻子的像在鱼缸外距缸壁 $2R$ 处. 因为鱼在球心处，从球心处发出的光线垂直于缸壁，不发生偏折，所以鱼的像在它实际位置处，即球心处.

34.68　在图 34-33 中的平凹透镜：$u=1.56$，$R=80$cm，透镜下压一张纸，纸上画有一个直径 3.0mm 的圆. 当从透镜上方垂直观察时，圆的像在它实际位置上方多远处?

解 ☞ 在玻璃-空气的界面处利用折射公式：

$1.56/0.300+1/p'=(1.00-1.56)/80$，得 $p'=-0.192$cm. 所以圈的像在它实际位置上方$0.300-0.192=0.108$(cm).

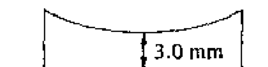


图 34-33

34.2 色散与颜色

34.69 定义下列有关发光的现象：连续光谱，线状光谱，带状光谱，夫琅禾费线及荧光.

解 ☞ 连续光谱包含所有波长的可见光，如蜡烛发出的光.

线状光谱只含某些元素在气体状态下发出的特征波长的明线.

带状光谱是处于激发态的分子特有的光谱，实际上由一组相近的线光谱组成.

太阳光谱中的暗线为夫琅禾费线，它是由于大气层内的气体吸收了特定波长的光而产生的. 荧光是指物体吸收短波长的光后发射长波长的光的过程.

34.70 现怀疑某种氦气(He)，氖气(Ne)，氩气(Ar)的混和气体中混入了 CO 气体，试用一种光谱的方法判别 CO 是否真的存在.

解 ☞ 通过放电使混和气体产生受激辐射光谱，利用光栅摄谱仪分析光谱. 如果 CO 存在，则可很容易地发现它发出的带状光谱，而 He、Ne、Ar 都发出线状光谱.

34.71 一束白光以 55°的入射角射向一块火石玻璃，试求在此玻璃中，波长分别为 486nm 和 656nm 的两束光分开的角度为多少？已知各自的相对折射率为 1.670 和 1.650.

解 ☞ 对两种波长分别应用斯涅耳定律

$$1\sin 55° = 1.670\sin\theta_{486},\ \sin\theta_{486}=0.49051,\ \theta_{486}=29.374°$$

$$1\sin 55° = 1.650\sin\theta_{656},\ \sin\theta_{656}=0.49646,\ \theta_{656}=29.766°$$

$$\Delta\theta = 29.766° - 29.374° = 0.392°$$

34.72 求顶角为 12°的火石玻璃棱镜所产生的 C(红)和 F(蓝)光谱线间的色散角. 假设棱镜满足最小偏向角的条件，且 $n_C=1.644$，$n_F=1.664$.

解 ☞ 根据题 34.45，折射率 n 与棱镜的折射角 A 及最小偏向角 $D_{\min}$(见图 34-34)满足关系

$$n=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+D_{\min})}{\sin\frac{1}{2}A}$$

对于小角 A 和 $D_{\min}$，(由 $\sin\theta\approx\theta$)上式可写为

$$n=\frac{A+D_{\min}}{A}\quad 或\quad D_{\min}=A(n-1).$$

在此例中，只需考虑角度的比值，故可用角度或弧度来表示角，只需在整个过程中单位一致. 且此题中 $A=12°=0.21$rad，满足小角近似. 所以

C 线和 F 线间的色散角 = (F 线偏向角) - (C 线偏向角)

$$=D_{\min,F}-D_{\min,C}=A(n_F-1)-A(n_C-1)$$

$$=A(n_F-n_C)=(12°)(1.664-1.644)=0.24°$$

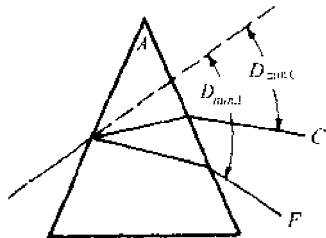


图 34-34

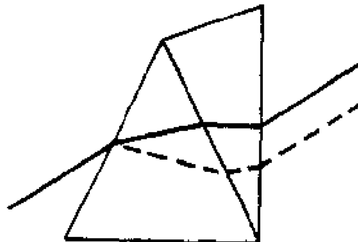


图 34-35

34.73 可利用粘合两块不同玻璃的棱镜的方法使两种波长的光有相同的偏向角(图34-35).此时,我们称此棱镜对于这两种波长消色差.根据这个原理,可做出消色差棱镜.为了消去C和F光谱线间的色差,现将一块10°的冕牌玻璃棱镜粘合一块火石玻璃棱镜.(a)火石玻璃棱镜的折射角应为多少度?(b)此混和棱镜对于D线的偏向角为何值?(D线位于光谱的黄色区,为C线和F线之间的平均谱线.)已知冕牌玻璃对C、D、F线的折射率为 $n_C=1.514$, $n_D=1.517$, $n_F=1.523$;火石玻璃, $n'_C=1.644$, $n'_D=1.650$, $n'_F=1.664$.

解 ☞ (a)与题34.72同理,

冕牌玻璃棱镜的色散 $=A(n_F-n_C)$,火石玻璃棱镜的色散 $=A'(n'_F-n'_C)$

当冕牌玻璃棱镜产生的色散等于(抵消)火石玻璃棱镜产生的色散时,消色差.故

$A(n_F-n_C)=A'(n'_F-n'_C)$　$(10°)(1.523-1.514)=A'(1.664-1.644)$　$A'=4.5°$

(b)混和棱镜产生的D线偏向角

=(冕牌玻璃棱镜产生的D线偏向角)-(火石玻璃棱镜产生的D线偏向角)

$=A(n_D-1)-A'(n'_D-1)=(10°)(1.517-1)-(4.5°)(1.650-1)$

$=2.24°$

34.74 将一块12°的冕牌玻璃棱镜粘合一块火石玻璃棱镜,此组合棱镜能产生色差,但不使平均D线发生偏折.冕牌玻璃和火石玻璃对于D线的折射率分别为1.520和1.650,求火石玻璃的顶角应为何值?

解 ☞ 此题与题34.73(见图34-35)类似,但所要求的条件为(根据题34.72的小角公式),

冕牌玻璃棱镜对D线的偏折=火石玻璃棱镜对D线的偏折

$A(n_D-1)=A'(n'_D-1)$, $(12°)(1.520-1)=A'(1.650-1)$, $A'=9.6°$

34.75 计算轻火石玻璃在C线与F线间的色散率.取D线为C线与F线之间的平均谱线,此玻璃对于C、D、F线的折射率: $n_C=1.571$, $n_D=1.575$, $n_F=1.585$.

解 ☞ 根据定义,火石玻璃在太琅禾费C线及F线间的色散率

$$=\frac{\text{小角棱镜产生的C、F线间的色散角}}{\text{平均D线的偏向角}}$$

$$=\frac{A(n_F-n_C)}{A(n_D-1)}=\frac{n_F-n_C}{n_D-1}=\frac{1.585-1.571}{1.575-1.000}=0.0243$$

34.76 重火石玻璃对于434nm和671nm的波长的折射率分别为1.68和1.65.计算蓝光(434nm)和红光(671nm)以65°的入射角射入顶角为60°的重火石玻璃一侧后,产生的偏向角相差多少?

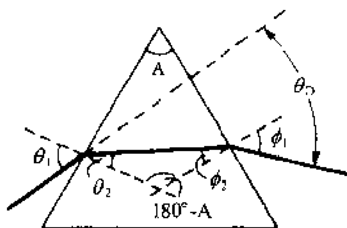


图 34-36

解 ☞ 此处我们不能用小角近似和最小偏向角公式,而需利用题34.43(见图34-36)的基本解法. $n_2=1.65$,在第一界面处应用斯涅耳定律

$$\sin\theta_2=\frac{n_1\sin\theta_1}{n_2}=\frac{(1.00)(\sin65°)}{1.65}=0.549,\ \theta_2=33.3°$$

几何方法求得 $\phi_2=A-\theta_2=60°-33.3°=26.7°$.在第二界面处用斯涅耳定律

$$\sin\phi_1=\frac{n_2\sin\phi_2}{n_1}=\frac{(1.65)(\sin26.7°)}{1.00}=0.741,\ \phi_1=47.8°$$

在图34-36中,一束光线射过棱镜,偏向角为

$$\theta_D=\theta_1+\phi_1\quad A=65°+47.8°-60°=52.8°$$

再对于 $n_2=1.68$ 重复以上步骤,结果为

$$\theta_2=32.6°,\ \phi_2=27.4°,\ \phi_1=50.7°,\ \theta_D=55.7°$$

因此，蓝光和红光的 θ_D 之差为 $\Delta\theta_D = 55.7° - 52.8° = 2.9°$.

34.77 某种玻璃对应柯西公式中的常数 A, B 为 1.5020 和 $5.2\times10^3\text{nm}^2$. 此玻璃对 500nm 的光波的折射率为何值？此波长处的色散又为何值？

解 ☞ 柯西公式给出折射率为 $\mu = A + B/\lambda^2 = 1.5020 + 5200/250000 = 1.5228$；色散为 $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda = -2B/\lambda^3 = 8.3\times10^{-5}\text{nm}^{-1}$.

34.78 若测得玻璃的折射率 μ 作为 λ 的函数，其值为

λ/nm	656.3	589.0	486.2
μ	1.514	1.517	1.524

假设这些数据服从柯西关系式，若要得到一条直线，应如何作图？画出此图，并求 A, B 值. 在 500nm 处，μ 为何值？

解 ☞ 因为 $\mu = A + B/\lambda^2$，所以应作 $\mu - 1/\lambda^2$ 图，直线斜率为 B，截距为 A.
在图 34-37 中可得出，$A = 1.5020$，$B = 5200\text{nm}^2$；所以 $\mu = 1.5020 + [5200/(2.50\times10^5)] = 1.5228$.

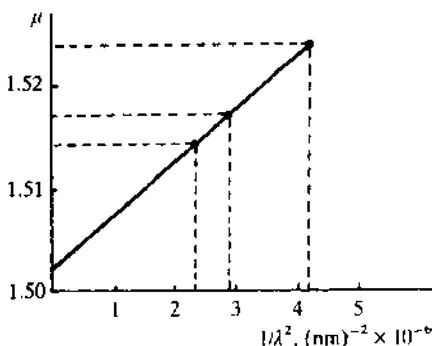


图 34-37

34.79 某一透镜的玻璃满足题 34.77 给出的数据. 若用太阳射出的红光(656nm)，此透镜所成的太阳的像在 12.000cm 远处，若用 486nm 的光，太阳的像又将成在何处？透镜的这种现象称为色差.

解 ☞ 根据题 34.77 中的柯西关系式可得到 $\mu_R = 1.5141$，$\mu_B = 1.5240$. 由透镜公式(见题 35.67)解出 $1/f_B$ 和 $1/f_R$ 的表达式；由 $(1/f_R)/(1/f_B)$ 解出 $f_B = [(\mu_R - 1)f_R]/(\mu_B - 1) = [0.5141(12)]/0.5240 = 11.77(\text{cm})$，此处我们用了条件：远处的物体成像于透镜的焦点处.

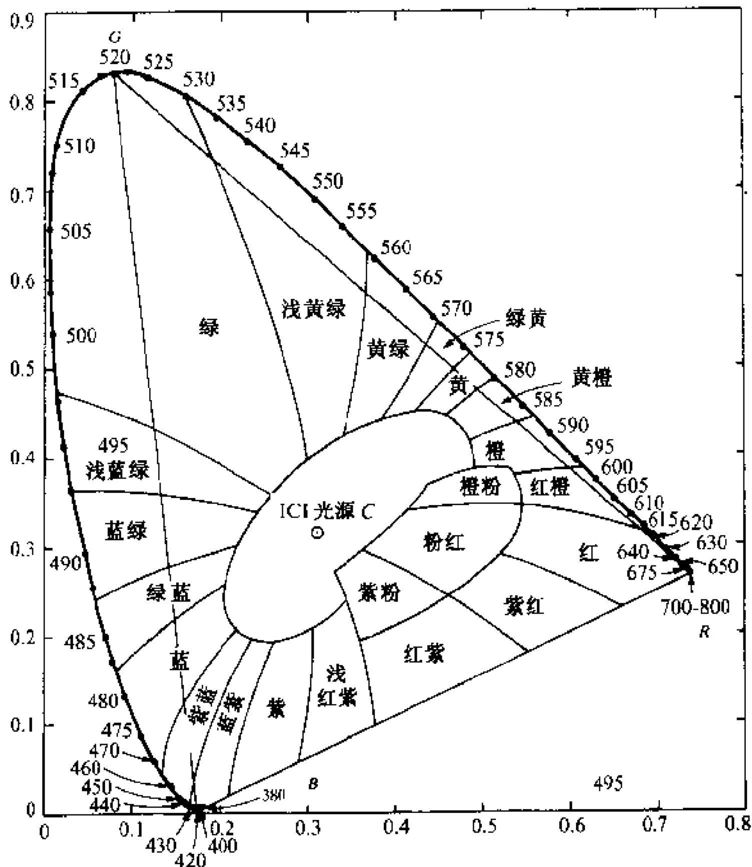


图 34-38

34.80 (a)与485nm互补的光谱色波长为何值？(b)是否存在与520nm互补的光谱色？

解 ☞ 在ICI色度图(图34-38)上从485nm经C点画一条直线，与光谱曲线另一面的交点在588nm处，所以588nm为485nm的互补光谱色.

520nm的互补色为红紫，不是光谱色.

34.81 (a)P点在ICI色度图上的坐标$(x,y)=(0.2,0.5)$，问P点为何种颜色？(b)哪一坐标代表的颜色混入相同比例的P点颜色后变成标准白(C)？

解 ☞ 利用图34-38的简化图34-39.(a)P在深中绿色区.(b)要求P的补色，从P经C画一条直线，延长直线至Q，使$CQ=CP$，Q点坐标为(0.42,0.14).

34.82 要获得标准白(C)，需将480nm，510nm，610nm波长的光谱色以何种比例混和？

解 ☞ 画图34-38的简图34-40，经过点480nm和点510nm画一条直线，经过点610nm和C再画另一条直线.将第二条直线延长与第一条直线交于点P.则P为510nm和480nm的混和色，P再与610nm混和得到C.在P点，510nm和480nm的混和比例为

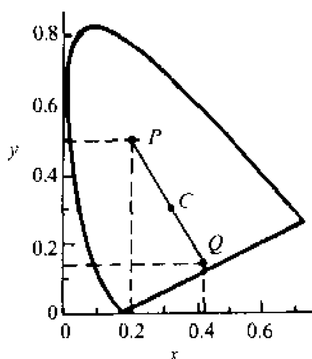


图34-39

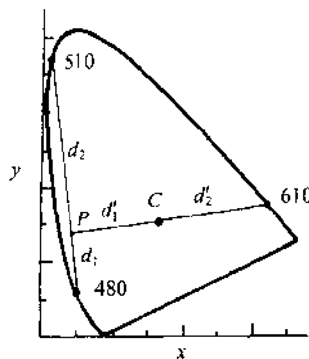


图34-40

$$f_{510}=\frac{d_1}{d_1+d_2}=0.28,\quad f_{480}=\frac{d_2}{d_1+d_2}=0.72$$

在C处，P和610nm混和比例为

$$f_P=\frac{d'_2}{d'_1+d'_2}=0.59,\quad f_{610}=\frac{d'_1}{d'_1+d'_2}=0.41$$

因为P为28%的510nm，C为(0.28)(0.59)=0.165倍的510nm和(0.72)(0.59) 0.425倍的480nm，所以480nm、510nm、610nm的比例为0.425∶0.165∶0.41.

34.83 波长为485nm、520nm、600nm的光谱色以何种比例混和时，得到色度坐标为(0.25,0.40)的绿色.

解 ☞ 在图34-41中画出点$Q(0.25,0.40)$.经485nm和520nm画一直线，再经600nm和Q画另一直线.延长第二条直线交第一条直线于P.在P处，485nm和520nm的比例为

$$f_{485}=\frac{d_2}{d_1+d_2}=0.66,\quad f_{520}=\frac{d_1}{d_1+d_2}=0.34$$

Q点处，P和600nm的比例为

$$f_P=\frac{d'_2}{d'_1+d'_2}=0.68,\quad f_{600}=\frac{d'_1}{d'_1+d'_2}=0.32$$

因此，Q包含0.32的600nm，(0.68)(0.66)=0.45的485nm，(0.68)(0.34)=0.23的520nm.

34.84 应将色度坐标$(x,y)=(0.2,0.2)$，$(0.3,0.6)$，$(0.5,0.2)$的颜色以何种比例混和时，获得坐标为(0.3,0.3)的白色？

解 ☞ 在图34-42的色度图中画出$B=(0.2,0.2)$，$Y=(0.3,0.6)$，$R=(0.5,0.2)$和$W=(0.3,0.3)$.直线连接B、Y，再经R，W画第二条直线，并延长交直线BY于T.测出线段d_R，d_T，d_B，d_Y的长度.T，R按下述比例混和，得到W.

$$\frac{d_T}{d_T+d_R}=0.74,\quad \frac{d_R}{d_T+d_R}=0.26$$

即 $W=0.74T+0.26R$.同理,当 B、Y 按下述比例混和,得到 T.

$$\frac{d_B}{d_B+d_Y}=0.66,\quad \frac{d_Y}{d_B+d_Y}=0.34$$

即 $T=0.66B+0.34Y$.将此式代入 W 的表达式,得到

$$W=(0.74)(0.66B+0.34Y)+0.26R\approx0.49B+0.25Y+0.26R$$

所以,将 B、Y、R 按 0.49:0.25:0.26 混和,得到 W.

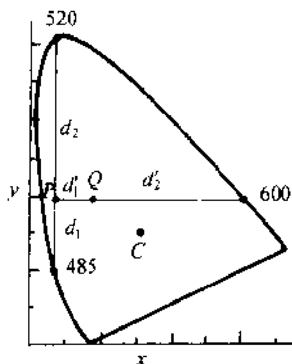


图 34-41

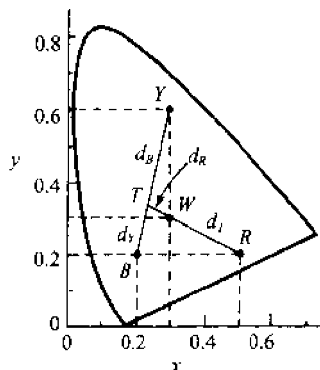


图 34-42

34.3 光度学和照度

34.85 投影灯的光线在垂直墙壁上产生的照度为 12000lm/m^2,墙壁距光源 5m.则具有相同照度的各向同性的光源在 5m 处的强度为多大?

解 ☞ 对于各向同性的垂直入射光源,$E=I/r^2$.所以,$I=r^2E=(5\text{m})^2(12000\text{lm/m}^2)=3\times10^5$ cd.

34.86 一盏 200W 的钨丝灯光效能为 18lm/W,它的强度为多少?

解 ☞ 总光通量为 $F=(200\text{W})(18\text{lm/W})=3600\text{lm}$.假设此光通量填入 4π 立体弧度的立体角中,则强度 $I=(3600\text{lm})/(4\pi\text{sr})=286\text{cd}$.

34.87 一盏 40W,110V 的台灯光效能为 11.0lm/W.离此台灯多远处,最大照度为 5lm/m^2?

解 ☞ 假设台灯为各向同性光源,则有 $E_{max}=F/(4\pi r^2)=I/r^2$.根据题中数据,$F=(40\text{W})(11.0\text{lm/W})=440\text{lm}$,而 $I=F/(4\pi)=35.0\text{cd}$.又给出 E_{max} 为 5lm/m^2,所以 $5.0=35.0/r^2$,$r=2.65\text{m}$.

34.88 将一均匀强度为 10cd 的小光源放置在半径为 1m 的球面中心处.则球面上的照度为多少?

解 ☞ 一个 10cd 的光源发光为 $4\pi\times10=40\pi\text{lm}$.

$$E=\frac{F}{A}=\frac{F}{4\pi R^2}=\frac{40\pi}{4\pi(1^2)}=10(\text{lm/m}^2)$$

34.89 将一个 800cd 的各向同性光源放置在半径为 4m 的球心处,则在球面 0.3m^2 的面积上有多少流明通过?此面积上的 E 又为何值?

解 ☞ 此面积垂直于光线,所以光照度 $E=I/r^2=(800\text{cd})/(4.0\text{m})^2=50\text{lm/m}^2$.通过此面积的光通量 $\Delta F=EA=(50)(0.3)=15(\text{lm})$.

34.90 一个各向同性点光源的强度为 200cd.(a)此光源的光通量为何值?(b)在光源正下方 80cm 处有一张桌子,则有多少光通量打在桌面上 2cm^2 的面积内?(c)桌面此点处的照度又为何值?

解 ☞ (a)对于各向同性光源，$F=4\pi I=(4\pi sr)(200cd)=2512lm$.(b)在距光源 $r=80cm$ 的垂直桌面上，面积 $\Delta A=2cm^2$ 内，光源所对的立体角为 $\Delta\Omega=\Delta A/r^2=2/80^2=3.125\times10^{-4}(sr)$.所以，打在此面积内的总光通量 $\Delta F=I\Delta\Omega=(200cd)(3.125\times10^{-4})=0.0625lm$.(c)$E=E_{max}=I/r^2=(200cd)/(0.80m)^2=313lm/m^2$.或者，根据(b)的结果，$E=\Delta F/\Delta A=(0.0625lm)/(2.0\times10^{-4}m^2)=313lm/m^2$.

34.91　求距 125cd 的光源 7ft 的表面上的照度，(a)此表面与光线垂直；(b)此表面与光线成 15°角.

解 ☞ (a)$E=E_{max}=I/r^2=(125cd)(7ft)^2=2.55lm/ft^2$.(b)$E=E_{max}\cos\theta$.其中 θ 为表面法线与入射光线间的夹角.此题中，$\theta=85°$，则 $E=(2.55lm/ft^2)\cos85°=0.222lm/ft^2$

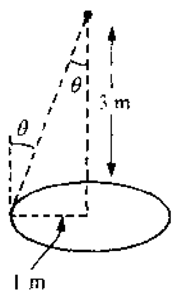


图 34-43

34.92　在半径为 1m 的圆形桌面中心上方 3m 处悬挂一盏 200cd 的灯，计算桌面边缘处的照度.

解 ☞ $E=(I/r^2)\cos\theta$，其中(见图 34-43)$r=(3^2+1^2)^{1/2}=3.16(m)$，$\cos\theta=(3m)/(3.16m)=0.949$.所以，$E=(200cd/10.0m^2)(0.949)$，$E=19.0lm/m^2$.

34.93　一盏磨砂灯泡，可视为各向同性光源，在 5m 远处的照度为 $8lm/m^2$.计算(a)从灯泡发出的总光通量，(b)灯泡的发光强度.

解 ☞ 我们假设灯泡的光通量为最大光通量，即为垂直入射.

(a)$F=E(4\pi r^2)=(8lm/m^2)(4\pi)(25m^2)=2513lm$.

(b)$I=F/(4\pi)=200cd$，或者 $I=Er^2=200cd$.

34.94　计算距发光强度为 72cd 的各向同性点光源 120cm 处的小面积上的照度 E.(a)表面垂直于光通量，(b)表面的法线与入射光成 30°角.

解 ☞ (a)$E=\dfrac{I}{r^2}=\dfrac{72lm/sr}{(1.2m)^2}=50lm/m^2$

也可用其它角度单位表示，因为立体弧度不是常用单位.

(b)$E=E_{max}\cos\theta=\dfrac{I}{r^2}\cos\theta=(50lm/m^2)(\cos30°)=43lm/m^2$

34.95　某光度计测出太阳光的照度为 $10^5lm/m^2$，若日地距离为 $1.5\times10^{11}m$，太阳的发光强度为多少？

解 ☞ 我们假设光度计面朝太阳，获得最大照度，于是

$I=Er^2=(10^5lm/m^2)(1.5\times10^{11}m)^2=2.25\times10^{27}lm/sr=2.25\times10^{27}cd$

34.96　一盏街灯位于人行道上方 6m 处，其功率为 100W，光效能为 50lm/W.假设光源各向同性，求下列两位置处的照度：(a)街灯正下方的人行道上一点，(b)离街灯正下方为 8m 的人行道上一点.

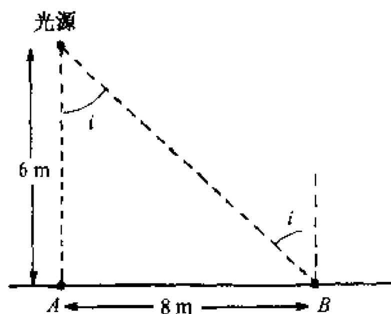


图 34-44

解 ☞ 如图 34-44，(a)街灯发出的光通量 F 为 $(100W)(50lm/W)=5000lm$；发光强度 I 为 $F/(4\pi)=[5000/(4\pi)]cd=398cd$.街灯正下方处的照度 E 为

$$E=\frac{I}{R^2}=\frac{398}{36}=11.1(lm/m^2)$$

(b)距街灯正下方 8m 的一点距街灯 10m，此处

$$\cos i=0.6,\quad E=\frac{I\cos i}{R^2}=\frac{(398)(0.6)}{100}=2.4(lm/m^2)$$

34.97　一盏冷空气探照灯泡的光效能为 25lm/W.此探照灯的功率由一台效率为 80% 的发动机提供，而发动机的功率通过直径为 16cm 的皮带圈不断旋转产生.若皮带两头的

张力差为 98N，则为使地面上的照度为 40lm/m^2，发动机的角速度应取何值？探照灯的反射系统将所有光线会聚成地面上一个直径为 50m 的圆.

解 ☞ 探照灯总光通量 F 为 $EA=(40\text{lm/m}^2)(\pi)(25\text{m})^2=78500\text{lm}$. 探照灯的输出功率为 $(78500\text{lm})/(25\text{lm/W})=3140\text{W}$. 因为发动机工作效率为 80%，则发动机皮带输入的功率 P 为 $(3140\text{W})=0.80P$，$P=3925\text{W}$. 而 $P=\Gamma\omega$，其中 Γ 为皮带上的净力矩，$\omega=2\pi f$ 为角速度.

$$\Gamma=(T_2-T_1)R=(98\text{N})(0.08\text{m})=7.84\text{N}\cdot\text{m}$$

因此，$\omega=\dfrac{P}{\Gamma}=\dfrac{3925\text{W}}{7.84\text{N}\cdot\text{m}}=501\text{rad/s}$

$$f=\omega/2\pi=79.8\text{r/s}$$

34.98 一盏 60W 的电灯正下方 60cm 处有一物体，要使此物体上的照度加倍，应将电灯下移多少？

解 ☞ 正对光源时，表面上的照度 $E=I/r^2$. 对于两个不同高度，$E_1/E_2=r_2^2/r_1^2$. 对于 $E_2=2E_1$，$r_1=60\text{cm}$，得到 $r_2^2=\dfrac{1}{2}(60\text{cm})^2$，$r_2=(60\text{cm})/\sqrt{2}=42.4\text{cm}$. 所以应将电灯下移 $r_1-r_2=17.6\text{cm}$.

34.99 将 27cd 的灯离屏幕多远处照射时，产生的照度与一盏 75cd 的灯从 15ft 远处产生的照度相等？

解 ☞ $E_1=E_2\Rightarrow I_1/r_1^2=I_2/r_2^2$，所以 $27/r_1^2=75/15^2=0.333$；$r_1^2=27/0.333=81(\text{ft}^2)$；$r_1=9\text{ft}$.

34.100 待测电灯离测光计屏 90cm 时，与 32cd 的标准电灯离屏 60cm 时产生相同的照度. 计算待测电灯的发光强度 I_1.

解 ☞ $\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$，$\quad I_1=32\text{cd}\,\dfrac{(90\text{cm})^2}{(60\text{cm})^2}=72\text{cd}$

34.101 两盏分别为 5cd 和 20cd 的电灯相距 150cm，求在两灯间哪一位置处，两盏灯有相同的照度.

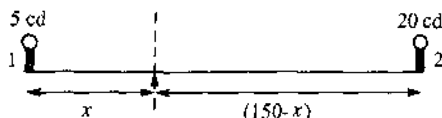


图 34-45

解 ☞ 在图 34-45 中，设垂直虚线位置处 $E_1=E_2$，则 $I_1/x^2=I_2/(150-x)^2$，或写为 $5/x^2=20/(150-x)^2$. 得 $(150-x)^2=4x^2$，$x^2+100x-7500=(x+150)(x-50)=0$. 解出 $x=50\text{cm}$. 即间距 5cd 的电灯 50cm 处为所求位置. 另一解，$x=-150$. 在 5cd 电灯左侧 150cm 处，两电灯的照度又相等.

34.102 一盏长直荧光灯在径向距离 r_1 处的照度为 E_1，求 r_2 处 E_2 的值. 假设灯管的长度远大于 r_1，r_2，故灯管的端点效应可忽略.

解 ☞ 考虑两短柱面，长度为 L，半径为 r_1、r_2，与荧光灯管共轴. 经过两柱面的光通量相等，忽略经过端点的光通量，则

$$A_1E_1=A_2E_2,\quad \text{即 } 2\pi r_1LE_1=2\pi r_2LE_2$$

得到 $\qquad E_2=E_1\dfrac{r_1}{r_2}$

注意：这里照度随 $1/r$ 减小，与点光源对应的 $1/r^2$ 不同.

第三十五章　面镜;透镜和光学器件

35.1 面　镜

35.1 给出关于薄透镜和球面镜的镜像公式.

解 ☞ 镜像公式可以写为

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \tag{1}$$

其中 p = 物距, q = 像距, f = 焦距,距离是沿光轴测量的到透镜或球面镜的距离.这个公式仅仅适用于薄透镜和其尺寸小于其曲率半径的球面镜,而且仅适用于与光轴成小角度的入射光线(傍轴光线). p、q、f 的符号习惯如表 35-1 所示.光线从一个实物的一点发出,汇聚于一个虚物的一点.同样地,光线汇聚成实像上的一点却从一个虚像上的一点发散出去.其它通常代替(p,q)使用的符号有:(p,p'),(s,s'),(s_0,s_i),(d_0,d_i)等等.

表 35-1

量	符号	
	+	−
f	会聚透镜凹面镜	发散透镜凸面镜
p	实　物	虚　物
q	实　像	虚　像

35.2 薄透镜和面镜的线性放大率公式是什么?

解 ☞ 如果 h_0 和 h_i 指物和像的高度,那么,分别用 35.1 题的符号,有

$$\frac{h_i}{h_0}=\frac{-q}{p} \tag{1}$$

若物和像都是正立的, h_0 和 h_i 是正的;若物体和像是倒立的,它们是负的.其它通常代替(h_0,h_i)使用的符号有(h,h'),(S_0,S_i),(l_0,l_i)等等.

35.3 描述一个实物在平面镜中所成的像.

解 ☞ 在图 35-1 中, P_1P_2 代表离平面镜反射面距离 d_0 的真实物体.从 P_1 点发出的几条光线如 a,b,c,它们对应的反射线分别为 a',b',c'.反射光线的反向延长线交于 P_1',即位于虚像 $P_1'P_2'$ 上的一点.

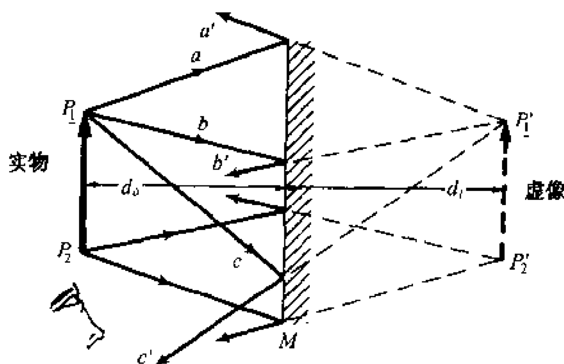


图 35-1

像是正立的，$\overline{P_1P_2}$（物的长度 l_0）和$\overline{P_1'P_2'}$（像的长度 l_i）相等，并且物距 d_0 和像距 d_1 也是相等的，在图中的眼睛可看到平面镜后的像.

我们用题 35.1 和 35.2 的公式来验证结果. 对于一个平面镜，$f=\infty$. 因而题 35.1 的（1）式给出 $d_1=-d_0<0$，题 35.2 的式（1）给出 $l_i=l_0>0$.

35.4 描述一虚物在平面镜中所成的像.

解 ☞ 一虚物就是附属光学系统产生的实像. 因而，在图 35-2 中，经过凸透镜 L 所成的实像 I_1 对于平面镜 M 来说是一虚像，光路图显示虚物的像是实像，正像（与 I_1 取向相同），其大小和离平面镜之距离与 I_1 相同. 我们能用题 35.1 及 35.2 的公式来验证. 假设透镜的焦距为 15cm，实物离透镜的物距为 45cm，透镜和平面镜之距离为 18cm，有$\frac{1}{45}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$或 $x=22.5$cm. 因为22.5 − 18 = 4.5(cm). 所以 I_1 在 M 后，可得 $d_0=-4.5$cm（虚物）. 令 $l_0>0$，$f=\infty$，得 $d_i=+4.5$cm（等距离，实像）$l_i=l_0$（正立等大）我们可以说平面镜的效果是将 I_1 向透镜移近了 9.0cm.

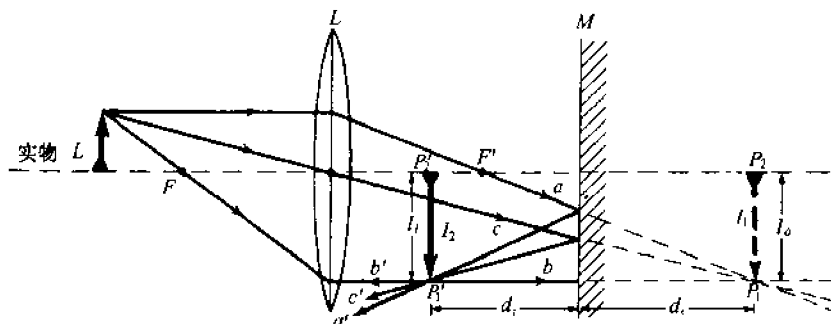


图 35-2

35.5 两平面镜相互垂直，如图 35-3 所示. 一束光线射向一水平面镜，入射角是 θ，并被反射到竖直平面镜. 证明：被竖直平面镜反射后的光线与原入射光线平行.

解 ☞ 入射光线和第二条反射光线与第一条反射光线之夹角均为 2θ，因而，它们是平行的.

35.6 两个相向的平面镜，长度均为 1.6m，两平面镜之间距离是 20cm. 一束光线射向其中一平面镜，入射角是 30°. 当该光线到达另一平面镜末端时，它被反射了多少次？

解 ☞ 如图 35-4 所示，在光线的每一次反射期间经过的水平距离为 $d=h\tan\theta=(20\text{cm})(\tan30°)=11.54\text{cm}$，有

$$\frac{L}{d}=\frac{160\text{cm}}{11.54\text{cm}}=13.86$$

即有 14 次的反射，包括第一次反射.

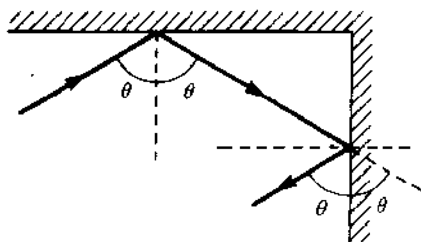


图 35-3

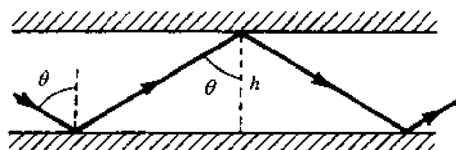


图 35-4

35.7 在图 35-5(a)中，一束光线以入射角 50°射向夹角为 60°的两平面镜的一个. (a)计算光线入射到第二个平面镜的入射角，(b)计算从第二个平面镜反射到第一个平面镜时的入射角度.

解 ☞ (a)参照图 35-5(b). 根据反射定律 $\theta'=\theta=50°$，因此，$\alpha=90°-\theta'=40°$. 因为三角形 ABC

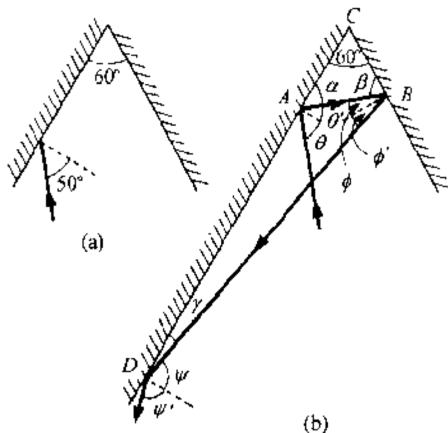


图 35-5

的三个内角分别为 $\alpha,\beta,60°$,有 $\alpha+\beta+60°=180°$ $\beta=180°-60°-40°=80°$ 因此在第二个平面镜上的入射角是 $\phi=90°-\beta=10°$.

(b)根据反射定律 $\phi'=\phi=10°$,三角形 ABD 的内角分别是 $90°+\theta'$, $\phi+\phi'$, 及 γ, 于是 $\gamma=180°-140°-20°=20°$ 于是入射角 $\psi=90°-\gamma=70°$.

35.8 当你站在一平面镜面前,鼻子距镜 20cm,那么眼睛聚焦点在什么距离才能看到镜子中的鼻子?如果你右眼是蓝的,左眼是绿的,你在镜中的像是绿的右眼,蓝的左眼,试解释.

解 ☞ 像在平面镜后 20cm,于是眼睛应聚焦在 40cm 处.物体的每一部分在镜中的像都跟平面镜平行.因而你的左眼在镜中变成像的右眼.即左边和右边交换了.

35.9 如果一物体置于两平行平面镜之间,无数的像会形成.假设镜之间相距 $2d$,而物体在镜的中间一点.求物体同像之间的距离.

解 ☞ 像的情况如图 35-6 所示,I_1 和 I_1' 是物点 O 直接的像,I_1 在 M_2 中所成像 I_2',以此类推,即像与物距离为 $2nb$.

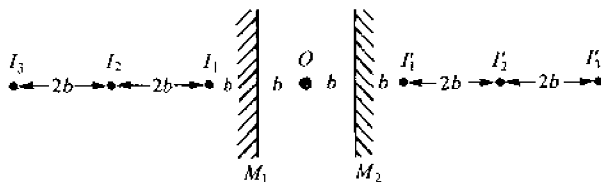


图 35-6

35.10 两平面镜夹角为 θ,一物体放在它们中间的角平分线上,找出下列情况的最近四个像的位置$(a)\theta=30°$,$(b)\theta=120°$,并将像在图上画出.

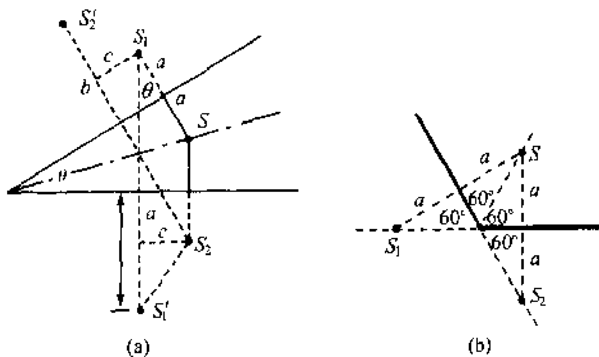


图 35-7

解 ☞ (a)夹角为 30°的情况如图 35-7(a).S_1 是光源 S 在上面镜中的像,它离上平面镜距离 a.S_1 对于下平面镜是一光源,于是在下面镜中形成像 S_1',且距下平面镜距离为 b,以此类推,形成 S_1、S_2、S_1'、S_2' 四个像相关的距离 b、c 可用 a 表示为 $b=a(2\cos\theta+1)$, $c=(b-a)\tan\theta$.

(b)对于顶角为 120°的情形,同样可得像 S_1 和 S_2,无其它的像,因为 S_1、S_2 分别位于两镜所在的平

面内[见图 35-7(b)].

35.11 一男孩高 1.50m,恰能看到 3m 远的竖直平面镜中他的像.他的眼睛距水平地面 1.4m.计算该镜的竖直尺寸和放置的高度.

解 ☞ 在图 35-8 中,设 AB 代表男孩.他眼睛在 E 点,那么 $A'B'$ 便是 AB 在镜 MR 中的像,DH 代表男孩能看到像 $A'B'$ 所需最小的平面镜.

三角形 DEC 和 MDA' 是全等三角形.有 $\overline{CD}=\overline{DM}=5$cm.三角形 HRB' 和 HCE 也是全等三角形,有 $\overline{RH}=\overline{HC}=70$cm,那么镜子的尺寸是 $\overline{HC}+\overline{CD}=75$cm,它的高度是 $\overline{RH}=70$cm.

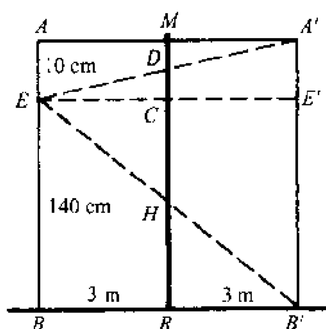


图 35-8

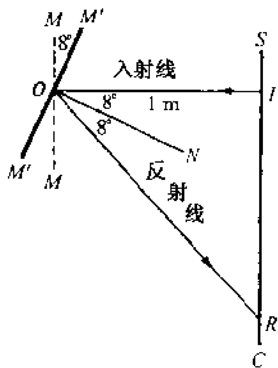


图 35-9

35.12 如图 35-9 所示,光线 IO 入射到一反射式电流计的小平面镜上,该镜将光线反射到标尺 SC 上,SC 与无偏转时的镜面 MM 平行,相距为 1m.设 MM 转过一角度 8°,到达 $M'M'$ 位置.在标尺 SC 上的光点移动多少距离?

解 ☞ 面镜转过 8°,那么法线 NO 也转过 8°,这样角度 IOR 是面镜转过角度的两倍,即 16°.

所以 $$\overline{IR}=\overline{IO}\tan16°=(1\text{m})(0.287)=28.7\text{cm}$$

35.13 两平面镜相互平行,彼此相距 20cm.一照明点位于它们之间,距其中一平面镜 5cm.计算三个相距(对同一平面镜来说)最近像之间距离.

解 ☞ 每个像距都同对应的物距相等.如图 35-10 所示.对于平面镜 1,像点分别在 5cm、35cm、45cm 处.对于平面镜 2,像点分别在 15cm、25cm、55cm 处.

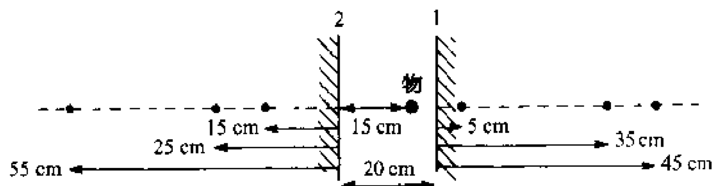


图 35-10

35.14 一束光线以 25°的入射角射向一平面镜.如果平面镜转过 6°,使得入射角变成 31°,那么反射角转过多少度?

解 ☞ 入射光线是固定的.那么变化的入射角和变化的反射角是一致的.入射角增加 6°,反射角也要增加 6°,那么总的变化便是反射光线转过 12°.

35.15 描述在一凹面镜曲率中心 C 外的物体由凹面镜所成的像.

解 ☞ 图 35-11 中.真实光线 a,b,c.从物体 P_1P_2 上的 P_1 点发出.光线 a 与光轴平行,b 通过焦点 F,c 通过 C 点.根据反射定律,反射光线 a',b',c' 将会聚于 P' 点,即 P_1 点的像点 P_1'.根据反射定律,且注意到像是倒立的.

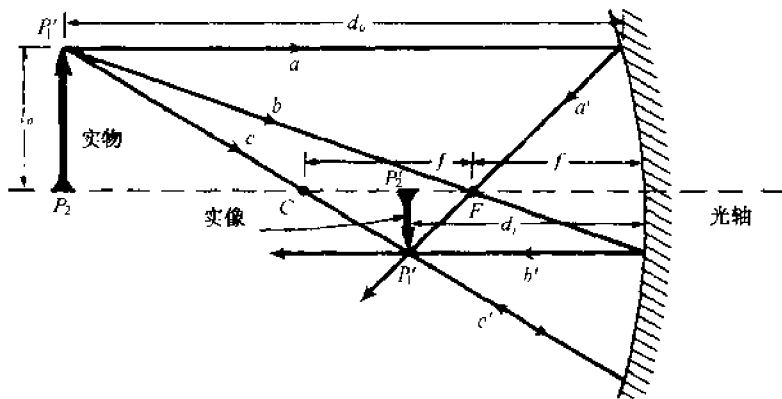


图 35-11

则　　$f=-20\text{cm}, d_0=+45\text{cm}, l_0=+5\text{cm}$. 有 $\frac{1}{45}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{20}$

$d_i=+36\text{cm}$(实像), $\frac{45}{36}=-\frac{5}{l_i}$,　$l_i=-4\text{cm}$(倒立的,缩小的像)

35.16　描述在一凹面镜焦点 F 内一物体所成的像.

解　☞ 见图 35-12.与题 35.15 一样画光路图,我们发现所成像是正立,放大的虚像.

设 $f=+20\text{cm}, d_0=+15\text{cm}, l_0=+5\text{cm}$. 通过公式可得 $d_i=-60\text{cm}$(虚像)及 $l_i=+20\text{cm}$(正立,放大).

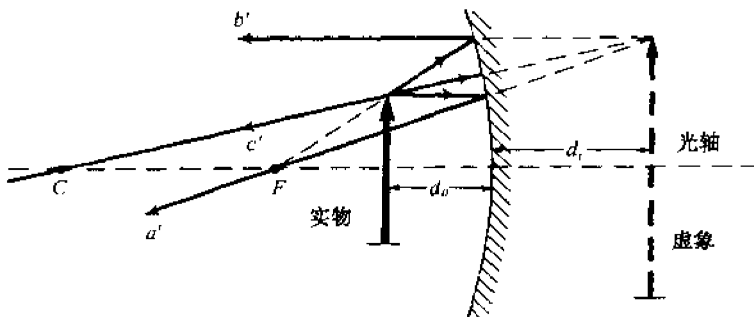


图 35-12

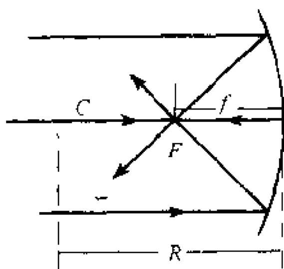


图 35-13

35.17　一凹面镜半径为 0.80m,那么它将太阳光聚焦于何处?

解　☞ 太阳光可被认为是一组平行光轴的光线,经过反射光线会聚于主焦点上(图 35-13).

$f=R/2=0.80/2=0.40(\text{m})$(焦距)

35.18　一物体离焦距为 0.20m 的凹面镜 0.15m. (a)像在什么位置? (b)如物 10cm 高,像高是多少?

解　☞ (a) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$,

$\frac{1}{0.15}+\frac{1}{q}=\frac{1}{0.20}$, $q=-0.6\text{m}$ 像是虚的.

(b) $\frac{像高}{物高}=\left|\frac{q}{p}\right|$　　$\frac{像高}{10\text{cm}}=\frac{0.6}{0.15}$

像高 = 40cm

35.19　一 10cm 高的物体离焦距为 20cm 的凹面镜 50cm,求像的位置、高度及方向.

解 ☞ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$, $\frac{1}{50}+\frac{1}{q}=\frac{1}{20}$,
$q=33.3\text{cm}$

$$\frac{h_i}{h_0}=\frac{-q}{p}=\frac{-33.3}{50}=-0.666,\quad h_i=-6.66\text{cm}$$

所以像是实的,6.66cm 高,并且是倒立的.

35.20 根据镜像公式,如果像的尺寸和物体相同,物体应置于何处?(设焦距为 f).

解 ☞
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

由于像的尺寸和物体尺寸相同,有

$$\left|\frac{q}{p}\right|=1,\quad q=p$$

代回原公式,$p=2f$.即物体必须放在离面镜 $2f$ 处.正好是曲率中心处.注意 $q=-p$ 不满足镜像公式.

35.21 一物体在凹面镜前 0.5ft 处,而像在凹面镜后 2.0ft 处.求焦距及镜的曲率半径.

解 ☞ 利用镜像公式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\quad \frac{1}{0.5}+\frac{1}{-2.0}=\frac{1}{f},\quad 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{f},\quad f=\frac{2}{3}\text{ft},\quad \frac{R}{2}=f=\frac{2}{3}\text{ft},\quad R=1.33\text{ft}$$

35.22 太阳直径在地球上任一点的张角为 32′.试分析一半径为 400cm 的凹面镜所形成太阳的像,参见图 35-14.

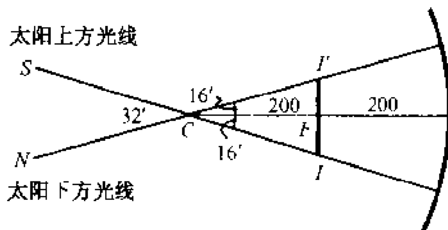


图 35-14

解 ☞ 既然可以认为太阳是在无穷远处,p 是无穷大,$\frac{1}{p}$是 0.有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r},\quad 0+\frac{1}{q}=\frac{2}{400}$$

解之,得 $q=200\text{cm}$.像在主焦点 F 处,离凹面镜 200cm 远.将角度 32′ 代入镜像公式中,可得

$$\overline{I'I}=2(\overline{I'F})=2(\overline{CF}\tan 16')$$
$$=2(200\text{cm})(0.00465)=1.86\text{cm}$$

35.23 欲使在曲率半径为 36cm 的凹面镜中所成像是物体本身的 1/9,那么物体应该放在什么位置?

解 ☞ 焦距是 $R/2=18\text{cm}$,有

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{18}$, $\frac{1}{9}=\left|\frac{q}{p}\right|$, q 及 p 是正的.

有 $p=9q$,因此

$$\frac{1}{p}+\frac{9}{p}=\frac{1}{18},\quad p=180\text{cm}$$

35.24 要想使一盏灯在墙上的像放大 5 倍,墙离灯 12ft 远,那么需要什么样的镜?并求它的位置.

解 ☞ 墙上的像为实像,那么 q 是正的,物距 p 也是正的,那么像肯定是倒的,$q/p=5$.既然 $q>p$,从给出的信息可得到 $q-p=12\text{ft}$,及 $5p-p=12\text{ft}$,有 $p=3\text{ft}$.那么镜应放在离灯 3ft 远,离墙 15ft 远.而且 $1/p+1/q=1/f$,$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{1}{f}$,$f=2.5\text{ft}$.因而所需镜是半径为 5ft 的凹面镜.

35.25 12mm 高的物体置于离曲率半径为 0.2m 的凹面镜 0.5m 处.找出该镜的焦距及像的位置、高度及像的方向.

解 ☞ $f=\frac{r}{2}=\frac{0.2\text{m}}{2}=0.1\text{m}$ 有$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$, $\frac{1}{0.5}+\frac{1}{q}=\frac{1}{0.1}$ $\frac{1}{q}=10-2=8$

$q=0.125\text{m}$ 且 $\frac{-q}{p}=\frac{h_i}{h_0}$，$\frac{-0.125}{0.5}=\frac{h_i}{0.012}$　有 $h_i=-3\text{mm}$. 像是实的且是倒立的.

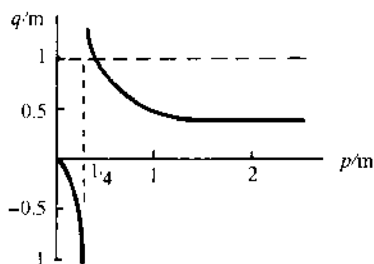


图 35-15

35.26　如果一物体与焦距为 0.25m 的凹面镜之间的距离发生变化，那么像的位置也要发生变化，即像距是物距的函数. 设物距之变化范围从 0 到 $+\infty$，那么求实像范围，虚像范围.

解　☞ 图 35-15. 实像的像距 q 是正的，$p>f$. 虚像的像距 q 是负的，$p<f$.

35.27　8mm 高的物体离焦距为 200mm 的一凹面镜之距离为 125mm. 计算像的位置，大小及性质.

解　☞ 既然 $p<f$，像必定是虚的. 定量地，有

$$\frac{1}{125}+\frac{1}{q}=\frac{1}{200},\ \frac{1}{q}=\frac{5}{1000}-\frac{8}{1000},\quad q=-333\text{mm}$$

$$\frac{-q}{p}=\frac{h}{8}=\frac{333}{125},\quad h=21.3\text{mm}$$

即像是正立的，虚像.

35.28　如果凹面镜离脸 12in 远，那么从该焦距是 18in 的凹面镜会得到放大多少倍的像？

解　☞ 利用镜像公式，有 $\frac{1}{12}+1/q=\frac{1}{18}$，$q=-36\text{in}$. 所以像是虚的，正立的，放大倍数 $=|36/12|=3$.

35.29　一男人的下巴离一凹面镜 0.4m. 如果镜的放大率是 2.5，那么该凹面镜的曲率半径是多少？

解　☞ 为将脸部放大，我们需要一个正立的虚像，$|q/p|=2.5$，因而 $q=-2.5p=-1.0\text{m}$，且

$$\frac{1}{0.4}+\frac{1}{-1.0}=\frac{1}{f},\quad 2.5-1=\frac{1}{f},\quad f=\frac{1}{1.5}$$

最后，$R=2f=1.33\text{m}$.

35.30　医生通过一凹面镜顶点的一个小孔来检查病人肿痛的咽喉. 如果该凹面镜的曲率半径是 462mm，光源距面镜 1m 远，那么咽喉距面镜多远才能使光源的像正好在患处？

解　☞ 焦距是 $f=\frac{r}{2}=\frac{462}{2}=231(\text{mm})$，$f=0.231\text{m}$，注意到 $p=1\text{m}$，有

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{q}=\frac{1}{0.231}=4.329,\quad q=300.4\text{mm}$$

35.31　为了要得到一牙洞放大的像，牙医用焦距为 12mm 的凹面镜放置在离病牙 9mm 处，那么我们得到的线性放大率是多少？

解　☞ 有

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{q}=\frac{1}{12},\quad q=-36\text{mm}$$

即像正立，且放大率为 $|36/9|=4$.

35.32　一物体放在曲率半径为 0.3m 的凹面镜的前面，如果想要分别产生物体 3 倍大小的实像和虚像，求这两种情况所需要的物距.

解　☞ 对于实像 $q=3p$，及 $1/p+1/3p=1/f=1/0.15$，　$p=0.200\text{m}$

对于虚像 $q=-3p$，及 $1/p+1/(-3p)=1/f=1/0.15$，　$p=0.100\text{m}$

对于放大面镜，人们希望看虚像，不仅因为虚像是正像，而且因为放大的实像在人脸后面看不见.

35.33　一物体离焦距为 250mm 的凹面镜 375mm，求像距. 如果物体离镜再远 5mm，那么像怎样移动？

解　☞ 我们求这两种情况的像距，$1/375+1/q=1/250$；$q=750\text{mm}(p=375\text{mm})$. 另外，$p$ 如增加

5mm，有 $1/380+1/q=\frac{1}{250}$；$q=730.77$mm，因而 $\Delta q=-19.23$mm，也就是说像移动了 19.23mm.

35.34 长度为 L 的短火柴沿着焦距为 f 的凹面镜的光轴平放，火柴最远点离面镜顶点的距离为 p. 计算火柴像的长度 L'，求纵向放大率 L'/L. 证明当 $L \ll p-f$ 时，纵向放大率是横向放大率的平方.

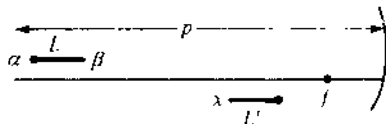


图 35-16

解 ☞ 我们用同题 35.33 相同的方法. 物体的两点分别位于 p 及 $p-L$ 处，对于 α 点：$1/p+1/q_1=1/f$；$q_1=(fp)/(p-f)$. 对于 β 点：$1/(p-L)+1/q_2=1/f$；$1/q_2=(p-L-f)/[(p-L)f]$，及 $q_2=[(p-L)f]/(p-L-f)$. 那么就有：$L'=q_2-q_1=Lf^2/[(p-f)^2-L(p-f)]$. 因为存在 $L \ll p-f$，我们可以得到 $L' \approx (Lf^2)/(p-f)^2$. 但，我们可以从上面公式得 $f/(p-f)=q_1/p$. 所以 $L' \approx (q_1^2/p^2)L$，这就是希望的结果.

35.35 一凸面镜的曲率半径 90cm. (a)那么距离面镜 70cm 的物体所成像在哪里？(b)放大率是多少？

解 ☞ (a)$f=R/2=(-90)/2=-45$cm，焦距对于凸面镜是负的. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$，$\frac{1}{70}+\frac{1}{q}=-\frac{1}{45}$，$q=-27.4$cm. 即像在面镜后 27.4cm，是虚的.

(b) $-q/p=27.4/70=0.39$(放大率)，像是正立的.

35.36 一凸面镜的焦距为 12cm. 如果 6cm 高的物体放置在离镜 24cm 处，那么像距是多少？

解 ☞ 利用面镜公式 $1/p+1/q=1/f$，f 是负的，

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{q}=\frac{1}{-12},\quad \frac{1}{q}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=-\frac{3}{24},\quad q=-8\text{cm}.$$

35.37 能使离凸面镜 12cm 远的物体所成的像是物体大小的 1/6，那么该凸面镜的焦距是多少？

解 ☞ 有 $|q/p|=\frac{1}{6}$. 既然物体经凸面镜所成的像总是虚的，有 $q=-p/6=-\frac{12}{6}=-2$cm，有

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{-2}=\frac{1}{f},\quad \frac{1}{12}-\frac{6}{12}=-\frac{5}{12}=\frac{1}{f},\quad f=-2.4\text{cm}$$

35.38 一物体放置在离焦距为 1.2ft 凸面镜 3ft 处. 求像距及像高与物高之比值.

解 ☞ 应用面镜公式有

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{q}=\frac{1}{-1.2},\quad q=-0.857\text{m},\quad \frac{h_i}{h_0}=\left|\frac{6/7}{3}\right|=0.286$$

35.39 一人眼睛离一球面镜中心 175mm，该球面镜用来装饰圣诞树. 该面镜的球直径为 100mm，求像的位置及线性放大率.

解 ☞ 设物距是到反射面的距离，$f=R/2$，有

$$p=175-50=125\text{mm},\text{及 } f=-25\text{mm},\text{有}\frac{1}{125}+\frac{1}{q}=\frac{1}{-25}$$

$$\frac{1}{q}=-\frac{5}{125}-\frac{1}{125},\quad q=-20.8\text{mm},\text{线性放大率}=\left|\frac{q}{p}\right|=0.167.$$

注意：由于面镜尺寸不符合镜像公式条件，且不是傍轴光线，所以所成的像是扭曲的.

35.40 28mm 高的物体离曲率半径 0.32m 的凸面镜 0.48m. 试确定像的位置及大小，是实像还是虚像？正立还是倒立？

解 ☞ 对于一凸面镜

$$f=\frac{r}{2}=\frac{-0.32}{2}=-0.16(\text{m}),\text{有}\frac{1}{0.48}+\frac{1}{q}=\frac{1}{-0.16},\ q=-0.12\text{m}$$

放大率为 $-q/p$，有 $h/28=120/480$；$h=7$mm

像是虚的、正立的.

35.41 一算命先生有一半径为 8in 的磨光的“魔”球，如果他的眼睛距球 10in，眼睛的像在哪里？要使像在球的后表面，他的眼睛应在哪里？

解 ☞ 球如同凸面镜，其焦距 $f=R/2=-\frac{8}{2}=-4(\text{in})$.因此，在第一种情况下，$p=10\text{in}$,

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{q}=\frac{1}{-4},\frac{1}{q}=-\frac{5}{20}-\frac{2}{20},q=-\frac{20}{7}=-2.857\text{in}$$

在第二种情况下，要求 $q=-16\text{in}$，则有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{-16}=\frac{1}{-4},\frac{1}{p}=\frac{1}{16}-\frac{4}{16}=\frac{-3}{16},p=-5.33\text{in}$$

这是不可能实现的.要使 $p>0$，q 必须为负且 $|q|<|f|$，因此不可能有一实物在镜后远于 $|f|$ 处成像.

35.42 证明通过凸面镜所成的像总比物体小.

证 ☞

$$f=-|f|,有\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=-\frac{1}{|f|}$$

因为 $p>0$，有 $q<0$，有

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{|q|}=\frac{-1}{|f|},因而\frac{1}{p}<\frac{1}{|q|},p>|q|$$

最后，放大率 $|q/p|<1$.

35.43 一物体放置在离焦距为 21cm 凹面镜 42cm 处.从凹面镜反射出来的光射到离凹面镜 21cm 远的平面镜上，最终的像在什么位置?

解 ☞ 对凹面镜利用镜像公式，有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\frac{1}{42}+\frac{1}{q}=\frac{1}{21},q=42\text{cm}$$

像距在凹面镜左边 42cm.再利用平面镜的公式，既然凹面镜所形成的像对于平面镜来说是物，(图 35-17)有 $f=\infty$，$p=21\text{cm}-42\text{cm}=-21\text{cm}$,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\frac{1}{-21}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\infty},q=21\text{cm}$$

最终像 I 的位置是在平面镜前 21cm 处.

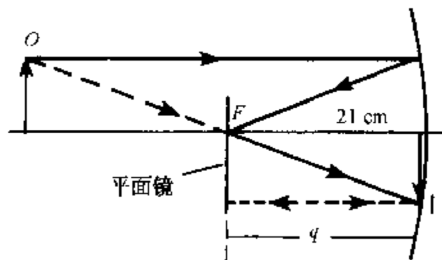


图 35-17

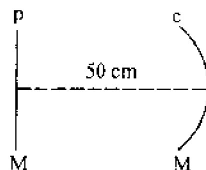


图 35-18

35.44 图 35-18 中一平面镜离焦距为 30cm 的凹面镜 50cm 远.试找到离平面镜右边 10cm 的一小灯泡在整个系统中形成实像的位置.

解 ☞ 设 PM 是平面镜，CM 是凹面镜.所有距离的单位都取 cm.

从 CM 中形成的像开始分析：$p=40$，有 $1/p+1/p'=\frac{1}{30}$，$p'=120$，该像对于 PM 来说是 $p=-70$ 的虚物；利用 $1/p+1/p'=0$(对于 PM)，可得到 $p'=70$.而这个像对于 CM 来说是个物距为负的物体，那 $p=-20$，于是有 $\frac{1}{20}+1/p'=\frac{1}{30}$，$p'=-12$，即在 PM 前 38cm.这像对于 PM 来说是 $p=38$ 的一个物体，可得 $p'=-38$.以此类推，总之，实像可在下列点被发现：38，4.5，16.7，10，……

35.45 两个相同的凹面镜 A 和 B 在同一主轴上面对面放置，它们的中心正好重合，小灯泡放在镜 A 的焦点上.试确定由该系统形成的几个实像的位置，以与 A 的距离写出答案.

解 ☞ 凹面镜之间相距 $4f$，对于 A，$p=f$，可得像在 ∞ 处，在 ∞ 远处的像对于 B 来说也是光源，成像在离 A $3f$ 处.分析过程同题 35.44 类同，可继续这样的分析，对于 A，$p=3f$，有 $1/3f+1/p'=$

$1/f, p=1.5f$.该像对于 B 来说是 $p=2.5f$,得 $p'=1.67f$(或距 $A2.33f$).由于对于 A,$p=2.33$,所以 $p'=(1.75f)$,等等.下面讨论 B,第一个像,因为 $p'=1.5f$(或距 $A2.5f$)时 $p=3f$,这同样给出(对 A,$p=2.5f$)一个像位于 $p'=(1.67f)$处,上面括号中的数是实像的位置.

35.2 薄透镜

35.46 描述透镜的下列性质:会聚,发散,主焦点,焦距,光焦度,屈光度,F 数.

解 ☞ 会聚透镜将平行光聚成一点.发散透镜将平行光发散.主焦点:透镜二侧各有一点,平行于主轴的光线经过(或看上去经过)透镜后会聚于该点(取决于光从哪边进入).焦距:透镜到任一焦点的距离.光焦度:以 m 为单位的透镜焦距的倒数.屈光度:透镜光焦度的单位(D),等于焦距为 1m 的透镜的光焦度.F 数:照像机透镜的焦距与镜头直径的比值.

35.47 描述单个透镜成像的不足.

解 ☞ 像场弯曲:由于放大率随距光轴的距离改变引起竖直线的像弯曲的现象.

球面像差:由于透镜上距光轴不同距离处的各部分具有不同的焦距引起的像差.

色像差:由于透镜对紫光的折射率大于红光的折射率,引起不同颜色的光的焦距不同产生的像差.

像散:由于物点的光线离光轴较远,不聚焦成点像而成为二条散焦线的现象.

35.48 描述一薄凸透镜所成的像.设物体在前焦点 F 之外.

解 ☞ 图 35-19.光线 a,b,c 从物体 P_1P_2 上的 P_1 点发出,分别与光轴平行,通过光心及经过焦点.折射光线 a' 通过后焦点 F',b' 与光轴平行,c' 顺着原 c 光线方向,导致三条折射光线会聚于 P_1',最终 P_1P_2 在右形成了象 $P_1'P_2'$.像是倒的.

则 $f=+20\text{cm}, d_0=+30\text{cm}, l_0=-6\text{cm}$,用题 35.1 及 35.2 的公式可得 $d_i=+60\text{cm}, l_i=-12\text{cm}$.所以最终像是倒立放大的实像.

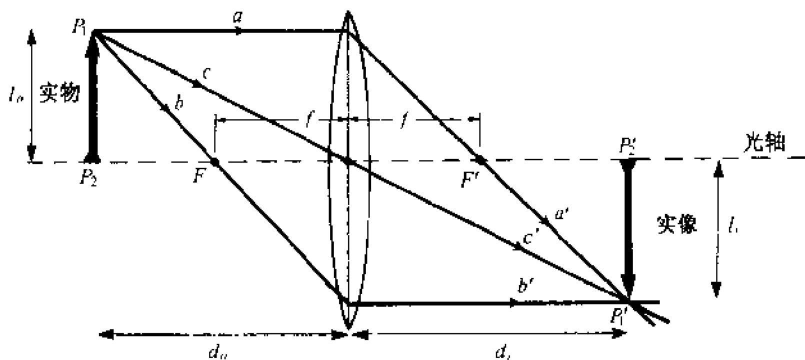


图 35-19

35.49 如果题 35.48 中物体在焦点 F 以内,情况则又如何?

解 ☞ 图 35-20 给出了光线示意图;看出像是正立、放大的虚像.设 $f=+15\text{cm}, d_0=+10\text{cm}$,

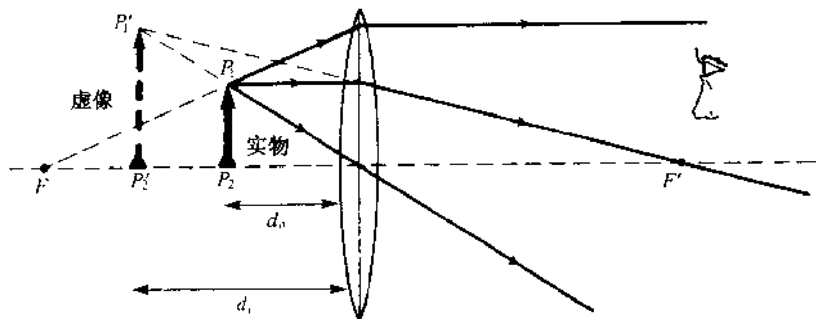


图 35-20

$l_0 = 2\text{cm}$,利用题 35.1 及 35.2 方程,可得 $d_i = -30\text{cm}$(虚像)及 $l_i = +6\text{cm}$(正立、放大).

35.50 描述物体在一薄凹透镜中所成的像.

解 ☞ 图 35-21 给出了光线示意图,d_0 和 f 是无关的.像是虚的,正立、缩小的.

用 $f = -30\text{cm}$, $d_0 > 0$, $l_0 = 10\text{cm}$ 来验证.

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} = -\frac{1}{30}, \quad d_i = -\frac{30d_0}{30 + d_0}(\text{虚}) \text{ 和 } \frac{30 - d_0}{30} = -\frac{10}{l_i}$$

$$l_i = \frac{10}{1 - (d_0/30)}(\text{正立、缩小})$$

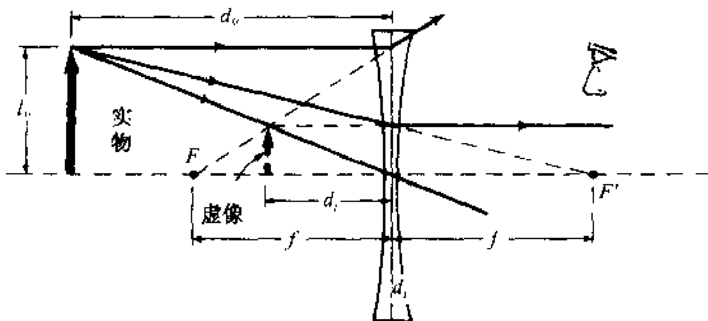


图 35-21

35.51 描述一虚物,通过凸透镜所成的像.

解 ☞ 图 35-22 中 L_2 是凸透镜,设 I_1 是由另一透镜所成的像,I_1 对于 L_2 来说是虚物.利用薄透镜公式,$d_0 < 0$(虚物),及 $f > 0$,有

$$-\frac{1}{|d_0|} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}, \quad d_i = \left(\frac{|d_0|}{|d_0| + f}\right)f$$

证明像是实像且在透镜的后焦点以内.而且

$$\frac{l_i}{l_0} = \frac{-d_i}{d_0}, \quad l_i = \left(\frac{f}{|d_0| + f}\right)l_0$$

像是正立缩小的,这些结论可在图中看出.

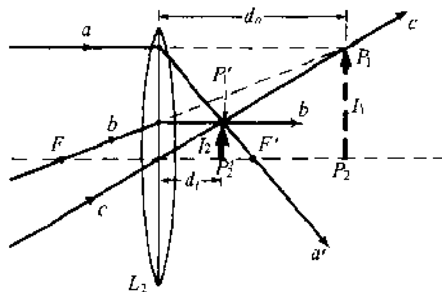


图 35-22

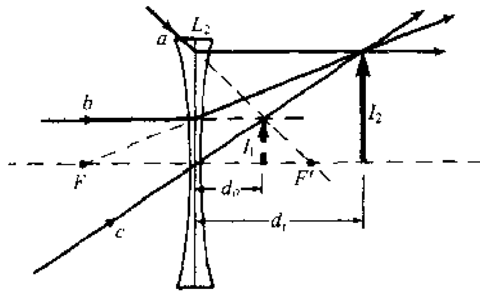


图 35-23

35.52 描述一位于凹透镜后焦点以内的虚物通过凹透镜所成的像.

解 ☞ 图 35-23 中 L_2 是凹透镜,设像 I_1 是由透镜 L_1 所形成,I_1 对于 L_2 来说是虚物,应用 $1/d_0 + 1/d_i = 1/f$, 且 $f < d_0 < 0$, 有

$$d_i = \frac{d_0 f}{d_0 - f} > 0 \quad (\text{实像})$$

利用 $l_i/l_0 = -d_i/d_0$, $l_i = -\dfrac{l_0 f}{d_0 - f} > 0$ (正立)

35.53 一凸透镜将太阳的像成在离透镜 20cm 处.该透镜的焦距是多少?如果物体距离透镜 100cm 远,那么像成在什么位置?是否是实像?正立?当物距为 25cm 和 10cm,重复

上述过程.

解 ☞ 设 p 和 p' 是物距和像距，有 $1/p+1/p'=1/f$，及 $h_i/h_0=(-p')/p$. 从题意可得 $f=20\text{cm}$，第 1 种情况：$\frac{1}{100}+1/p'=\frac{1}{20}$；$p'=25\text{cm}$；像是实的、倒立的. 第 2 种情况：$\frac{1}{25}+1/p'=\frac{1}{20}$；$p'=100\text{cm}$；像是实的，倒立的. 第 3 种情况：$\frac{1}{10}+1/p'=\frac{1}{20}$；$p'=-20\text{cm}$；像是虚的，正立的.

35.54 一物体距离 10cm 焦距的凸透镜 30cm 处. 求像的位置，是实是虚？正立还是倒立？重复物距是 5cm 的情况.

解 ☞ 过程同题 35.53. 第一种情况 $\frac{1}{30}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{10}$；$p'=15\text{cm}$；像是实的及倒立的；第二种情况：$\frac{1}{5}+1/p'=\frac{1}{10}$；$p'=-10\text{cm}$；像是虚的及正立的.

35.55 如果是凹透镜，重解题 35.54.

解 ☞ 在这个例子中，$f=-10\text{cm}$. 在两种情况的像均是虚的和正立的. 第 1 种情况：$\frac{1}{30}+1/p'=-\frac{1}{10}$，于是 $p'=-7.5\text{cm}$. 第 2 种情况：$\frac{1}{5}+1/p'=-\frac{1}{10}$，可得 $p'=-3.3\text{cm}$.

35.56 利用透镜方程，证明当凸透镜产生和物体大小相同的像时，物距和像距均为焦距的两倍.

解 ☞ 在本题中 $|p/q|=$ 物高/像高 $=1$. 对于方程 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$，有 $p=q$，$p=2f$. 从而 $q=p=2f$.

35.57 如果通过凸透镜所成的像是放大 3 倍的虚像，那么物体应放在离焦距为 f 的凸透镜什么位置？

解 ☞ 有 $3=h_i/h_0=-q/p$，其中 p 是正的，q 是负的，有

$$q=-3p,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\ \frac{1}{p}-\frac{1}{3p}=\frac{1}{f},\ p=\frac{2f}{3}$$

35.58 一凹透镜使离其 24cm 的物体所成的像是物体的 1/3. 试求透镜之焦距.

解 ☞ 既然像是物体的 1/3 且通过凹透镜所成的像是虚像，有

$$\frac{q}{p}=-\frac{1}{3}\ 及\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\ \frac{1}{24}+\frac{1}{-8}=\frac{1}{f},\ f=-12\text{cm}$$

35.59 一双凸透镜用来投影一幻灯片. 幻灯片高为 2in，离透镜 10in，像离透镜 90in. 问该透镜焦距是多少？

解 ☞ 被投影成的像是实的，有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\ \frac{1}{10}+\frac{1}{90}=\frac{1}{f},\ 有\ f=9\text{in}.$$

35.60 高为 6cm 的物体离双凸透镜 30cm 远，它的像离透镜 90cm，且和物体同侧. 问透镜的焦距是多少？

解 ☞ 像肯定是虚的，q 是负的. 有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\ \frac{1}{30}+\frac{1}{-90}=\frac{1}{f},\ f=45\text{cm}.$$

35.61 通过一焦距为 -30cm 的凹透镜所成的虚像像距是物距的一半. (a)物体应放置在何处？(b)放大倍数是多少？

解 ☞ 设 p，p' 是物距和像距；S，S' 是对应的高度. (a)对于一个实物，像是虚的. 若 $p'=-p/2$. 那么，$1/p-2/p=-\frac{1}{30}$，$p=30\text{cm}$. (b)$S'/S=-p'/p=0.50$，即像是正立的，且是物高的 $\frac{1}{2}$

35.62 如果一凹透镜所成的像是物体尺寸的一半，物体应放置在何处？

解 ☞ $q=-p/2$，既然像是虚的，物体是实的，由薄透镜公式给出 $1/p-2/p=-1/|f|$；

$p = |f|$

35.63 计算能使一灯所成像的直径是灯直径的 4 倍,并成在离灯 10m 的屏幕上.求凸透镜的位置和焦距.

解 由 $p+q=10$ 及 $q=4p$,有 $p=2$ 及 $q=8$.且

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}, f=+1.6\text{m}$$

35.64 焦距为 f 的透镜使一发光物体在屏幕上成放大 M 倍的像.证明透镜离屏幕的距离是 $f(M+1)$.

证 既然像能成在一屏幕上,像是实的,就有 $q>0$.我们有 $M=\left|\frac{q}{p}\right|=q\left(\frac{1}{p}\right)=q\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{q}\right)$ $=\frac{q}{f}-1$　$q=f(M+1)$

35.65 对于透镜和面镜均适用的镜像公式的另一形式是 $s_is_0=f^2$,其中 s_0 是物体到焦点之间的距离,s_i 是像到焦点之间的距离.(a)推导该公式,(b)在图中标出透镜和面镜的 s_0 和 s_i.

解 (a)设 p, p'分别是物距和像距,用薄透镜公式有 $p=s_0+f$ 及 $p'=s_i+f$;有 $1/f=1/(s_0+f)+1/(s_i+f)$,可化成 $1/f=[(s_i+f)+(s_0+f)]/[(s_0+f)(s_i+f)]$.对角相乘得,$f(s_i+s_0+2f)=(s_0+f)(s_i+f)$,化简推出 $s_is_0=f^2$.(b)见图 35-24.

注意 s_i 和 s_0 符号总是相同.对图示任一情形,若物距小于焦距,则 s_0 为负 $|s_0|<f$.因此,s_i 为负且 $|s_i|>f$,成虚像.对于发散透镜和凸面镜,可进行类似的讨论.

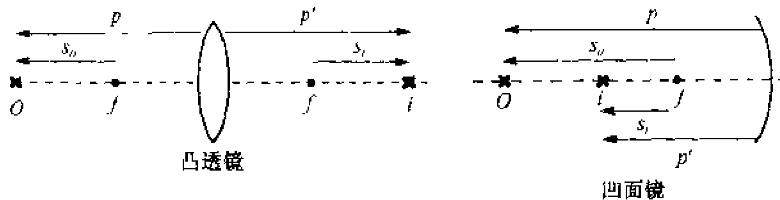


图 35-24

35.66 如果物体和屏幕相距距离 D,设凸透镜离物体 x.证明 $x=\frac{D}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4f}{D}}\right)$.什么情况下在屏幕上没有像?

证 有 $p+p'=D$　且 $x=p$.利有 $1/p+1/p'=1/f$ 有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}=\frac{1}{f}$,整理可得 $x(D-x)$ $=fD \Rightarrow x^2-Dx+fD=0$, $x=\frac{D}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4f}{D}}\right)$.对于 $f>D/4$,开根是虚的,故像不存在.

35.3 透镜磨制人公式;组合透镜系统

35.67 透镜磨制人公式是什么?

解 透镜的焦距依赖于透镜材料的折射率及透镜两个面的曲率半径.透镜磨制人公式可以计算焦距 f,如果折射率 n 和曲率半径 R_1 和 R_2 已知,那么 $1/f=(n-1)[(1/R_1)-(1/R_2)]$.如果透镜浸在折射率为 n'的物质中,那么公式变为 $1/f=(n/n'-1)[(1/R_1)-(1/R_2)]$.在所有情况中,我们利用题 34.58 的半径 R_1、R_2 的正负号习惯.因而对于一双凸透镜 $R_1>0$, $R_2<0$.

35.68 一业余透镜磨制人想将 $n=1.52$ 折射率的玻璃研磨成两面具有相同曲率及焦距为 25cm 的凸透镜,那么两面的曲率半径是多少呢?

解 用透镜磨制人公式

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),\text{有 } R_1=-R_2,$$

$R_1=26\text{cm}$,即为两面的曲率半径.

35.69 一透镜有半径 20cm 的凸面及半径 40cm 的凹面,该透镜的玻璃折射率为 1.54.计算透镜的焦距,试分析该透镜是会聚透镜还是发散透镜.

解 ☞ 先假设面 1 是凸面,面 2 是凹面.

$$有\quad \frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),利用\ R_1=20\text{cm},R_2=40\text{cm}$$

代入有 $f=74.1\text{cm}$.既然 $f>0$,说明该透镜是会聚的.

注意:若我们将透镜反放,则 $R_1=-40\text{cm},R_2=-20\text{cm}$,得到相同的结果

35.70 一束平行白光打在双凸面透镜上,该双凸面半径分别为 +32cm 及 +48cm.A(红光)和 H(紫光)在该玻璃中的折射率分别是 1.578 及 1.614.求红光及紫光在透镜外的焦点之间的距离.

解 ☞ 利用公式 $1/f=(n-1)\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{48}\right)$,$f=[19.2/(n-1)]\text{cm}$.因为 $f_A=19.2/0.578=33.22\text{cm}$;$f_H=19.2/0.614=31.27\text{cm}$;所以 $f_A-f_H=1.95\text{cm}$.

35.71 一凸、凹双面透镜分别有半径为 3cm 和 4cm 的凸面和凹面,材质是折射率为 1.6 的玻璃,试求(a)该透镜的焦距,(b)当物距为 28cm 时,通过该镜所成像的线性放大倍数.

解 ☞ (a)$1/f=(n-1)[(1/R_1)-(1/R_2)]=(1.6-1)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=0.05$ $f=20\text{cm}$.(b)利用 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$,$q=70\text{cm}$.所以线性放大倍数 $=|q/p|=2.5$.

35.72 焦距为 5cm 的对称透镜是由折射率 1.50 的玻璃做成的.问该透镜的两面的曲率半径是多少?

解 ☞ $R_1=-R_2=r$,于是 $1/f=(n-1)(2/r)$,$r=2(n-1)f=2(1.50-1)(5\text{cm})=5\text{cm}$.

35.73 一平凹透镜曲面半径为 12cm,焦距为 −22.2cm.计算该透镜材质的折射率.

解 ☞ $1/f=(n-1)[(1/R_1)-(1/R_2)]$,且 $R_1=-12\text{cm}$,$R_2=\infty$,$f=-22.2\text{cm}$.因而有 $(n-1)=R_1/f=12/22.2=0.54$,得 $n=1.54$.

35.74 一平凸透镜焦距为 30cm,折射率为 1.50.求凸面的曲率半径.

解 ☞ 利用公式,且 $R_1=\infty$.

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),\frac{1}{30}=(1.50-1)\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$R_2=-15\text{cm}$,负号表示凸面向右.

35.75 两个对称双凸透镜 A 和 B,有相同的焦距,但曲率半径不同,$R_A=0.9R_B$.如果 $n_A=1.63$,求 n_B.

解 ☞ 既然焦距是相同的,$(n_A-1)(2/R_A)=(n_B-1)(2/R_B)$.$(n_B-1)=(R_B/R_A)(n_A-1)=0.63/0.9=0.70$.$n_B=1.70$

35.76 想要做一个双凹面的透镜,透镜材料 $n=1.54$,两曲面曲率半径是相同的,那么半径是多少才能使透镜的焦距为 30cm?

解 ☞ 利用光学透镜公式且 $f=-30\text{cm}$,$R_1=-R$,$R_2=R$,及 $n=1.54$. 有 $-\frac{1}{30}=(1.54-1)[(-1/R)-(1/R)]$;$R=32.4\text{cm}$.

35.77 一双凸面透镜两面的半径分别为 18cm 及 20cm.当一物体离透镜距离为 24cm,像距为 32cm.试求(a)透镜的焦距,(b)透镜材料的折射率.

解 ☞ (a)$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{7}{96}$,$f=\frac{96}{7}=+13.7\text{cm}$

(b)$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$,$\frac{1}{13.7}=(n-1)\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{20}\right)$ $n=1.69$,其中 r_2 是负的.

35.78 双凸玻璃透镜每面的曲率半径是 8cm.计算它在空气中和水中的焦距.玻璃折射率

1.50,水的折射率1.33.

解 ☞ 利用组合透镜的公式(题35.67),且 $n=1.50$,空气的折射率为 $n'=1.0$,水的折射率为1.33.对于空气,有 $1/f=[(n/n')-1][(1/R_1)-(1/R_2)]=[(1.50-1.00)-1]\left(\frac{2}{8}\right)=0.125$. $f=8.0$cm.对于水,$1/f=[(1.50/1.33)-1]\left(\frac{1}{4}\right)=0.128/2=0.0320$. $f=31.3$cm.

35.79 一玻璃透镜($n=1.50$)在空气中焦距为10cm.计算它在水中($n=1.33$)的焦距.

解 ☞ 对于空气和水

$$\frac{1}{f_A}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),\text{且 } n_1=1.50 \text{ 及 } n_2=1.0 \text{ 或 } 1.33$$

对于空气:
$$\frac{1}{10}=(1.50-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

对于水:
$$\frac{1}{f_w}=\left(\frac{1.50}{1.33}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

两方程联立,$f_w=5/0.128=39$(cm).

35.80 一双凸透镜两面的曲率半径都是20cm.玻璃的折射率是1.50.计算下列情况的透镜焦距.(a)在空气中,(b)浸在 $n=1.63$ 的 CS_2 溶液中.

解 ☞ 利用 $\frac{1}{f}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$,且 $n_1=1.50$ 及 $n_2=1.0$ 或 1.63

(a)
$$\frac{1}{f}=(1.50-1)\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right),f=+20\text{cm}$$

(b)
$$\frac{1}{f}=\left(\frac{1.50}{1.63}-1\right)\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right),f=-125\text{cm}$$

在这里,焦距是负的,说明透镜是发散的,尽管它是双面凸透镜!这是因为它周围的介质有较它更大的折射率,从而在分界面上改变了光线的聚焦或发散.



图 35-25

35.81 某种透镜形状如图35-25.它的两面之半径分别是80和120cm.该材质的 $n=1.64$.问当把该透镜浸在 $n=1.45$ 的油中,它的焦距是多少?

解 ☞ 利用 $1/f=[(n_1/n_2)-1][(1/R_1)-(1/R_2)]$,其中 $R_1=-120$cm, $R_2=-80$cm, $n_2=1.45$ 及 $n_1=1.64$.代入,可得 $f=18.3$m.由于两面的半径已给出,所以它是中间较两边厚的透镜.

35.82 高6cm的物体离焦距为8cm的薄凸透镜40cm远.第二个焦距为12cm的凸透镜离第一个透镜20cm远.见图35-26.求最后成像的位置、大小及性质.

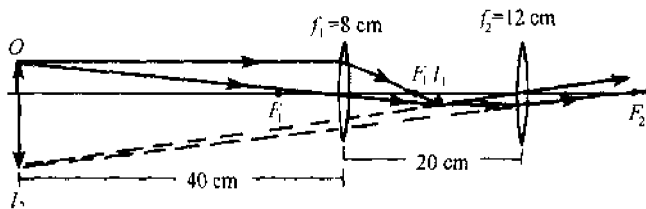


图 35-26

解 ☞ 利用薄透镜公式,对于 $f_1=8$cm 的透镜,$f_2=12$cm 的透镜分别有

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1},\frac{1}{40}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{8},\frac{1}{q_1}=\frac{5}{40}-\frac{1}{40}=\frac{4}{40}$$

$$q_1=10\text{cm},20-q_1=10\text{cm}=p_2$$

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2},\frac{1}{10}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{12},\frac{1}{q_2}=\frac{5}{60}-\frac{6}{60}=-\frac{1}{60},q_2=-60\text{cm}$$

即最后的像在第2个透镜左边60cm;它是倒立的虚像.它的尺寸由放大率公式可得

$$6\text{cm}\left|\frac{q_1}{p_1}\right|\left|\frac{q_2}{p_2}\right| = 6\left(\frac{10}{40}\right)\left(\frac{60}{10}\right) = 9\text{cm}(\text{像高})$$

35.83 一物体在焦距为 -15cm 的发散透镜前 60cm 处，在该透镜后 10cm 有一焦距为 20cm 的会聚透镜. 求最终的像的位置，及总的放大率.

解 ☞ 我们两次应用透镜公式：

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}, \frac{1}{60}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{-15}, q_1=-12\text{cm}$$

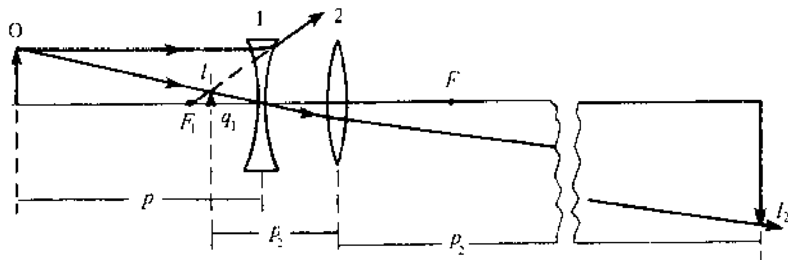


图 35-27

I_1 对透镜 2 是物，所以，有 $p_2=12+10=22$(cm)(图 35-27)

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2}, \frac{1}{22}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{20}, \frac{1}{q_2}=\frac{1}{20}-\frac{1}{22}=\frac{1}{220}$$

$$q_2=220\text{cm}, \text{在透镜 2 的右边}$$

像放大率：透镜 $1=-q_1/p_1=\frac{1}{5}$， 透镜 2 像的放大率 $=-q_2/p_2= 220/22=-10$.

总的放大率 $=(q_1/p_1)(q_2/p_2)=-1/5(10)=-2$. 即最终成像是倒立的，且是物体大小的2 倍.

35.84 焦距是 12cm 的凸透镜同一平面镜紧贴在一起. 如果一物体离透镜 20cm 远，问最终的像成在何处？

解 ☞ 见图 35-28. 因为有平面镜，光线穿过透镜两次. 第一次，有 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f}, \frac{1}{20}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{12}, q_1=30\text{cm}$. 凸镜成的像 I_1 在平面镜后 30cm 处(如平面镜移走的话). 经过平面镜反射后，I_1 的像位置在 I_2，即在透镜前 30cm. 既然光线到了左边，I_2 对于透镜来说是个虚物，p_2 是负的. 再用一次透镜公式，

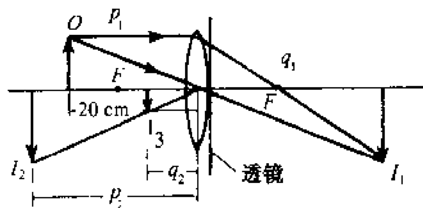


图 35-28

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f}, \frac{1}{-30}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{12}, q_2=8.6\text{cm}(\text{在透镜左边})$$

35.85 一物体在焦距为 5cm 的透镜前 12cm 处. 另外一个焦距为 3cm 的透镜在第一个透镜后 2cm. 利用光线确定由两透镜系统所成像的位置.(提示：首先找出只有前面一个透镜

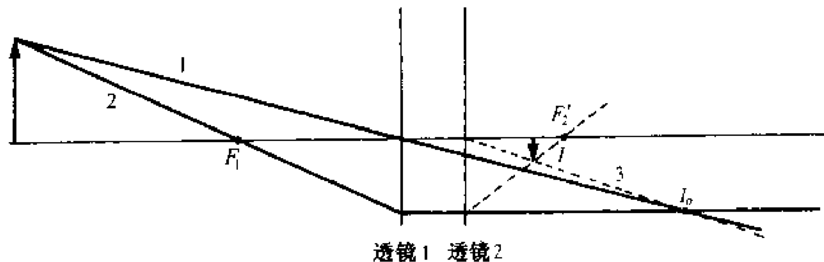


图 35-29

时所成的像,然后利用它找出另一个透镜所成的像)

解 ☞ 图 35-29 的比例是 5mm:1cm,光线 1 和光线 2 通过第一个透镜所成像 I_0 如图.对于所示第 2 个透镜,光线 2 通过 F_2'.光线 3 通过第二透镜的中心,也肯定通过 I.交叉点 I 位于由两透镜形成的像处.即位于 11mm 处⇒或第二透镜后 2.2cm 处.

35.86 图 35-30 显示了两薄透镜的组合(组合透镜).一物体位于 L_1 前面.(a)用物距 d_0 和系统参数来表示像距 d_i.(b)证明当 $s\to 0$,整个系统等效为焦距为 f 的薄透镜,其中 $1/f=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$.

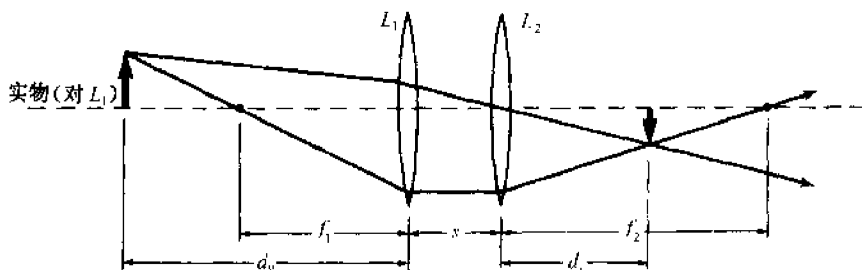


图 35-30

解 ☞ (a)先确定从 L_1 中成的像的位置.

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f_1}, x=\frac{f_1 d_0}{d_0-f_1}$$

该像对于 L_2 来说是虚物体.

$$\frac{1}{s-x}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f_2}$$

$$d_i=\frac{f_2(s-x)}{s-x-f_2}=f_2\frac{s-[f_1d_0/(d_0-f_1)]}{s-[f_1d_0/(d_0-f_1)]-f_2} \tag{1}$$

(b)当 $s\to 0$ 时(1)变成

$$d_i=\frac{f_2f_1d_0(d_0-f_1)}{[f_1d_0/(d_0-f_1)]+f_2}$$

$$\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d_0},\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$$

35.87 焦距均为 +6in 的两透镜紧贴在一起,求整个系统的焦距.

解 ☞ 题 35.86(b),我们已得出有效焦距,由下式给出,$1/f=1/f_1+1/f_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,$f=3\text{in}$.

35.88 一个透镜的光焦度是什么,为什么说它是一个有用的概念?

解 ☞ 一透镜焦距的倒数,可被认为是透镜的光焦度,$p=(1/f)m^{-1}$.题 35.86(b)证明了对于放置一起的薄透镜,光焦度的概念是必需的.

35.89 两个透镜光焦度分别是 5D 和 7D,放置在一起,求整个系统的焦距.

解 ☞ $$P=P_1+P_2=5+7=12D, f=1/P=\frac{1}{12}=0.083\text{m}=8.3\text{cm}$$

35.90 两个放置在一起的焦距分别为 20cm 和 −50cm 的透镜,它们的光焦度是多少?

解 ☞ $$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{20}+\frac{1}{-50}=\frac{5}{100}-\frac{2}{100}=\frac{3}{100}$$

$$f=33.3\text{cm}=0.333\text{m}, P=\frac{1}{f}=\frac{1}{0.333}=3D$$

35.91 两个薄透镜,焦距分别为 −12cm 和 −30cm.放置在一起.计算该组合透镜的焦距和光焦度.

解 ☞ $$1/f=1/f_1+1/f_2=-\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=-0.1167\text{cm}^{-1}.$$

有 $f = -8.57\text{cm}; P = -11.67D$

35.4 光学仪器:投影仪;照相机和眼睛

35.92 一幻灯投影仪的投影透镜的焦距为 20cm. 如果幻灯片离透镜 25cm, 要得到一清晰的像,透镜到屏幕的距离应该是多少?

解 ☞ 从透镜成像公式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\frac{1}{25}+\frac{1}{q}=\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{q}=\frac{5}{100}-\frac{4}{100}=\frac{1}{100},q=100\text{cm}=1\text{m}.$$

35.93 一幻灯投影仪的透镜,它的焦距是 15cm. 如果幻灯片尺寸是 5cm×5cm, 要得到 1m×1m 的像,那么屏幕应距透镜多远?

解 ☞ 线性放大率是 $m=\frac{100}{5}=20=|q/p|$. 既然物体和像都是实的, p 和 q 应该是正的,于是 $q=20p$. 且有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$, 变成 $20/q+1/q=1/15; 21/q=\frac{1}{15}, q=315\text{cm}$.

35.94 一幻灯投影仪使一 35mm 宽的幻灯片通过离屏幕 6m 远的透镜成 0.75m 宽的像. (a) 透镜的焦距是多少? (b)要得到 1.0m 宽的像,屏幕应该离透镜多远?

解 ☞ 对于一典型幻灯投影仪的物距,有 $s \ll s'$, s' 为像距. 有 $1/s' \ll 1/s$ 及 $1/s \approx 1/f$, 或 $s \approx f$. (a)放大倍数由 $s'/s=m=(0.75\times10^3\text{mm})/35\text{mm}=21.4$ 给出, 又因为 $s=s'/m$, 我们能近似 $f=s'/m=600\text{cm}/21.4=28\text{cm}$. (b) $m=1000\text{mm}/35\text{mm}=28.6$(在新情况中), 于是现在像距 $s'=mf=(28.6)(28\text{cm})=800\text{cm}=8.0\text{m}$.

35.95 一小孔照相机,它的胶片高为 75mm, 用它来拍摄一高为 10m 的树. 胶片离小孔距离 150mm. 要拍到树的全部,照相机应该离树多远?

解 ☞ 小孔照相机没有透镜,仅有一小孔. 物体上任意一点的一条光线通过小孔后在胶片上只能形成一像点. (见图 35-31). 用相似三角形知识, $\frac{75}{150}=10/d, d=20\text{m}$.

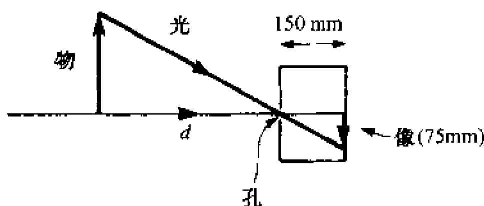


图 35-31

35.96 定义透镜的 F 数.

解 ☞

$$F\text{ 数}=\frac{\text{焦距}}{\text{光圈的直径}}$$

因而,对于一个可变光圈的照相机, F 越小,在给定时间进入的光越多,该透镜就越"快".

35.97 照相机透镜设置成 F-1.8 和设置成 F-11 所成的像的亮度之比是多少?

解 ☞ 对于一个给定焦距 f 的透镜,光圈的直径与 F 数的关系是 $d=f/F$, 于是光圈的面积

$$A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi f^2}{4F^2}$$

亮度与 A 成比例的,因此两个 F 值的亮度的值为 $\frac{A}{A'}=\frac{F'^2}{F^2}=\frac{11^2}{1.8^2}=37.3$.

35.98 一照相机安装了折叠部分,这样可以使像距从 7 到 12cm 之间变化. (a)假如透镜焦距为 50mm, 那么能成像的最近和最远的物距是多少? (b)上述两个物距所对应的像的放大率是多少?

解 ☞ 设 s 和 s' 分别代表物距和像距. (a)当 s' 最大时,物距 s 最小,有

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{5.0\text{cm}}-\frac{1}{12\text{cm}}=\frac{7}{60\text{cm}}, s=8.57\text{cm}$$

当 s' 最小时,物距 s 最大,有

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{5.0\text{cm}}-\frac{1}{7\text{cm}}=\frac{2}{35\text{cm}}, s=17.5\text{cm}$$

(b)在物距最小时：　$m=\frac{s'}{s}=\frac{12\text{cm}}{8.57\text{cm}}=1.4.$

在物距最大时：　$m=\frac{s'}{s}=\frac{7\text{cm}}{17.5\text{cm}}=0.4.$

35.99　一透镜焦距为125mm的远距照相机拍摄了一位5m外高为1.8m女士的照片.(a)像距s'是多少才能得到一清晰照片？(b)像的放大率是多少？(c)女士在底片上的像的尺寸是多少？

解　☞ (a)　$\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}=\frac{1}{125\text{mm}}-\frac{1}{5000\text{mm}}=\frac{39}{5000\text{mm}}, s'=128\text{mm}.$

(b)　$m=\frac{s'}{s}\approx\frac{f}{s}=\frac{125\text{mm}}{5000\text{mm}}=0.025$

(c)　$h'=mh=(0.025)(1800\text{mm})=45\text{mm}$

35.100　F数为什么很有用？

解　☞ 在题35.99中,当物距s远大于像距s'时,有$s'\approx f$,像高$h'=(s'/s)h\approx f(h/s)$,其中h是物高.那么对于一固定物体来说,像高是与f成比例的.进入透镜的光线数量是与透镜的面积成比例的,因此与直径D的平方成比例.每单位面积上的光能$\propto D^2/s'^2$或$\propto D^2/f^2$.既然F数是由f/D定义的,当F数平方改变时,在底片上的光强也改变.也就是说较小的F数意味着底片上更大的光强.

35.101　一折射率为1.62的对称凸透镜,其每面的曲率半径为20cm,该透镜的焦距为多少？

解　☞ 从$1/f=(n-1)(2/r)$,有

$$f=\frac{r}{2(n-1)}=\frac{20\text{cm}}{2(1.62-1)}=16.1\text{cm}$$

35.102　证明一对称透镜的最小F数为$\frac{1}{4}(n-1)$.

解　☞ 我们用题35.101中的焦距表达式.曲率半径为r的透镜,其宽度的最大值为直径,$d=2r$(此时透镜是一个球,这实际上是很差的形状).那么最小F数(最大的孔径)为$F=\frac{f}{d}=\frac{r/[2(n-1)]}{2r}=\frac{1}{4(n-1)}$.

35.103　一焦距为500mm的透镜放置在焦距为50mm的照相透镜之前.(a)那么组合透镜的焦距是多少？(假设两透镜之间没有距离.)(b)如果像距能从50.0mm变化到52.2mm,那么照相机能成清晰的像所对应最近和最远的物距是多少？

解　☞　(a)$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{500}+\frac{1}{50}, f=45.45\text{mm}.$

(b)最近的物距为　$\frac{1}{s}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{45.45}-\frac{1}{52.2}, s=0.351\text{m}.$

最远的物距为　$\frac{1}{s}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s'}=\frac{1}{45.45}-\frac{1}{50.0}, s=0.499\text{m}.$

35.104　一组合透镜由一折射率$n=1.65$的对称凸透镜和一折射率$n=1.52$对称凹透镜组成,而两透镜的曲率半径均为10cm,那么该组合透镜的焦距是多少？

解　☞ 从题35.101,我们可得

$$f_1=\frac{r_1}{2(n_1-1)}=\frac{10\text{cm}}{2(0.65)}=7.69\text{cm}$$

$$f_2=\frac{r_2}{2(n_2-1)}=\frac{-10\text{cm}}{2(0.52)}=-9.62\text{cm}$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{7.69\text{cm}}-\frac{1}{9.62\text{cm}}=0.0261\text{cm}^{-1}, f=38.3\text{cm}$$

35.105　一焦距为+20cm的无色散透镜组是由冕牌玻璃和火石玻璃透镜组成的.如果两玻璃透镜的色散率(δ_1,δ_2)分别是0.0518和0.0324,那么两玻璃透镜的焦距(f_1和f_2)

分别是多少?(提示:无色散意味着$(\delta_1/f_1)+(\delta_2/f_2)=0$.)

解 ☞ $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$, $\frac{1}{20}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$加上条件$\delta_1/f_1+\delta_2/f_2=0$

$0.0518/f_1+0.0324/f_2=0$, $f_2=-2.04f_1$ 代入第一方程,可得$\frac{1}{20}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{2.04f_1}=\frac{1.04}{2.04f_1}$, $f_1=10.2\text{cm}$(冕牌玻璃), $f_2=-20.8\text{cm}$(火石玻璃).

35.106 简要描述眼睛的组成:角膜、虹膜、视网膜,柱细胞和椎细胞,视网神经.视紫素.

解 ☞ 角膜是眼球前面弯曲的透明部分.虹膜是控制瞳孔大小的眼睛里有颜色的部分.视网膜是眼球后对光线敏感的表面部分,上面有光敏感细胞柱细胞和椎细胞.视神经将信号从视网膜传到大脑.视神经所在视网膜上的区域是盲点.视紫素是柱细胞中的光敏感色素.

35.107 解释:远视,近视,远点,近点.

解 ☞ 远视,是由于眼球前后距离太短引起的眼睛缺陷.眼睛能清楚地看到远处的物体.凸透镜能纠正这种缺陷.

近视,是由于眼球前后距离太长引起的眼睛缺陷.眼睛能清楚地看到近处的物体.凹透镜能纠正这种缺陷.

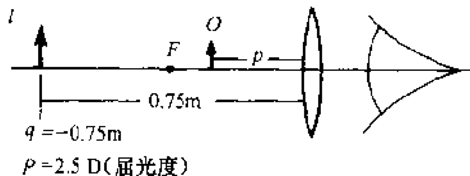


图 35-32

远点,眼睛能看清的最远距离.对于正常眼睛,距离是无穷远.

近点,眼睛能看清的最近距离.对于一正常眼睛,近点距离是25cm.

35.108 一位远视者不戴眼镜能看清大于75cm远的地方,如戴了光焦度是$2.5D$的眼镜,那么他新的近点是多少?

解 ☞ 该透镜具有使物体有新的近点的效果.使得对于眼睛来说,物体象在75cm处,于是眼睛能看清楚物体了.图35-32.焦距是$f=1/P$, $f=1/2.5=0.4\text{m}$.从$1/p+1/q=1/f$, $1/p+1/(-0.75)=1/0.4$; $1/p=2.5+1.33=3.83$, $p=0.26\text{m}$(近点).

35.109 一位远视的人看不清面前的物体,除非物体离眼睛远于36in.如果要使他离物体9in处就能看清物体,那么他戴的眼镜的焦距是多少?

解 ☞ 如题35.108,虚像位置在36in处.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f},\ \frac{1}{9}+\frac{1}{-36}=\frac{1}{f},\ f=12\text{in}$$

35.110 一近视的人不能看清2m外的物体.要使他能看清很远的物体,他所用眼镜的焦距约是多少?

解 ☞ 这里的纠正透镜必须将很远的物体成像在离他2m处,而且像是虚的.物距在无穷远处.有$1/p+1/q=1/f$,有$1/\infty+1/(-2)=1/f$, $f=-2\text{cm}=-200\text{cm}$,是个发散透镜.

35.111 一位戴光焦度$P=3D$眼镜的人必须将报纸放在离他25cm处才能看清上面的印刷文字.如果他拿掉眼镜,为了看清报纸他必须将报纸放置多远?

解 ☞ 被眼镜所成的虚像在裸眼的近点处,图35-32,有$1/p+1/q=1/f$, $p=25\text{cm}$, $f=1/P=\frac{1}{3}\text{m}=33.3\text{cm}$.有$1/25+1/q=1/33.3$, $q=-100\text{cm}$.即如没戴眼镜,他必须将报纸放置1m远.

35.112 定义一透镜的角放大率和放大率,并证明后者由$M=1+(25\text{cm})/f$给出,f用cm作单位.

解 ☞ 如果用裸眼看物体,物体对于眼睛的最大张角,当感觉比较清晰时,是在近点即离眼约25cm时的张角;当通过光学器件看物体时,可以使得像对眼睛的张角更大.该角度与物在眼近点处角度之比,叫做角放大率.当物体通过一会聚透镜在观察时,若放置在焦距内,可以看到一个正立的虚像,通过调整物体的位置,像的位置可以从透镜处一直到无穷远处变化.当像在近点时,像的张角最大.此时有最大的角放大率,或者叫放大率.为了计算,对于物距和像距,用s和s'表示,

$1/s+1/s'=1/f$,其中 $s'=-25\text{cm}$;有 $1/s=\frac{1}{25}+1/f$.在透镜处的张角 α' 服从 $|h'/s'|=\tan\alpha'$.或者,$h/s=\tan\alpha'$.其中 h 和 h' 是物高和像高.对于小角度 $\tan\alpha'\approx\alpha'$ 及 $\alpha'=h/s$.对于裸眼的近点,$\alpha=h/(25\text{cm})$,有 $\alpha'/\alpha=25/s$.利用透镜成像公式,得到 $\alpha'/\alpha=1+25/f$,此即放大率.

35.113 (a)具有光焦度是 $25D$ 的透镜的放大率是多少?(b)物体距离透镜多远才能有这样的放大率?

解 ☞ 利用题35.112的结果.(a)透镜的焦距为

$$f=\frac{1}{25D}=0.04\text{m}=4\text{cm}$$

所以该透镜的放大率是 $M=1+\frac{25\text{cm}}{f}=1+\frac{25\text{cm}}{4\text{cm}}=7.25$.

(b)虚像像距 $|s'|$ 是透镜之前 25cm,物距 s 是

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{|s'|}+\frac{1}{f}=\frac{1}{25\text{cm}}+\frac{1}{4\text{cm}}=\frac{29}{100\text{cm}},\ s=3.45\text{cm}$$

35.114 (a)一位近点是 90cm 的人需要配带焦距是多少的阅读用眼镜?(b)如果这人带 $2.0D$ 的眼镜,那他必须将书放置在何处?

解 ☞ (a)当物距是 25cm,虚像的位置会是 $|s'|=90\text{cm}$,于是透镜的焦距必须是

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{25\text{cm}}-\frac{1}{90\text{cm}}=\frac{13}{450\text{cm}},\ f=34.6\text{cm}$$

(b)当焦距是 $f=\frac{1}{2}=0.5\text{m}=50\text{cm}$ 时

虚像仍在 $s'=90\text{cm}$,如果物距是 $\frac{1}{s}=\frac{1}{|s'|}+\frac{1}{f}=\frac{1}{90\text{cm}}+\frac{1}{50\text{cm}}=\frac{14}{450\text{cm}}$,$s=32.1\text{cm}$.

35.115 (a)一位远点是 5cm 的人所戴眼镜的光焦度是多少?(b)确定眼镜前 2m 的物体所对应的虚像的位置.

解 ☞ (a)当物距是无穷远,虚像应当成在远点上,于是 $s=\infty$ 及 $s'=-5\text{m}$,透镜的光焦度是

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=-0.2D$$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{s'}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{f}=\frac{-1}{2\text{m}}+\frac{1}{-5\text{m}}=\frac{-7}{10\text{m}},\ s'=-1.43\text{m}$$

35.116 (a)在一块光焦度为 $2.0D$ 的透镜前放置一块光焦度为 $0.5D$ 的透镜,这样的系统的光焦度是多少?(b)该组合透镜的焦距是多少?

解 ☞ (a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=0.5+2.0=2.5(\text{D})$,(b) $f=\frac{1}{2.5}=0.4\text{m}=40\text{cm}$

35.117 一位 40 岁的妇女需要 $2D$ 的透镜构成的眼镜,这样使她能阅读 25cm 远处的书本.当她 45 岁时,她发现戴同样眼镜须将书本离她眼睛 40cm 远.那么她 45 岁时,要使书本离眼睛 25cm 能被她看清,她应该戴多大屈光度的眼镜?

解 ☞ 戴有 $f=\frac{1}{2}\text{m}$ 的眼镜,书本在 40cm 处,像是在

$$\frac{1}{s'}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{f}=\frac{-1}{40}+\frac{1}{50}=\frac{-10}{2000}\quad s'=-200\text{cm}.$$

为了当 $s=25\text{cm}$ 时像距保持不变,该透镜须具有

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{25}-\frac{1}{200}=\frac{7}{200},\ f=28.57\text{cm}$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{0.2857\text{m}}=3.5D$$

35.118 试确定图 35-33 中,当物体在眼睛主平面前 10cm 时,确定眼睛所成像的位置.

解 ☞ 再次强调眼睛不能象薄透镜那样处理.因为眼睛玻璃体液的折射率不等于1.这儿有两个不同的焦距,我们必须用主平面和节点来处理成像问题.图 35-33 所示,光线1平行于主光轴,在主平面处折射,经过后焦点.光线2,通过前焦点,折射后平行于主光轴.光线3通过节点.故像点位于这些光线的焦点上,约在后焦点 F' 后 0.5cm 处.

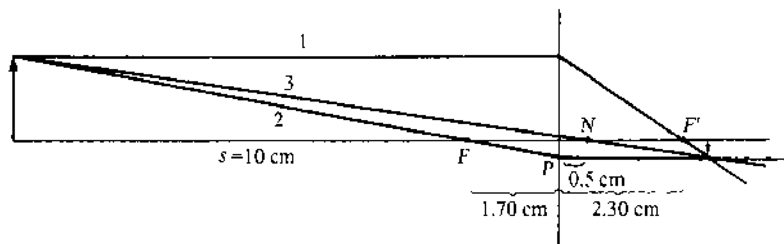


图 35-33

35.119 50m 远处 20m 高的一建筑在视网膜上成像的尺寸是多少?

解 ☞ 因为通过节点的光线是不改变方向的,而节点在正常眼睛中离视网膜距离是 1.70cm.我们有线性放大率 $m=\frac{1.70\text{cm}}{s}=\frac{1.70\text{cm}}{5000\text{cm}}=3.4\times10^{-4}$.像高

$$h'=mh=(3.4\times10^{-4})(20\text{m})=6.8\times10^{-3}\text{m}=6.8\text{mm}$$

35.120 如果一棵高为 25m 的树在视网膜的像高 1.0cm,那么该树有多远?

解 ☞ 过程同题 35.119

$$m=\frac{h'}{h}=\frac{1.0\text{cm}}{2500\text{cm}}=4\times10^{-4},$$

$$s=\frac{1.70\text{cm}}{m}=\frac{1.70\text{cm}}{4\times10^{-4}}=4250\text{cm}=42.5\text{m}$$

35.121 证明对于眼睛,物距和像距之间的关系是 $1/\bar{s}+1/\bar{s}'=1$,其中 $\bar{s}=s/f$ 及 $\bar{s}'=s'/f'$.这里 f 和 f' 分别是前焦距和后焦距,s 和 s' 分别是到主平面的物距和像距.

证 ☞ 情况如图 35-34,有两个焦点 F 和 F',主平面 BC.从相似三角形 ABC 和 FPC,有

$$\frac{s}{d}=\frac{f}{d-h},\quad \frac{f}{s}=\frac{d-h}{d}=1-\frac{h}{d}$$

从相似三角形 $A'BC$ 和 $F'PB$,有

$$\frac{s'}{d}=\frac{f'}{h},\quad \frac{f'}{s'}=\frac{h}{d}$$

将这些方程相加,有

$$\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1,\quad \frac{1}{\bar{s}}+\frac{1}{\bar{s}'}=1$$

其中 $\bar{s}=s/f$ 及 $\bar{s}'=s'/f'$

图 35-34

35.122 一眼睛前焦点离主平面 3cm 处,后焦点离主平面 4cm 处.试确定节点的位置.(提示:主光线必在像点处与通过焦点的光线相交.)

解 ☞ 画出图 35-35,先用光线 1 和 2 确定物体的像点 A'.从 A 到 A' 的主光线与主光轴交于 N 点,可以发现 N 点在主平面后 1cm.

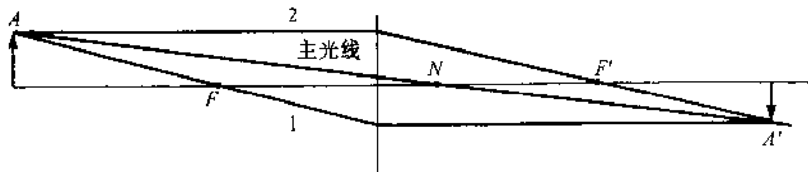


图 35-35

35.123 眼睛前后焦距 f'/f 之值通常为 1.35,当眼睛专注一离主平面 25cm 的物体时,试确定眼睛焦点的位置.假设主平面在视网膜前 2.3cm.(见题 35.121 和 35.122.)

解 ☞ 为了使像成在视网膜处，像距 $s'=2.3\text{cm}$，有

$$s=25\text{cm},\quad s'=2.3\text{cm},\quad f'=1.35Af$$

$$\bar{s}=\frac{s}{f}=\frac{25\text{cm}}{f},\quad \bar{s}'=\frac{s'}{f'}=\frac{2.3\text{cm}}{1.35f}=\frac{1.70\text{cm}}{f}$$

从题 35.121 方程(1)，我们可得

$$1=\frac{1}{\bar{s}}+\frac{1}{\bar{s}'}=\frac{f}{25\text{cm}}+\frac{f}{1.70\text{cm}}=f\frac{26.70\text{cm}}{42.5\text{cm}^2},\quad f=1.59\text{cm}$$

$$f'=1.35f=(1.35)(1.59\text{cm})=2.15\text{cm}$$

35.124　参见题 35.123，求节点的位置.

解 ☞ 设 n 是主平面到节点的距离. 考察图 35-36，它是根据图 35-36 画出的. 从相似三角形 ABN 和 $A'B'N$，有

$$\frac{h'}{s'-n}=\frac{h}{s+n},\quad \frac{h'}{h}=\frac{s'-n}{s+n}$$

从相似三角形 ABF 和 CPF，有

$$\frac{h}{s-f}=\frac{h'}{f},\quad \frac{h'}{h}=\frac{f}{s-f}$$

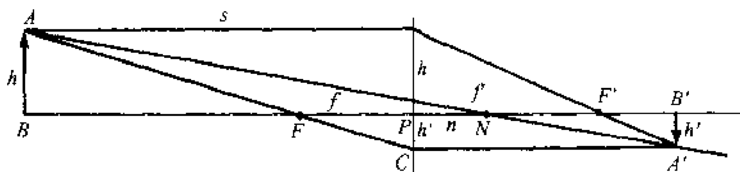


图 35-36

合并上述表达式，有

$$\frac{s'-n}{s+n}=\frac{f}{s-f},(s'-n)(s-f)=f(s+n),s's-ns-s'f+nf=fs+nf$$

$$n=-f+s'-\frac{fs'}{s}=-f+s'\left(1-\frac{1}{\bar{s}}\right)$$

而从题 35.121 的方程(1)，有

$$1-\frac{1}{\bar{s}}=\frac{1}{\bar{s}'}=\frac{f'}{s'},n=-f+s'\left(\frac{f'}{s'}\right)=f'-f$$

对于我们这个例子(题 35.123)，$n=2.15\text{cm}-1.59\text{cm}=0.56\text{cm}$.

35.5　光学仪器：显微镜和望远镜

35.125　描述一简单和一复杂的显微镜.

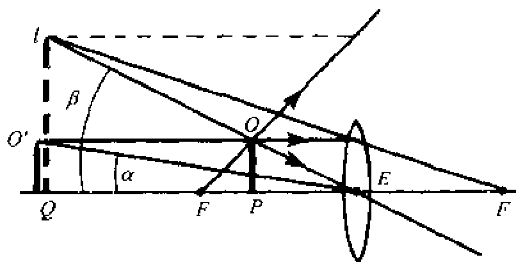


图 35-37

解 ☞ 一显微镜是一块透镜，或由一组透镜组成，作用是得到一小物体放大的像，如图 35-37 所示. 物体 OP 在主焦点以内，于是放大的、正立的，虚像 IQ 形成了. 最大的角放大率，或放大率 M 是(对于小角度)(见题 35.112)　$M=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{IQ}{OP}=\frac{QE}{PE}$

一复杂显微镜有一焦距较短的物镜，可以使很小的物体形成一放大的、倒立的实像；一目镜是观察该像的简单的显微镜. 既然物镜所形成的像是倒立的，最终像也是倒立的.

35.126　一焦距是 5cm 的简单透镜的角放大率是多少？此时该透镜作用是产生离眼睛 25cm 的像.

解 ☞ 从透镜公式,注意到像是虚的,有 $1/p+1/q=1/f, 1/p+1/(-25)=\frac{1}{5}; 1/p=\frac{5}{25}+\frac{1}{25}=\frac{6}{25}$.物距 $p=\frac{25}{6}=4.17$cm.从题 35.125 可以得到角放大率 $M=|q/p|=25/4.17=6$.注意到这和像在近点时的线性放大率是相同的.我们也能够用题 35.112 的公式,$M=1+25/f=1+25/5=6$.

35.127 一显微镜有一焦距 0.3cm 的物镜和一焦距为 2.0cm 的目镜.(a)要使目镜形成在目镜前 25cm 的虚像,物镜所成的像在哪儿?(b)若两透镜相距 20cm,物镜到物的距离是多少?(c)显微镜的总放大率是多少?(d)要得到相同的放大率,物体需离单透镜多远?它的焦距是多大?

解 ☞ 设 1 和 2 指物镜和目镜.s 和 s' 代表物距和像距.(a)对目镜所成像,$s_2'=-25$cm.

有 $\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{2}+\frac{1}{25}=\frac{27}{50}$, $s_2=1.85$cm 位置在目镜前.

(b) $s_1'=20-s_2=18.15$cm,于是 $\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{0.3}-\frac{1}{18.15}=\frac{17.85}{0.3\times18.15}$

$s_1=0.305$ 位置在物镜前.

(c)总的放大率,$M=h_2'/h_1=(h_2'/h_2)(h_2/h_1)$ 其中 h_2 是物镜形成的像高,h_1 是物高,h_2' 是最终像高.有

$$M=m_1m_2=\left|\frac{s_1'}{s_1}\right|\left|\frac{s_2'}{s_2}\right|=\frac{18.15}{0.305}\left|\frac{25}{1.85}\right|=804$$

(d)从 $m=|s'/s|$,有

$$s=\frac{25\text{cm}}{\text{m}}=\frac{25\text{cm}}{804}=0.031\text{cm},\text{因此}\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}, f\approx s=0.031\text{cm}$$

35.128 一焦距为 0.5 的透镜位于焦距为 4cm 的另一透镜前 12cm.一物体在焦距 0.5cm 透镜前 0.53cm.(a)确定 0.5cm 透镜实像的位置,(b)确定该实像通过 4cm 透镜虚像的位置,(c)这样的透镜组合,总的放大率是多少?

解 ☞ (a)由($f_1=0.5$cm)物镜形成的实像的像距 s_1 是

$$\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{0.5\text{cm}}-\frac{1}{0.53\text{cm}}=\frac{0.03}{(0.5)(0.53\text{cm})},\quad s_1'=8.83\text{cm}$$

正好在 $f_2=4$cm 的目镜前 $s_2=12\text{cm}-s_1'=3.17$cm 处.

(b)由目镜形成的虚像的像距 s_2' 是

$$\frac{1}{s_2'}=\frac{-1}{s_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{3.17\text{cm}}+\frac{1}{4\text{cm}}=\frac{-0.83}{(3.17)(4)\text{cm}},\quad s_2'=-15.28\text{cm}$$

即在目镜前 15.28cm 处,或在物镜前 $s_2'-12\text{cm}=3.28$cm 处.

(c)由物镜所成实像的放大率是

$$m_1=\frac{s_1'}{s_1}=\frac{8.83\text{cm}}{0.53\text{cm}}=16.7$$

由目镜所成虚像的放大率是

$$m_2=\left|\frac{s_2'}{s_2}\right|=\frac{15.28\text{cm}}{3.17\text{cm}}=4.82$$

总的线性放大率是 $M=m_1m_2=(16.7)(4.82)=80.5$.这表示人在目镜前 15.28 距离处看物体的"角放大率"不是很大,因为对于一般人眼睛来说,近点是 25cm.对于一显微镜的角放大倍数,与像是远离还是靠近近点有关.当最终像在近点处时,角放大率和线性放大率是相同的.

35.129 一解剖用显微镜的物镜与物体有一很大距离 s_1.假设物镜的焦距是 5.0cm,目镜的焦距是 4.0cm,而这两透镜之间的距离为 17.0cm.求(a)s_1,(b)整个显微镜的放大率.

解 ☞ 我们利用题 35.127 的符号.目镜的像是虚的,在 $s_2'=-25$cm,因此眼睛能在近点观察到它.

(a) $\frac{1}{s_2}=\frac{1}{s_2'}+\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{25}+\frac{1}{4}=\frac{29}{100}$, $s_2=3.45$cm

$s_1'=13.55$,及 $\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_1'}=\frac{8.55}{(5)(13.55)}$, $s_1=7.92$cm

(b)　$M=m_1m_2=\frac{s_1'}{s_1}\times\frac{s_2'}{s_2}=\frac{13.55}{7.92}\left|\frac{25}{3.45}\right|=12.4$ 是线性放大率.

35.130　描述望远镜和小望远镜的基本透镜结构.

解　☞ 一天文望远镜是由一物镜构成的,而该物镜可以在它的主焦点上(或附近)形成一颠倒的、简化的由远距离物体所形成的实像.该像可以由一简单显微镜观察到.在一地面上的望远镜中,如果远距离的场景是竖立的,那么观察到的像是颠倒的.为了看到正像,在物镜和目镜之间引入了第三个透镜;在棱镜双目望远镜中用的一种方法是加入一对能颠倒图像的全反射棱镜.天文望远镜的角放大率是:角放大率 $=\left|\frac{f_0}{f_e}\right|=\left|\frac{物距}{目镜焦距}\right|$.一伽利略望远镜,或小望远镜,由一会聚物镜和一发散目镜组成.它能形成一正立的虚像.伽利略望远镜的角放大率同天文望远镜角放大率公式一致.伽利略望远镜的优点是比天文望远镜短.

35.131　一架小望远镜(伽利略望远镜)有一焦距为 15cm 的物镜.如果目镜是一离物镜 10cm 远的发散透镜,那么该目镜的焦距是多少?

解　☞ 参见图 35-38;假设物体和最终成的像在无穷远处,对于透镜 1 有 $p_1=\infty$,$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}$,$q_1=15\text{cm}$

对于透镜 2,$p_2=10-15=-5(\text{cm})$.q_2 等于∞:

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2},f_2=-5\text{cm}$$

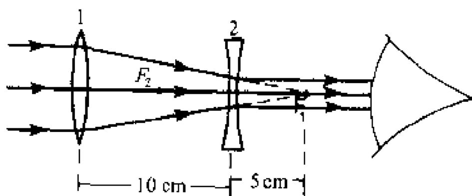


图 35-38

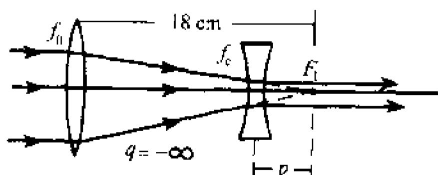


图 35-39

35.132　一个小望远镜是由焦距为 18cm 的物镜和焦距为 −6cm 的发散目镜构成.(a)要使无穷远处的物体成像,这两个透镜应相距多远?(b)在上述情况下角放大率是多少?

解　☞ 情况如图 35-39.(a)无穷远物体通过物镜所成像在透镜的主焦点上.该像对于目镜来说是物体.如果最终的像在无穷远处,则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_e}$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{-\infty}=-\frac{1}{6}$,$p=-6\text{cm}$.负号表示目镜在物镜所成像之前.因此,两透镜之间的距离是$(18-6)\text{cm}=12\text{cm}$.(b)角放大率是 $M=|f_0/f_e|=\frac{18}{6}=3$.

35.133　一天文望远镜有一焦距为 150cm 的物镜和一焦距为 10cm 的目镜.为了观察到远距离的物体,物镜和目镜之间的距离应该是多少?

解　☞ 既然物体被认为是在无穷远处,第一个所成像位于物镜的焦点处.该实像对于目镜来说是物体,且该目镜所成虚像在无穷远处.因而实像位于目镜的焦距内.两透镜之间的距离 $f_0+f_e=150\text{cm}+10\text{cm}=160\text{cm}$.

35.134　由一焦距为 150cm 的物镜和一焦距为 10cm 的目镜组成的天文望远镜,它的角放大率是多少?如果该放大率变为原来的 3 倍,那么目镜的焦距是多少?

解　☞ 角放大率 $=|f_0/f_e|=150/10=15$.要得到 3 倍的放大率,f_e 必须是原值的 $\frac{1}{3}$,$f_e=3.33\text{cm}$.

35.135　一伽利略望远镜由一焦距为 f_1 的物镜和焦距为 $-f_2$ 的目镜构成,两镜相距 $d=f_1-f_2$.一束平行光线穿过这样的透镜系统,此时 $f_1=10\text{cm}$,$f_2=-2\text{cm}$.证明:像放大倍数是 $|f_1/f_2|$,虚像是竖立的.

证　☞ 图 35-40,光线 1 和 2 所成的像 I_0 是由物镜单独形成的.从 I_0 光线回穿过第 2 个透镜.

利用题 35.40 的结论,我们定义角放大率是

$$\frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha} = \left|\frac{h/f_2}{h/f_1}\right| = \left|\frac{f_1}{f_2}\right| \text{(对于小角度)}$$

既然初始光线是从光轴上方射入,从光轴下方射出,那么像是正立的.

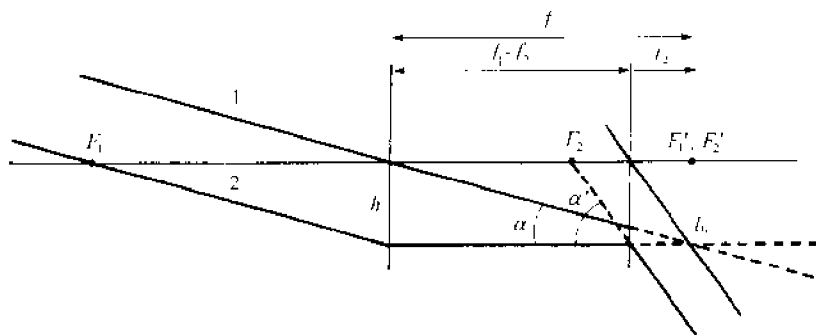


图 35-40

35.136 一天文望远镜由焦距为 50cm 的物镜和焦距为 3.5cm 目镜组成.要观察离物镜 200cm 的物体,两镜之间的距离应为多少?

解 见图 35-41 这儿我们不能假定物体在无穷之处.我们有$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1}$,$\frac{1}{q_1}=\frac{4}{200}-\frac{1}{200}=\frac{3}{200}$,$q_1=66.7$cm 故两透镜之间的距离应为 $66.7+3.5=70.2$(cm).

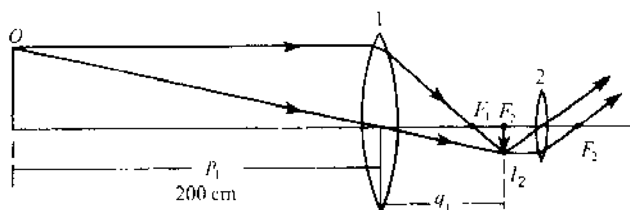


图 35-41

35.137 一大型天文台的望远镜有一焦距为 62ft 的物镜.那么通过该物镜看到 1.0in 大小的像所对应在月球的实物是多大?(到月球距离为 240 000mi.)

解 线性放大率是 $m=|q/p|=$ 像高/物高,且像约成在物镜的焦点上,如图 35-42 所示,设 x 是用 mi 度量的像所对应的月球上观察到的大小.由相似三角形关系,有

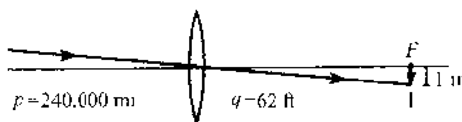


图 35-42

$$\frac{62}{(240\ 000)(5280)}=\frac{1/(12\times 5280)}{x},\ x=323\text{mi}$$

35.138 一望远镜的目镜和物镜之焦距分别是 5 和 40cm.为了聚焦不同距离的物体,两透镜之间的距离是可调节的.(a)如果物镜前 2m 的物体的虚像成在物镜前 2m,那么两透镜之间距离是多少?(b)像的放大率是多少?

解 (a)由焦距为 40cm 的物镜所构成的实像 I 的像距 s_1' 是

$$\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{40\text{cm}}-\frac{1}{200\text{cm}}=\frac{4}{200\text{cm}},\ s_1'=50\text{cm}$$

该像将离目镜的前焦点 F_2 较近,因为最终成像是 200cm 远,$f_2=5$cm,所以两透镜之间距离是

$s_1' + f_2 = 55\text{cm}$. 图 35-43 是透镜系统的简图表示;

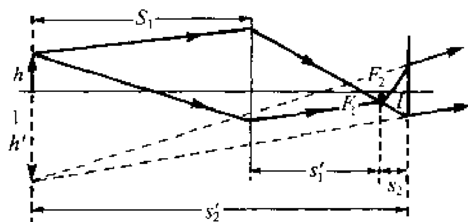


图 35-43

由目镜所成虚像在物镜前 2m, 所以它必然在目镜前 2.55m; $s_2' = -255\text{cm}$. 因此, 像 I 离目镜的距离 s_2 是 $\frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{5\text{cm}} + \frac{1}{255\text{cm}} = \frac{52}{255}$ cm, $s_2 = 4.9\text{cm}$.

因此两透镜之间的距离可以由 $d = s_1' + s_2 = 54.9\text{cm}$ 给出.

(b)由物镜所成实像的放大率是

$$m_1 = \left|\frac{s_1'}{s_1}\right| = \frac{50\text{cm}}{200\text{cm}} = 0.25$$

由目镜所成虚像的放大率是

$$m_2 = \left|\frac{s_2'}{s_2}\right| = \frac{255\text{cm}}{4.9\text{cm}} = 52.0$$

总的线性放大率是 $M = m_1 m_2 = 13.0$. 望远镜的角放大率不是用近点定义的, 这与显微镜不同. 对于天文观察, 定义为像与无穷远处的物之比, 如题 35.130~35.135 所示. 对于地面观察, 定义为 α'/α, α'是像在眼处所张的角, α 是物体在眼处所张的角(以裸眼观察时). 此题中, $\alpha' = 13h/255$, $\alpha = h/255$, h 是物高. 所以, $\alpha'/\alpha = 13$(已假设 $\tan\alpha' \approx \alpha$). 这与此情形的线性放大率相等, 因为像距和物距是相同的.

第三十六章　干涉；衍射和偏振

36.1　光的干涉

36.1　叠加下列两振动：$y_1=20\ \sin\omega t$，$y_2=20\ \sin(\omega t+60°)$.

解　☞ $y=20\sin\omega t+20\sin(\omega t+60°)$. 我们可将 y_1、y_2 分别看成长度为 20，以角速度 ω 旋转的两矢量在 y 轴上的投影，它们与 x 轴之间的夹角分别为 ωt 和 $\omega t+60°$. 如图 36-1 所示，这两个矢量的和在 y 轴上的投影即为所求的结果 $y=y_1+y_2$. 设 $y=A\ \sin(\omega t+\phi)$，根据余弦定律，得：$A^2=20^2+20^2+2(20)(20)\cos60°=3(20^2)$；$A=34.6$；又在图 36-1 的等腰三角形中，$2\phi=60°$；$\phi=30°$. 因此，$y=34.6\ \sin(\omega t+30°)$. 因为 34.6>20，所以这一例子说明了干涉加强的现象.

36.2　叠加下列两振动：$y_1=30\ \sin\omega t$，$y_2=30\ \cos\omega t$.

解　☞ 采用与解 36.1 题相同的步骤，将 $\cos\omega t$ 写成 $\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$. 因此可见 y_2 超前 $y_1 90°$，采用与 36.1 题相同的符号，得 $A^2=30^2+30^2=2(30^2)$；$A=42.4$. 在图36-1中的等腰三角形中，$\phi=45°$. 而 $y=y_1+y_2=42.4\ \sin(\omega t+45°)$这又是一个干涉部分加强的例子.

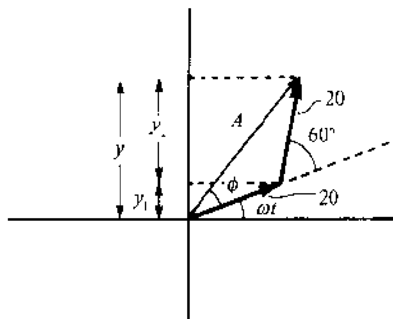


图 36-1

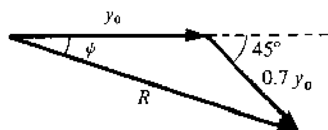


图 36-2

36.3　用图示法(旋转矢量法，见 36.1 题)求下列两振动的合振动：

$$y_1=y_0\sin\omega t,\ y_2=0.7y_0\sin[\omega t-(\pi/4)].$$

解　☞ 由图 36-2，设 $y=y_1+y_2=R\sin(\omega t-\psi)$，

从图上量出，$R=1.5y_0$，$\psi=18°$，因此 $y=1.5y_0\sin(\omega t-18°)$.

36.4　(a)用三角方法计算 36.3 题中两振动的合矢量的分量 R_x 和 R_y，(b)求 R 并写成$R=A\sin(\omega t+\theta)$的形式.

解　☞ 由图 36-2，我们求该时刻的 x 和 y 分量，有：$y_{2x}=a=(0.70y_0)/2^{1/2}$. 因此(a)$R_x=y_0(1+0.495)=1.495y_0$；$R_y=-0.495y_0$. (b)$R=(R_x^2+R_y^2)^{1/2}=1.57y_0$；$\psi=\arctan a/(a+y_0)=18°$，所以，$y=1.57y_0\sin(\omega t-18°)$.

36.5　两个相同频率的光源什么情况下是相干的？相干态和干涉现象的关系是什么？

解　☞ 如果两个光源发出的光波之间具有确定的相位差和相同的振动方向，则它们是相干的. 干涉(加强或减弱)现象仅当从相干光源发出的光波相重叠时发生.

•36.6　描述杨氏双缝装置的干涉图样.

解　☞ 当来自两个不同光源的相干光在某点相遇时，设光的波长为 λ，两光源具有恒定的相位差 $\Delta\phi'$，则该点两光的相位差为 $\phi=(2\pi/\lambda)(\Delta r)+\Delta\phi'$，这里 Δr 是两光从光源传播到该点的光程差. 当相位差为 2π 的整数倍时，为干涉极大. 在图 36-3(a)所示的杨氏双缝装置中，两条狭缝是强度相同、相位相同的光源($\Delta\phi'=0$)，设图中 $d\ll D$，则强度的最大值由下式确定

$$\Delta r = m\lambda \quad 或 \quad d\sin\theta = m\lambda \quad 或 \quad y = \frac{mD\lambda}{d} \tag{1}$$

式中 m 为整数,θ 为一小角.由于振幅加大 2 倍,所以最大光强为 $4I_0$.在图 36-3(a)中,光强极小位于 ϕ 等于 π 的奇数倍的位置.所以,极小处满足

$$\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad 或 \quad d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad 或 \quad y = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)D\lambda}{d} \tag{2}$$

也就是说,极小值位于极大值的中央;最小光强为零.[对于屏上任意一点,可以证明 $I = 4I_0\cos^2(\phi/2)$;参见图 36-3 (b).]

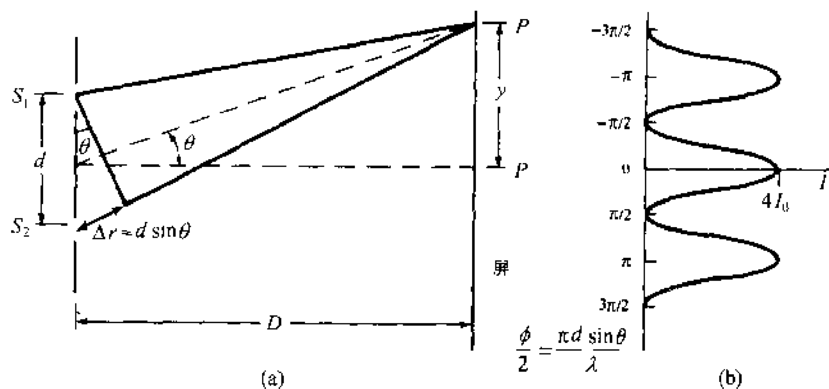


图 36-3

36.7 一双缝距屏幕为 1 m,双缝间距 d 等于 0.25 mm.用波长为 589.3 nm 的单色光(纳黄光)垂直照射双缝,屏幕上中央最大两侧可观察到干涉明纹.试计算两相邻明纹中心之间的距离.

解 ☞ 如图 36-4 所示,第 1 级明纹 $n=1$,到达该处的两光的光程差为一个波长.

$$n\lambda = \frac{dy}{D},\quad 5893 \times 10^{-10} = \frac{0.25 \times 10^{-3}y}{1}$$

$$y = \frac{5893 \times 10^{-10}}{0.25 \times 10^{-3}} = 2.36 \times 10^{-3}\ \text{m} = 2.36\ \text{mm}$$

这就是相邻明纹中心之间的距离.

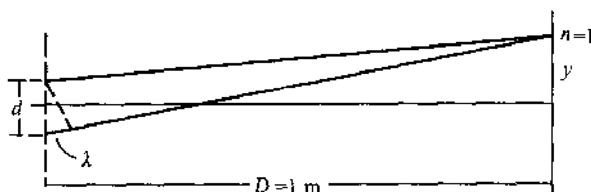


图 36-4

36.8 一钠蒸气灯发出的光(589 nm)在距双缝 0.8 m 远的屏上形成干涉图样.图样上明纹之间的距离为 0.35 cm,问双缝之间的间距为多少?

解 ☞ 由 36.6 题中的方程(1).令 $y = x_n$ 为屏上第 n 级干涉极大的位置,相邻明纹之间的距离为

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{D\lambda}{d}(n+1) - \frac{D\lambda}{d}n = \frac{D\lambda}{d}$$

$$d = \frac{D\lambda}{\Delta x} = \frac{(0.8\ \text{m})(589 \times 10^{-9}\ \text{m})}{0.35 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.35 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0.135\ \text{mm}$$

36.9 在一双缝干涉实验中,$D = 1.00$ m,$d = 0.10$ m,明纹之间的距离为 0.5 mm.求所用光的波长.

解 ☞ 运用36.6题中的方程(1),并采用36.8题中的符号表示,得 $\lambda=[d(\Delta x)]/D=500\ \text{nm}$.

36.10 用一波长为500 nm的光源进行杨氏双缝实验,狭缝距观察者的距离为2 m.设观察者眼睛的角分辨率为1 in(0.000291 rad),若观察者恰能分辨干涉条纹,两缝间的距离为多大?

解 ☞ 参见图36-3(a).因为明纹位置为

$$\sin\theta_m\approx\theta_m=\frac{m\lambda}{d}$$

相邻条纹的角距离为 λ/d,所以在远处看清相邻条纹的条件是

$$\frac{\lambda}{d_{\max}}=0.000291\quad 即\quad d_{\max}=\frac{500\times10^{-9}}{0.00291}=1.72(\text{mm})$$

36.11 波长630 nm的激光入射到一双缝上,产生的干涉明纹之间的距离为8.3 mm,另一波长的光产生的干涉明纹之间的距离为7.6 mm,求该光的波长.

解 ☞ 因为 $\lambda=(d/D)\Delta x$,本题中 d、D 不变,因此

$$\lambda'=\frac{\Delta x'}{\Delta x}\lambda=\frac{7.6}{8.3}630=577(\text{nm})$$

36.12 在杨氏双缝实验中,两缝相距2 mm,用 $\lambda=750$ nm 和 $\lambda'=900$ nm 的混合光照明.若屏幕到缝的距离为2 m,问两种波长的光的干涉明纹重合的位置到中央明纹的最小距离为多少?

解 ☞ 参见图36-3(a).波长 λ 的光的第 m 级明纹和 λ' 的第 m' 级明纹分别位于

$$y_m=\frac{mD\lambda}{d}\quad 和\quad y'_m=\frac{m'D\lambda'}{d}\ 处$$

令 $y_m=y'_m$ 得

$$\frac{m}{m'}=\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{900}{750}=\frac{6}{5}$$

因此,第一次条纹重合出现在

$$y_6=y'_5=\frac{(6)(2)(750\times10^{-9})}{2\times10^{-3}}=4.5(\text{mm})$$

36.13 在杨氏干涉实验中,用波长6000 Å的橙黄光照射双缝,并在距缝很远的屏上观察干涉条纹,若记中央明纹为0级明纹,问通过两缝到达第4级明纹处的两条光线的光程差为多少?

解 ☞ 光程差 $=4\lambda=4(6000\ \text{Å})=24000\ \text{Å}$ 或 $2.4\ \mu\text{m}$

36.14 波长分别为 λ_1 和 λ_2 的光同时通过杨氏双缝.若 λ_1 光的第3级明纹与 λ_2 光的第4级明纹重合,问 λ_1 与 λ_2 的关系如何?

解 ☞ 采用与36.8题相同的符号.λ_1 光的第3级明纹位于 $x_1=[(3\lambda_1)D]/d$,λ_2 光的第4级明纹位于 $x_2=[(4\lambda_2)D]/d$.由于它们处于相同的位置,$x_1=x_2$,所以 $\lambda_2=\frac{3}{4}\lambda_1$.

36.15 用波长分别为 λ_1 和 λ_2 的两光进行双缝实验.若一波长为430 nm,一光的第4级明纹与另一光的第6级明纹重合,另一光的波长为多少?

解 ☞ 运用相长干涉条件:

$$(4\lambda_1)/d=x/D\quad 及\quad (6\lambda_2)/d=x/d$$

得 $4\lambda_1=6\lambda_2$ 若 $\lambda_2=430$ nm,则 $\lambda_1=645$ nm

若 $\lambda_1=430$ nm,则 $\lambda_2=287$ nm

36.16 两个相同的辐射源相距 $d=\lambda/8$,λ 是它们发出的波长.两源的相位差为 $\Delta\phi'=\frac{\pi}{4}$,求辐射场的强度随 θ 变化的分布规律,这里 θ 是从辐射源指向远处的观察点 P 的方向与水平方向之间的夹角(见图36-3).

解　☞ 由于 $\Delta r=(\lambda/8)\sin\theta$，$P$ 点处两波的相位差为

$$\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r+\Delta\phi'=\frac{\pi}{4}(\sin\theta+1)$$

所以

$$I(\theta)=4I_0\cos^2\frac{\phi}{2}=4I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{8}(\sin\theta+1)\right]$$

36.17　一折射率为1.5的薄玻璃片盖在双缝装置的一条缝上，发现干涉条纹向放置玻璃的狭缝一侧移动了7条明纹．若光的波长为 $\lambda=600$ nm，玻璃片厚度为多少？

解　☞ 因为 λ 是光在真空中的波长，所以光在玻璃中的波长为 $\lambda'=\lambda/n$，n 是玻璃的折射率．令 t 表示玻璃片的厚度，玻璃内包含的波长个数为 $t/\lambda'=(nt)/\lambda$．在此厚度的空气中所含波长数则为 t/λ，因此玻璃片的存在产生了 $[(nt)/\lambda]-(t/\lambda)=[(n-1)t/\lambda]$ 的附加波长数，这将引起整个干涉条纹朝着有玻璃的一侧移动 $\Sigma=[(n-1)t]/\lambda$ 个干涉条纹(即：每个波长移动一级干涉条纹)因此

$$t=\frac{\Sigma\lambda}{n-1}=\frac{7(600\ \text{nm})}{0.5}=8400\ \text{nm}$$

36.18　图36-5所示为两个相同的喇叭，发出的声波频率为200 Hz，喇叭 A 沿图中水平线的方向后退，A 处于 S 位置时 P 点的观察者听到的声波最强，而 A 处于 W 位置时观察者听到的声波最弱．图中两相邻 W 点之间距离多远？（P 点距喇叭比图中所示远得多．）

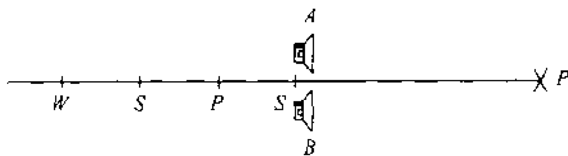


图 36-5

解　☞ 从两喇叭发出的声波初相位相同．当 $L_A-L_B=\frac{\lambda}{2}+n\lambda$（$n$ 为整数）时，发生相消干涉．因此，两相邻 W 点之间的距离为 $\lambda=v/f=330/200=1.65$(m)．

36.19　为了测量声速，用频率为400 Hz的振源驱动图36-5中的两只喇叭．当 B 远离观察者 P 运动至 S 点时，P 点听到的声音最强、相邻 S 点之间的距离为82 cm．从以上数据计算声速(设距离 $PA\gg AB$)．

解　☞ 当 $L_B=L_A+n\lambda$ 时，出现相长干涉（n 为整数），这时波的相位相同，所以相邻 S 点相距 λ；因为 $\lambda=v/f$，所以 $v=0.82(400)=328$(m/s)．

36.20　如图36-6所示，一束光 a，从介质1以接近垂直的角度入射到介质2——厚度为 t 的薄膜上，在薄膜上表面分为反射线 b 和折射线 d，折射线在薄膜的下表面又发生部分反射，回到介质1后其方向平行于 b．求射线 b 和 d 的干涉条件．

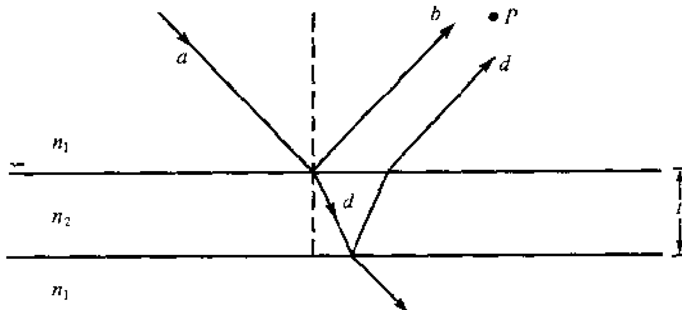


图 36-6

解 ☞ 计算到达 P 的两光线的相位差.光线 d 多走了 $2t$(设垂直入射)的距离,在介质中的波长为 $\lambda_2=(n_1/n_2)\lambda_1$.又,两光线中的一根($b$,若 $n_2>n_1$)反射时经历了 180°的相位突变,所以

$$\phi=\frac{2\pi}{\lambda_2}(2t)-\pi=2\pi\left(\frac{2n_2t}{n_1\lambda_1}-\frac{1}{2}\right)$$

干涉最大的条件为

$$\phi=2\pi m \quad 即\ \frac{2n_2t}{n_1\lambda_1}=m+\frac{1}{2}\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

而干涉最小的条件为

$$\phi=2\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\quad 即\quad \frac{2n_2t}{n_1\lambda_1}=m+1\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

36.21 经过阳极氧化过程,一磨光的铝片表面形成了一厚度 $t=250$ nm 的透明氧化铝薄膜,其折射率 $n_2=1.80$.在白光下观察,其表面呈现什么颜色?(设白光垂直照射.)

解 ☞ 我们必须求出,在可见光波长范围内(从 400 nm 的紫光到 700 nm 的红光),什么波长干涉相长,什么波长干涉相消.由题 36.20,当 $n_1=1$ 时(空气),干涉最大的波长满足

$$\lambda_1=\frac{2(n_2/n_1)t}{m+\frac{1}{2}}=\frac{900\ \text{nm}}{m+\frac{1}{2}}\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

仅当 $m=1$,即 $\lambda_1=600$ nm(橙色光)落在可见光范围内.

而干涉最小出现的条件为

$$\lambda_1=\frac{2(n_2/n_1)t}{m+1}=\frac{900\ \text{nm}}{m+1}\quad (m=0,1,2,\cdots)$$

在 λ_1 的取值中,只有 $\lambda_1=450$ nm(紫光)在可见光范围内.

所以,入射的白光中,红、橙、黄光将强烈反射,而蓝、紫光大大地削弱了.

36.22 一雷达天线位于湖边小丘的顶端,天线的工作波长为 400 m.它探测到金星正从地平线上升起.当金星位于地平线上方 35°角时,雷达第一次探测到信号出现极小值,求小丘的高度.

解 ☞ 雷达天线一方面直接从金星接收信号,另一方面接收湖面反射的信号(图 36-7),将金星视为无穷远,则 B 和 D 处的信号相位相同.反射线和直射线之间的空间波程差为

$$\overline{BE}-\overline{DE}=\frac{y}{\sin35^\circ}(1-\sin20^\circ)$$

且由于 B 点的反射产生 π 的相位突变,因此总的波程差为

$$\phi=\frac{2\pi y}{\lambda\sin35^\circ}(1-\sin20^\circ)+\pi$$

要使强度最小,则 $\phi=\pi,3\pi,5\pi,\cdots$注意到 $\phi=\pi$ 时 $y=0$,舍去,我们得 $\phi=3\pi$,而

$$y=\frac{\lambda\sin35^\circ}{1-\sin20^\circ}=\frac{(400)(0.5736)}{1-0.3420}=349(\text{m})$$

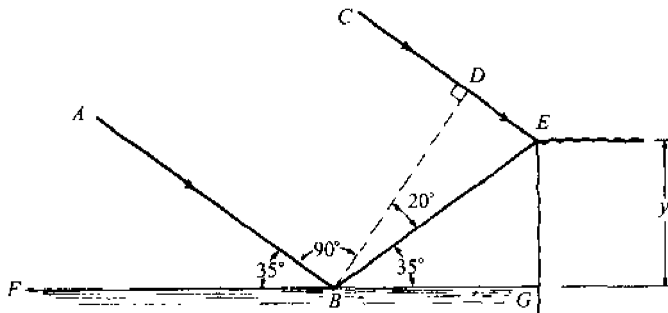


图 36-7

36.23 一肥皂泡的折射率为 1.333.若波长 $\lambda=500$ nm 的光垂直入射,产生干涉极大时肥皂

泡的最小厚度为多少?

解 ☞ 在肥皂泡内,因为光的速度较小,所以光的波长 λ_f 比其在空气中的波长小,

$$\lambda_f = \frac{\lambda_a}{n} = \frac{500}{1.333} = 375(\text{nm})$$

表面反射的相位突变,薄膜厚为 $\frac{1}{4}\lambda_f$ 时产生干涉极大:$\frac{1}{4}\lambda_f = \frac{375}{4} = 94(\text{nm})$.

36.24 如图 36-8 所示,两块平玻璃一端接触,另一端相距一小气隙.用 $\lambda = 589$ nm 的垂直照射,共观察到 5 个暗纹(D),小气隙的厚度为多少?

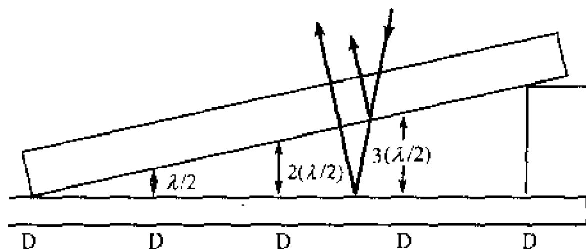


图 36-8

解 ☞ 干涉条纹是由劈尖上下两个表面反射的光干涉形成的,而两处的反射性质不同,上表面的反射发生在从光密介质(玻璃)到光疏介质(空气)的界面,而下表面的反射发生在从光疏介质(空气)到光密介质(玻璃)的界面,这时两反射光之间有 180°的相位突变,因此两玻璃接触端为暗条纹.

干涉条纹每改变一级,下表面反射的光线就多走 λ 的来回距离.而劈尖的厚度就改变 $\frac{\lambda}{2}$.所以

$$\text{气隙厚度} = 4\left(\frac{1}{2}\lambda\right) = 2(589\ \text{nm}) = 1178\ \text{nm}$$

36.25 一单色光垂直入射到形如图 36-8 的劈尖上,产生 28 条暗纹,劈尖右侧边缘处正好是暗纹中心,若气隙厚度为 9000 nm,光的频率为多少?

解 ☞ 28 条暗纹对应于 27 个条纹间隔.因此相邻两条暗纹之间对应的劈尖厚度差为 $\frac{\lambda}{2} = (9000\ \text{nm})/27 = 333$ nm,得 $\lambda = 666$ nm.

36.26 如图 36-9 所示,一凸透镜置于一平板玻璃上.波长为 6700 Å 的红光垂直从上方入射.由透镜和平玻璃表面反射的光形成干涉条纹.透镜和平玻璃的接触点处为暗纹,周围是明暗相间的环形条纹.这就是牛顿环.测得第 12 条暗纹的半径为11 mm,求透镜的曲率半径 R.

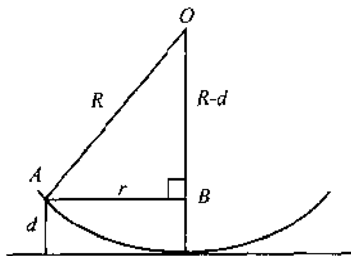


图 36-9

解 ☞ 与题 36.24 相仿,干涉条纹移动一级,气隙厚度改变 $\frac{\lambda}{2}$.因此,第 12 级暗纹处的气隙厚度为

$$d = 20\left(\frac{1}{2} \times 6.7 \times 10^{-7}\ \text{m}\right) = 6.7 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

在图 36-9 中,O 为透镜的曲率中心,r 代表第 12 条暗纹的半径.则在直角三角形 ABO 中,有

$$R^2 = r^2 + (R-d)^2 = r^2 + R^2 - 2Rd + d^2$$

上式给出 $2Rd = r^2 + d^2$.因为 d^2 很小(与 r^2 相比)可忽略不计,所以

$$R = \frac{r^2}{2d} = \frac{(11 \times 10^{-3}\text{m})^2}{2(6.7 \times 10^{-6}\ \text{m})} = 9.03\ \text{m}$$

36.27 若牛顿环所用光的波长为 400 nm,求(a)第 3 和第 6 条明纹处对应的气隙厚度差,(b)若弯曲面的曲率半径为 5.0 m,第 3 条明纹的半径.

解 ☞ (a)第 3 和第 6 级明纹之间存在 3 个波长的光程差.因为牛顿环中的光线经过气隙 2 次

（一来一回），所以气隙厚度的改变对应于光程差的一半：$\frac{1}{2}(3\lambda)=\frac{3}{2}(400)=600(\text{nm})$.（b）由题 36.26中的图 36-9，我们有 $r^2\approx 2Rd$，又注意到牛顿环中央是暗点，所以第 3 级明纹处 $d_3=(2.5\lambda)/2$，而 $r_3=(2.5\lambda R)^{\frac{1}{2}}=2.2$ mm.

36.28 一麦克耳孙干涉仪如图 36-10 所示，将可动镜面移动 0.015 mm，观察到干涉条纹移动了 50 级，求所用单色光的波长，并画出光路图.

解 ☞ 麦克耳孙干涉仪的可动镜面每移动$\frac{\lambda}{2}$，从镜面反射的光的光程改变一个波长，条纹移动一级. 所以

$$\frac{1}{2}\lambda=\frac{0.015\times10^{-3}\text{ m}}{50},\ \lambda=6.00\times10^{-7}\text{ m}=600\text{ nm}$$

36.29 将麦克耳孙干涉仪的一臂稍微调长（移动镜面），观察到有 150 条暗纹移过视场. 若所用光的波长为 480 nm，求镜面移动的距离.

解 ☞ 当两臂的光相位相反时形成暗纹. 若一臂的长度增加$\frac{\lambda}{2}$，则光程（来回）增加 λ，视场由暗到明再到暗. 所以 150 条条纹移过时，光臂的长度改变为

$$(150)\left(\frac{1}{2}\lambda\right)=(150)(240\text{ nm})=36000\text{ nm}=0.036\text{ mm}$$

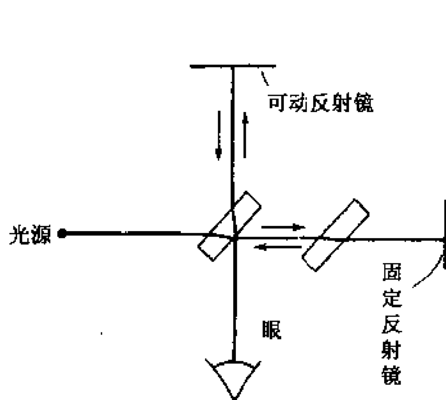


图 36-10

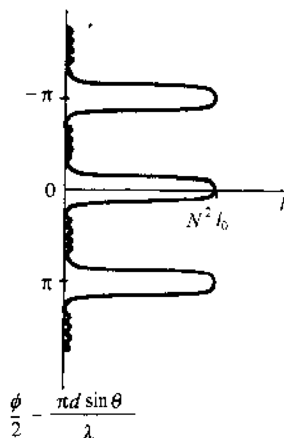


图 36-11

36.30 将题 36.6 的结果推广到 N 个相同的狭缝（光栅）的情形.

解 ☞ 容易看出，光强极大出现的位置相同. 当 $d\sin\theta=m\lambda$ 时，通过所有狭缝的光相位相同，形成极大. 而一旦偏离极大位置，光强就急剧下降. 因为只要相邻两缝的光程差相差一点点，N 个狭缝叠加的结果，就导致形成干涉极小（参见题 36.40）. 图 36-3(b)中的图线改变为图 36-11 的情形，在主极大之间光强很小.（光强分布满足 $I=I_0[\sin^2(N\phi/2)]/[\sin^2(\phi/2)]$，$I_0$ 为透过一条缝的光的强度）.

36.31 如果许多射电望远镜放置在一条直线上形成望远镜组，可以提高望远镜的分辨率. 实际上，它们相当于衍射光栅的逆装置，只在很小的角范围产生最大响应. 参见图 36-12，试证明该望远镜组只对满足 $n\lambda=d\sin\theta$ 的范围进行观察.（因为望远镜安装在导轨上，所以 d 可调.）

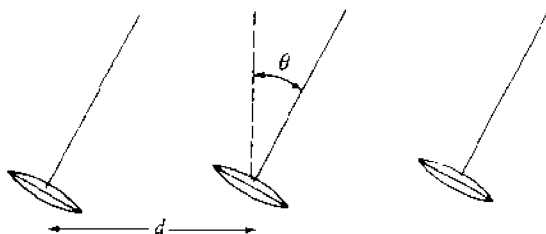


图 36-12

证 ☞ 在观察范围内,到达每个射电望远镜的射线形成干涉极大.来自远处的射线互相平行,在垂直于射线方向的平面上相位相同,到达相邻望远镜的射线之间的波程差为 $d\sin\theta$.对干涉主极大,波程差必等于 $n\lambda$,因此当 $n\lambda=\sin\theta$ 时,产生最大响应.

36.32 试证明射电望远镜(见题 36.31)的最小可分辨角(主极大的半角宽度)为

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

式中 N 为望远镜组的数目.

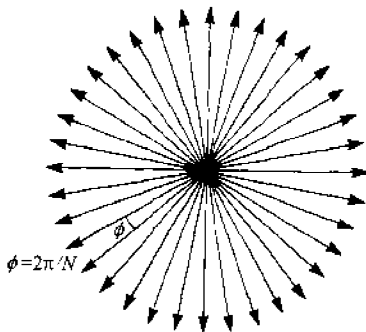


图 36-13

证 ☞ 对于主极大,所有信号同相位.对于相邻的第 1 个极小,N 个望远镜的波程差为 λ,因此相邻望远镜之间的波程差为 λ/N,而相位差为 $\phi=(2\pi)/N$,如图 36-13 所示.由对称性知,图 36-13 中 N 个相矢量之和为零,因此极小条件为 $n\lambda+\lambda/N=d\sin(\theta+\Delta\theta)$.展开正弦函数,消去 $n\lambda=d\sin\theta$.当 $\Delta\theta$ 为小量时,可求得

$$\Delta\theta=\lambda/(Nd)\cos\theta$$

36.2 衍射和衍射光栅

36.33 简述什么是衍射并写出单缝的夫琅禾费衍射光强公式.

解 ☞ 当平面光波(即波阵面是平面)垂直入射到具有一定孔径的不透明表面时,惠更斯原理告诉我们,远处的光场与孔径处的子波的光场相同.这些子波将照亮障碍物的几何阴影区域,因此叫做衍射(即"绕射"或"拐弯").这种衍射现象在障碍物后远处最简单,被称为夫琅禾费衍射.若孔径为一细长的狭缝,宽度为 w[见图 36-14(a)],夫琅禾费衍射强度分布为

$$I=I_0\frac{\sin^2\phi/2}{(\phi/2)^2} \tag{1}$$

式中 $\phi\equiv(2\pi/\lambda)w\sin\theta$ 是狭缝两边缘到达衍射角 θ 处的光线的相位差.图 36-14(b)所示为(1)式的图线.

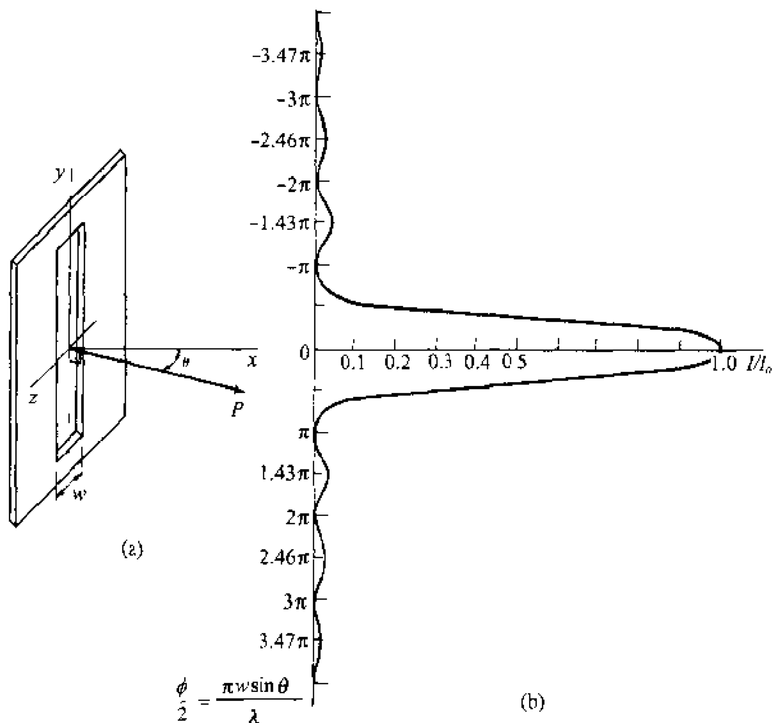


图 36-14

36.34 一狭缝后面的透镜焦距为 1 m,波长为 600 nm 的光垂直照射狭缝,在透镜焦平面上观察到中央衍射最大两边的第 1 级衍射极小间距离为 4 mm,求狭缝宽度.

解 ☞ 任一聚焦系统,如透镜,均具有下列特性,即:所有经过透镜的光线光程相同(见题 34.56).因此透镜不改变狭缝的衍射条纹情况.事实上,经过透镜中央的光线不发生偏折,所以透镜的效应是当狭缝被置于观察屏前≈f 处时产生的衍射条纹就好象狭缝处于无穷远时的情形.由题 36.33 中的方程(1)或图 36-14(b),中央最大一侧的第 1 级极小的衍射角 θ 满足

$$\frac{\pi w \sin\theta}{\lambda} = \pi, \sin\theta = \frac{\lambda}{w}$$

w 为狭缝宽度.由于

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{2\ \mathrm{mm}}{1\ \mathrm{m}} = 0.002, \quad w = \frac{\lambda}{0.002} = \frac{600 \times 10^{-9}}{0.002} = 0.3\ \mathrm{mm}$$

36.35 描述光栅衍射的各种现象.

解 ☞ 衍射光栅由 N 条平行狭缝、划线或凹槽组成.光线垂直入射时的夫琅禾费衍射条纹即为单缝衍射图样(图 36-14)调制的 N 条狭缝的干涉条纹(图 36-11),实际观察到的强度是 N 条狭缝干涉强度与单缝衍射强度的乘积.因此,当

$$d\sin\theta = m\lambda \quad (\text{光栅方程}) \tag{1}$$

时,出现主极大.而主极大的峰值高度与单缝衍射的包络线一致,如图 36-15 所示.对应于衍射峰的 m 值(0,1,2…只考虑 $\theta \geqslant 0$)称为其衍射级.光栅条纹有时会缺级,取决于缝宽 w 与相邻两缝中央间距 d 之间的关系.

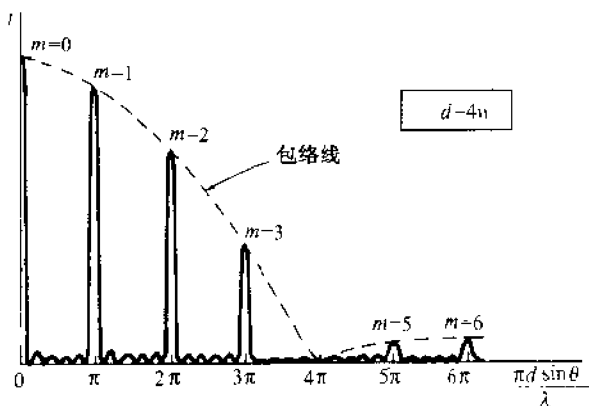


图 36-15

36.36 一束蓝色平行光(420 nm)入射到一小孔上,经过小孔后,光不再平行于入射方向而是偏转了 1°,小孔的直径为多少?

解 ☞ 由图 36-14(b)知,对于中央主极大的角宽度,近似有$[(\pi w)(\sin\theta)]/\lambda = \pm\pi$,代入 $\theta = \pm 1° = (\pi/180)\mathrm{rad}$,得

$$w = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{420 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}}{\sin(\pi/180)} \approx \frac{420 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}}{\pi/180} = 24\ \mu\mathrm{m}$$

36.37 平行光线经过一直径为 7 mm 的透明瞳孔进入人眼,若黄光的波长为 589 nm,它经过瞳孔后的衍射角 θ 等于多少?

解 ☞ 设经过任意小尺寸的孔径的衍射近似与狭缝衍射相同(见题 36.36),则

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{589 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}}{7 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 8.41 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad}$$

36.38 远处的汽车两车灯分开 1.4 m,若人眼的瞳孔直径为 3 mm,问能分辨两车灯的最远距离为多少?(将车灯视为波长为 500 nm 的点光源.)

解 ☞ 运用瑞利判据(题 36.46),通过半径为 a 的圆孔衍射的最小分辨角为

$$\theta \approx \sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{a} = \frac{1.22(5\times10^{-7})}{3\times10^{-3}} = 2.03\times10^{-4}\text{rad}$$

令 $\theta = 1.4/d$,得 $d = 1.4/\theta = 1.4/(2.03\times10^{-4}) = 6900(\text{m})$.

36.39 如图 36-16,两光源距人眼为 L.观察者的瞳孔直径为 3 mm,设 L 眼视力很好,则限制分辨两光源的因素是衍射.若 $L = 2500$ m,问 s 为多大恰能被分辨?

解 ☞ 与题 36.38 相同,极限情形,$\theta = \theta_c$,而 $\sin\theta_c = (1.22)(\lambda/D)$,由图 36-16,$\sin\theta_c$ 近似等于 s/L,因为 $s \ll L$.代入,得

$$L = 2500\ \text{m} = \frac{sD}{1.22\lambda} \approx \frac{(s)(3\times10^{-3}\ \text{m})}{(1.22)(5\times10^{-7}\ \text{m})},\ s = 0.51\ \text{m}$$

题中取 $\lambda = 500$ nm,它处于可见光的中段.

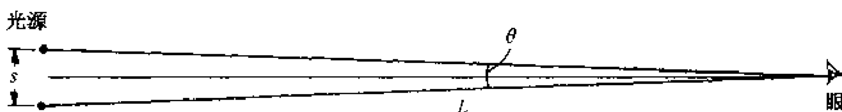


图 36-16

36.40[c] 当一束单色光从一狭缝中射出,垂直入射到一衍射光栅上时,夫琅禾费衍射的每一个主极大都是狭缝的像.试用入射光的波长和光栅宽度表示这些谱线的角宽度.

解 ☞ 不考虑次极大和极小(见图 36-15),我们可以认为,主极大的角宽度为两个相邻的极小之间的角宽度 $\Delta\theta$.由题 36.30 中的光强方程可知,中央主极大处于$(N\phi/2) = -\pi$ 与$(N\phi)/2 = +\pi$ 之间;即有 $\Delta\phi = (4\pi/N)$,对其它主极大也是如此.因为

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

所以

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\Delta(\sin\theta) = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta\Delta\theta = \frac{4\pi}{N}$$

得

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd\cos\theta} \tag{1}$$

(1)式适用于所有衍射主极大角宽度的计算.注意:这一结果与题 36.32 中用相矢量方法对相似问题的推导一致(题 36.32 中 $\Delta\theta$ 是半角宽度故少一因子 2).

36.41 一衍射光栅每厘米有 6000 条刻线.第一级光谱线位于衍射角 30°处,入射光的波长为多少?

解 ☞ 第 n 级衍射极大满足

$$n\lambda = d\sin\theta$$

这里,$n = 1$,$d = \frac{1}{6000}$ cm,所以

$$\lambda = \frac{1}{6000}\sin30° = 833\times10^{-7}(\text{cm}) = 833(\text{nm})$$

36.42 图 36-14(b)表明,单缝夫琅禾费衍射的第一个次极大只有中央主极大强度的 0.047 倍,试证明之.

证 ☞ 由题 36.33 知,第一极小和第二极小分别位于 $\phi = 2\pi$ 和 $\phi = 4\pi$ 处,假设第一级极大处于两极小的中间,即 $\phi = 3\pi$,则有

$$I = I_0\frac{\sin^2(3\pi/2)}{(3\pi/2)^2} = 0.045I_0$$

误差源于我们的假设具有约 4% 的误差.

36.43 一光栅每英寸有1500条刻线，衍射产生水银弧光灯的光谱. 水银光谱中绿线波长为5461 Å，其第一级衍射谱线和第二级衍射谱线之间的角距离为多少?

解 ☞ 利用光栅公式 $n\lambda = d\sin\theta$，求 θ. $n = 1$，$5461 \times 10^{-10} = \frac{1}{(39.37)(15000)}\sin\theta_1$，$0.3225 = \sin\theta_1$，$\theta_1 = 18.8°$（第一级）. $n = 2$，$2(5461 \times 10^{-10}) = \frac{1}{(39.37)(15000)}\sin\theta_2$，$0.6449 = \sin\theta_2$，$\theta_2 = 40.2°$（第二级）. 故 $\theta_2 - \theta_1 = 40.2° - 18.8° = 21.4°$.

36.44 一光栅每厘米有7000条刻线，用氦-氖激光器发出的红色光垂直照射，若第二级谱线位于62.4°处，问红光的波长为多少?

解 ☞ 由光栅方程 $n\lambda = d\sin\theta$ 得

$$2\lambda = \frac{1}{7000}\sin 62.4° = \frac{0.8862}{7000},\ \lambda = 6330 \times 10^{-8}\ \text{cm} = 633\ \text{nm}$$

36.45 一光源发出的光波长在450～600 nm之间，用它垂直照射光栅，测得在30°衍射角处，两级相邻衍射光谱恰好开始重叠，问光栅每米有多少条刻线?

解 ☞ 根据光栅方程可知，若最大波长的第 m 级谱线与最小波长的第$(m+1)$级谱线恰好重合，则有

$$d\sin\theta = m(600 \times 10^{-9}) = (m+1)(450 \times 10^{-9})$$

解得 $m = 3$ 又因为 $\theta = 30°$，所以

$$\frac{1}{d} = \frac{\sin 30°}{3(600 \times 10^{-9})} = 277778(\text{条}/\text{m})$$

36.46c 若题36.40中光源发出连续谱线，则光栅对波长 λ 的光的分辨本领定义为 $R \equiv \lambda/\delta$，δ 是最小能分辨的两条谱线 $\lambda - \frac{1}{2}\delta$ 和 $\lambda + \frac{1}{2}\delta$ 之间的波长差，求第 m 级光谱的分辨本领 R_m.

解 ☞ 根据瑞利判据，当两衍射峰值之间的角距离正好等于每个峰的半角宽度时，恰能分辨. 由题36.40中式(1)知最小能分辨的角距离为

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \quad \text{即} \quad d\cos\theta(\Delta\theta)_{\min} = \frac{\lambda}{N}$$

将光栅方程 $d\sin\theta = m\lambda$ 微分，得

$$d\cos\theta\Delta\theta = m\Delta\lambda, \quad \text{因此} \quad d\cos\theta(\Delta\theta)_{\min} = m\delta$$

比较上面有关 $d\cos\theta(\Delta\theta)_{\min}$ 的两式，给出：$R_m = mN$.

36.47 光垂直入射到一透射光栅上，其缝宽为两缝中央之间距离的三分之一，考虑单缝衍射的影响，证明第3级多缝衍射极大缺级.

证 ☞ 在题36.35中已讨论过，N 条缝的衍射光强等于 N 条"理想"的狭缝干涉强度与单缝衍射强度的乘积. 由题36.35中方程(1)知，若 N 条缝干涉的第 j 级极大出现在 θ_j 处，则

$$\sin\theta_j = \frac{j\lambda}{d} \tag{1}$$

d 是缝间距离. 由题意知，缝宽 $w = d/3$，因此图36-14b[或题36.33中式(1)]中单缝衍射在下列角度时强度为零.

$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{w} = \frac{3m\lambda}{d} \tag{2}$$

$m = 0, \pm1, \pm2, \pm3$. 方程(1)、(2)表明，N 条缝的第3级极大及其倍数处实际强度为零. $j = \pm3$ 的缺级对应于单缝衍射的第1级极小($m = \pm1$).

36.48 一波长 λ 的光束以入射角 ϕ 入射到光栅常数为 D 的光栅上，证明衍射主极大满足的条件为

$$j\lambda = D(\sin\theta - \sin\phi),$$
$$j = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$$

证 ☞ 如图36-17，入射线、光栅法线、衍射线均在纸面内. 设光源到光栅及光栅到观察栅的距离

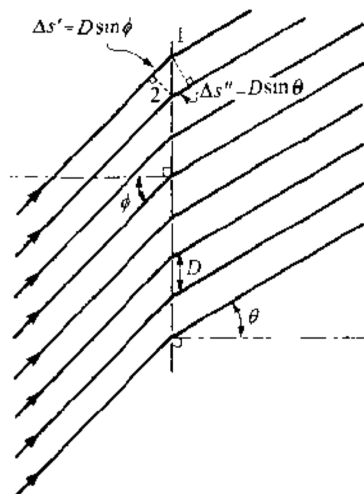


图 36-17

都比光栅尺寸大得多,因此图中 ϕ 和 θ 对所有缝均相同.如图中所示,入射光到达缝 1 和缝 2 的路程差为 $\Delta s'=D\sin\phi$,而缝 2 和缝 1 处,衍射光从光栅到达屏上的距离相差 $\Delta s''=D\sin\theta$,因此,总的路程差为

$$l_2-l_1=\Delta s''-\Delta s'=D(\sin\theta-\sin\phi) \tag{1}$$

$l_2=l_1$ 时出现中央衍射极大.由中央极大($m=0$)向上方,第 m 级极大出现在 $l_2=l_1+m\lambda$ 处,向下方,第 m 级极大出现在 $l_2=l_1-m\lambda$ 处.结合(1)式,可知,当

$$j\lambda=D(\sin\theta-\sin\phi)$$

$$j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots \text{时}$$

出现衍射主极大.

36.49　一束平行的 X 射线经一岩盐晶体衍射.当掠射角(晶体表面与射线之间的夹角)为 6°50′时,出现第 1 级强反射.反射晶面之间距离为 2.81 Å,求 X 射线的波长.

证　☞ 运用布拉格定律 $m\lambda=2d\sin\phi$,ϕ 是掠射角,$m=1$ 时,

$$\lambda=\frac{2d\sin\phi_1}{1}=\frac{(2)(2.81\ \text{Å})(0.119)}{1}=0.67\ \text{Å}$$

36.3　偏振光

36.50　当自然光以某一特定角度 θ_p 入射到光滑的介质表面时,反射光是振动方向垂直于入射平面的线偏振光.这就是布儒斯特定律.这一定律的物理基础是什么?

解　☞ 将入射波考虑为 $\boldsymbol{E}_{\parallel}$(在入射面内)和 $\boldsymbol{E}_{\perp}$(垂直于入射面)的叠加.图 36-18 只画出了 $\boldsymbol{E}_{\parallel}$.在经典模型中,$\boldsymbol{E}_{\parallel}$ 使介质表面的电荷振动,产生透射波,同时也产生反射波,在反射角 θ_r 方向传播.只有当入射角为一特定值,垂直于透射光的振动轴与反射光方向一致时,没有 $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ 的反射波.这是根据下列事实得出的:经典的线性振子在其加速度方向辐射强度为零.因此,在临界入射角 θ_p(布儒斯特角)时,只有 $\boldsymbol{E}_{\perp}$ 被反射.

36.51　参考题 36.50,导出布儒斯特角的公式.

解　☞ 由图 36-18,$\boldsymbol{E}_{\parallel}$ 无反射的条件可以表示为

$$\theta_p+90°+\theta_t=180° \quad \text{即} \quad \theta_t=90°-\theta_p$$

因此

$$\sin\theta_t=\cos\theta_p \tag{1}$$

结合斯涅耳折射定律

$$n_i\sin\theta_p=n_t\sin\theta_t. \tag{2}$$

可得

$$\tan\theta_p=\frac{n_t}{n_i} \tag{3}$$

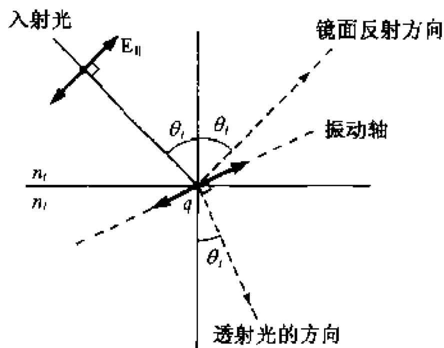


图 36-18

36.52　线性偏振光以布儒斯特角入射到介质表面上.若入射光的偏振化方向(a)平行于入射面,(b)垂直于入射面,反射光和折射光的情况如何?

解　☞ (a)以布儒斯特角入射时,平行分量完全折射,因此无反射光.

(b)部分反射,部分折射.两部分光线均是垂直于入射面的线偏振光.

36.53　光从折射率为 1.96 的铅玻璃表面反射,入射角为多少时反射光为完全线偏振光?

解 ☞ 由布儒斯特定律，$n=\tan\phi_{1p}=1.96$，$\phi_{1p}=63°$．以此角度入射时，反射光为线偏振光．

36.54 一人观察从水($n_2=1.33$)表面反射的太阳光．问 β 等于多少时观察到线偏振光．(见图 36-19)．

解 ☞ 要使反射完全偏振，入射角需满足布儒斯特角．

$$\tan\theta_{1p}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1.33}{1.00},\quad \theta_{1p}=53°\quad \beta=90°-\theta_{1p}\approx37°$$

36.55 要计算透明介质的电容率，希望知道其折射率，光在一介质表面反射时，布儒斯特角为 58°．求介质的折射率．

解 ☞ 由布儒斯特定律，

$$n=\tan\theta_{1p}=\tan58°=1.60$$

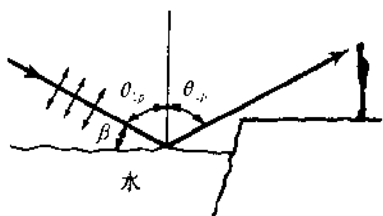


图 36-19

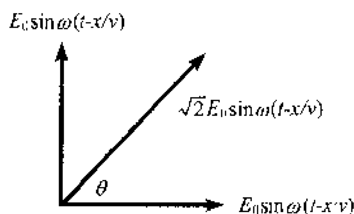


图 36-20

36.56 两束沿 x 方向传播的相干线偏振光振幅相同．其中一束 $\boldsymbol{E}$ 矢量在 y 方向，另一束在 z 方向．若两束光相位相同．合成光是何种光？若两束光的振幅均为 E_0，合成光的振幅是多少？

解 ☞ 图 36-20 画出了 t 时刻 x 处振动方向互相垂直的两偏振光的振幅．其合振幅为$1.414E_0$．由于两振动相位相同，$\theta=45°$不变，故合成光也是线偏振光．

36.57 设空间某点一电场为 $E_x=20\cos\omega t$ (V/m)，$E_y=40\cos(\omega t+\pi)$ (V/m)，求偏振方向．

解 ☞ 图 36-21 表示某时刻 $E_x>0$，E_y 与 E_x 反相意味着 E_x 指向 $+x$ 轴时 E_y 在负 y 方向．而它们的振幅比为 1∶2，所以合矢量 $\boldsymbol{E}$ 大小为 $\sqrt{40^2+20^2}=20\sqrt{5}$，偏振方向：$\theta=\arctan\left(\frac{40}{20}\right)=63.4°$，在 x 轴下方．

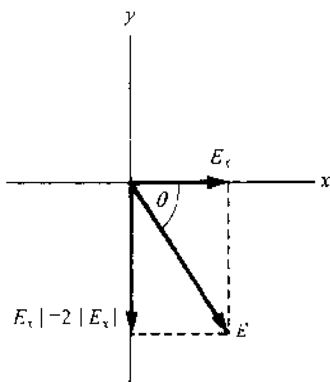


图 36-21

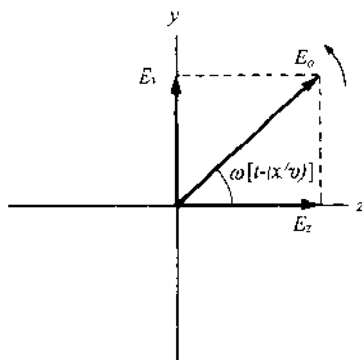


图 36-22

36.58 两个相干的、等振幅、偏振化方向互相垂直、相位差为 90°的线偏振光叠加形成圆偏振光．证明若两束光 $E_y=E_0\sin\{\omega[t-(x/v)]\}$，$E_z=E_0\cos\{\omega[t-(x/v)]\}$，合成光的电矢量振幅为常数，方向在垂直 x 轴的圆周上旋转．若 E_y、E_z 的振幅不等，则形成椭圆偏振光．

证 ☞ 设长度为 E_0 的矢量在 zy 平面内以角速度 ω 旋转，它在任意时刻与 z 轴之间的夹角为

$\omega[t-(x/v)]$，如图 36-22 所示. 其分量则为

$$E_x=E_0\cos\{\omega[t-(x/v)]\}\ \text{和}\ E_y=E_0\sin\{\omega[t-(x/v)]\}.$$

显然，旋转矢量的大小为两个线偏振光的矢量和.

36.59　当强度为 I' 的圆偏振光入射到一偏振片上时，求透射强度.

解　☞ 设偏振片的偏振化方向沿 y 轴. 因为圆偏振光振幅为 E_0，所以 $I'\sim|E_0|^2$. 透射光振幅为 $E_y=E_0\sin\{\omega[t-(x/v)]\}$；而 $I\sim\langle E_y^2\rangle=\frac{1}{2}|E_0|^2$，$\langle\rangle$ 表示时间平均，因此 $I=\frac{1}{2}I'$.

36.60　证明：一粒子经历两互相垂直、频率相同、相位相反的简谐振动，其轨迹为一椭圆.

证　☞ 设振动分别沿 x 和 y 轴，相位差为 α，即

$$x=A\sin\omega t,\ y=B\sin(\omega t-\alpha)$$

$$\frac{y}{B}=\sin\omega t\cos\alpha-\cos\omega t\sin\alpha=\frac{x}{A}\cos\alpha+\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\alpha$$

$$\left(\frac{y}{B}-\frac{x}{A}\cos\alpha\right)^2=\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\alpha$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\alpha=\sin^2\alpha \tag{1}$$

这是椭圆方程，其长短轴与 x 轴和 y 轴有一倾角.

36.61　由题 36.60 中式(1)，证明若选取适当的变量代换

$$x=x'\cos\psi-y'\sin\psi,\ y=x'\sin\psi+y'\cos\psi$$

将得到如图 36-23 所示的椭圆.

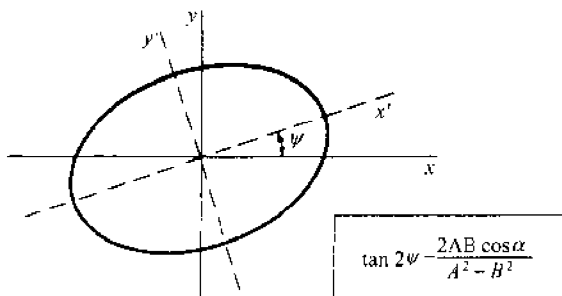


图 36-23

证　☞ 将变量代换代入题 36.60 中式(1)，令 $\cos\psi\equiv c$，$\sin\psi\equiv s$，得

$$\frac{(x'c-y's)^2}{A^2}+\frac{(x's+y'c)^2}{B^2}-\frac{2(x'c-y's)(x's+y'c)}{AB}\cos\alpha=\sin^2\alpha$$

整理得

$$(x')^2\left[\frac{c^2}{A^2}+\frac{s^2}{B^2}-\frac{2cs\cos\alpha}{AB}\right]+(y')^2\left[\frac{s^2}{A^2}+\frac{s^2}{B^2}-\frac{2cs\cos\alpha}{AB}\right]+$$

$$2x'y'\left[-\frac{cs}{A^2}+\frac{cs}{B^2}+\frac{(s^2-c^2)\cos\alpha}{AB}\right]=\sin^2\alpha$$

这是椭圆方程. 若交叉项(最后的括号项)为零其对称轴沿 x'、y' 轴，这就要求

$$cs\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{B^2}\right)=\frac{(s^2-c^2)\cos\alpha}{AB}\Rightarrow\frac{cs}{c^2-s^2}=\frac{AB\cos\alpha}{A^2-B^2}$$

$$\cos\psi\sin\psi=\frac{\sin2\psi}{2},\quad \cos^2\pi\psi-\sin^2\psi=\cos2\psi$$

因此要求

$$\tan2\psi=\frac{2AB\cos\alpha}{A^2-B^2}$$

36.62　推导马吕斯定律 $I=I_0\cos^2\theta$.

解 ☞ 设入射的偏振光为 $E = E_0\sin\omega t$，与透光轴方向的夹角为 θ，则它等价于下列两偏振光

$$E_{\parallel} = (E_0\cos\theta)\sin\omega t, \quad E_{\perp} = (E_0\sin\theta)\sin\omega t$$

$E_{\parallel}$ 平行于透光轴，$E_{\perp}$ 垂直于透光轴．由于强度正比于振幅的平方，且只有 $E_{\parallel}$ 能通过，所以

$$\frac{I}{I_0} = \frac{(E_0\cos\theta)\cdot(E_0\cos\theta)}{E_0\cdot E_0} = \cos^2\theta$$

36.63 若一束偏振光透过检偏器后强度减少为原来的 $\frac{1}{10}$，入射光振动方向与检偏器偏振化方向之间的夹角为多少？

解 ☞ 运用马吕斯定律

$$I = 0.1I_0 = I_0\cos^2\theta, \quad \cos^2\theta = 0.1,$$

$$\cos\theta = \sqrt{0.1} = 0.316, \quad \theta = 71.6°$$

36.64 一偏振光的振动方向与偏振片的偏振化方向之间夹角为 65°，透光比率为多少？

解 ☞ 由马吕斯定律，透光强度 I' 与入射强度 I 之比为

$$\frac{I'}{I} = \cos^2\theta = \cos^2 65° = 0.179$$

36.65 自然光强度为 I'，两个偏振片偏振化方向之间的夹角为 θ，自然光穿过两偏振片后强度为多少？

解 ☞ 自然光在这里相当于两互相垂直的偏振光，我们可以假设其中一个方向平行于透光轴，因此穿过第一个偏振片强度为 $\frac{1}{2}I'$，再经过第二个偏振片，由马吕斯定律知 $I = \left(\frac{1}{2}I'\right)\cos^2\theta$

36.66 (a)自然光穿过两偏振片，它们的透光轴之间成 30°角，设两偏振片相同，求穿出的光强占原光强的比率，(b)若旋转第二个偏振片至出射光强为原光强的 10%，θ 已变为多少？

解 ☞ (a)对第二个偏振片用马吕斯定律．

$$I_1/I_2 = \cos^2\phi = \cos^2 30° = 0.866^2 = 0.75$$

入射到第 2 个偏振片上的光强的 $\frac{3}{4}$ 透过去了．而第一个偏振片使原光强减小一半，因此，$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$．(b)此时，最后光强是进入第二个偏振片的光强的 20%，因此

$$I_1/I_2 = 0.2 = \cos^2\phi, \quad \phi = 63.4°$$

36.67 两偏振片开始时平行排列，然后一偏振片绕轴旋转 60°，开始与后来透光强度的比为多少？

解 ☞ 令 I_0 为穿过第一个偏振片的光强．当透光轴平行时，I_0 全部通过第二个偏振片．当它们夹角为 ϕ 时，按马吕斯定律：

$$I/I_0 = \cos^2\phi = \cos^2 60° = 0.5^2 = 0.25.$$

因此

$$I_0/I = 4$$

36.68 强度为 I_0 的线偏振光通过两偏振片．第一个偏振片的透光轴与入射偏振光振动方向成 45°角．第二个偏振片的透光轴则与入射偏振光振动方向成 90°角(图 36-24)，问此系统的出射光强及振动方向如何？

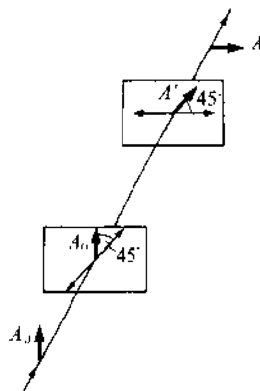


图 36-24

解 ☞ 因为第一个偏振片与其入射光偏振化方向之间的夹角为 45°，所以经过第一个偏振片后 $I' = I_0\cos^2 45° = 0.5I_0$．此透射光振幅 A' 与第 2 个偏振片的透光轴夹角也是 45°，所以最后光强为 $I = I'\cos^2 45° = 0.5I' = 0.25I_0$．末振幅矢量 A 与初振幅矢量 A_0 之间的夹角为 90°．

注意,若只存在第二个偏振片,出射光强为零,这验证了光振动的矢量性.

36.69　起偏器和检偏器的透光轴方向成30°角.(a)若强度为I_0的自然光入射,透射光强为多少?(b)若偏振光入射此系统,偏振光的振动方向与起偏器成30°角,透射光强为多少?

解　(a)一半光强透过起偏器,因此入射到检偏器上的光强$I=\frac{1}{2}I_0$,而通过检偏器的光强为$I'=I\cos^2\theta=\frac{1}{2}I_0\cos^2 30°\approx0.375I_0$.(b)经过起偏器后光强为$I=I_0\cos^2\theta=I_0\cos^2 30°=0.75I_0$.它的振动方向与检偏器透光轴之间的夹角为30°,因此,透过检偏器的光强为$I'=I\cos^2\theta=0.75I_0\cos^2 30°=0.563I_0$.

36.70　强度为I_0的线偏振光入射到一对偏振片上,令θ_1和θ_2分别表示入射光的振幅与第一和第二个偏振片透光轴之间的夹角,证明透射光的强度为$I=I_0\cos^2\theta_1\cos^2(\theta_1-\theta_2)$.

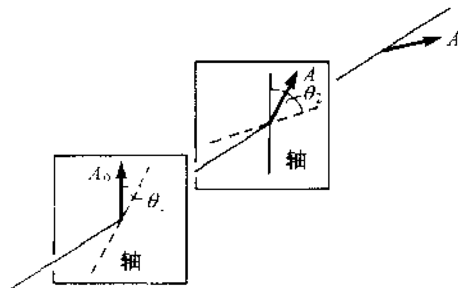


图 36-25

证　经过第一个偏振片后的光强为$I=I_0\cos^2\theta_1$.该光振动方向在第一个偏振片的透光轴方向,因此它与第二个偏振片的透光轴之间的夹角为$\theta_2-\theta_1$(见图36-25).所以,经过第二个偏振片后的光强为

$$I'=I\cos^2(\theta_2-\theta_1)=I_0\cos^2\theta_1\cos^2(\theta_2-\theta_1)$$

36.71　两偏振片透光轴之间的夹角为45°.第三块偏振片紧随其后,其透光轴与第一块偏振片透光轴成90°.若三偏振片均为理想情况,通过的光与最大可能的透射光(二片透光轴平行)之比为多少?

解　后两块偏振片均引起$\cos^2 45°=1/2$的强度减小,因此,总的减少因子为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

36.72　一起偏器与检偏器的透光轴互相垂直,第三块偏振片置于两者之间.其透光轴与起偏器和检偏器均成45°.(a)若自然光入射该系统,出射光强如何?(b)若除去中间的偏振片,出射光强如何?

解　(a)通过起偏器的光强为$\frac{1}{2}I_0$,偏振方向与中间偏振片的透光轴方向夹角为45°,因此透过中间偏振片的光强为$I=\frac{1}{2}I_0\cos^2 45°=0.25I_0$,其偏振方向与检偏器透光轴也成45°角,穿出检偏器的光强则为$I'=I\cos^2 45°=0.125I_0$.

(b)若除去中间偏振片,则无光透出.(见题36.68.)

36.73　四块理想的偏振片叠放在一起,每一块前面的偏振片的透光轴顺时针转过30°.因此最后一块与第一块正交.自然光入射时,透射光强为多少?

解　第一块偏振片透过一半光强.每一块前面的偏振片转过30°角,透射光强为入射光强的$\cos^2 30°=\frac{3}{4}$.最后的透射光强为自然光光强的$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3=0.211$.

36.74　一块四分之一波片对波长$\lambda_0=589$ nm的光的折射率为$n_\perp=1.732$, $n_\parallel=1.45$,对此波长波片的最小厚度应为多少?

解　寻常光通过厚度为l的晶片的光程(见题34.53)为$n_\perp l$,非常光的光程则为$n_\parallel l$.因为两光透过晶片时必须有90°的相位差,因此光程差应为$\left(k+\frac{1}{4}\right)\lambda_0$, $k=0,1,2,\cdots$.最小厚度满足.

$$\frac{\lambda_0}{4}=l(n_\perp-n_\parallel)$$

即

$$l = \frac{\lambda_0}{4(n_\perp - n_\parallel)} = \frac{589\ \text{nm}}{4(1.732 - 1.456)} = 534\ \text{nm}$$

36.75 自然单色光入射到互相正交的起偏器和检偏器上,起偏器和检偏器之间放有$\frac{1}{4}$波片,起偏器的透光轴与波片的光轴之间的夹角为45°.(a)试述通过$\frac{1}{4}$波片后的光的特性,(b)入射光强有多少通过了检偏器?

解 ☞ (a)入射到$\frac{1}{4}$波片上的线偏振光与波片光轴夹角为45°.该光在平行和垂直光轴方向上的分量振幅均为$E_1/\sqrt{2}$(见题36.56),在穿过波片后,两分量产生$\frac{1}{4}\lambda$的相位差,所以出射光的振幅为$\frac{E_1}{\sqrt{2}}$的圆偏振光(见题36.58).

(b)设I_0为入射光强,则穿过起偏器的光强为$\frac{1}{2}I_0$.穿过$\frac{1}{4}$波片的两个分量光强均为$\frac{1}{2}I_1$(这可由圆偏振光振幅$E_1/\sqrt{2}$不变看出)总光强因此为I_1.最后利用题36.59可得,穿过检偏器的光强为$\frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{4}I_0$.

第三十七章 狭义相对论

37.1 洛伦兹变换;长度收缩;时间延缓;速度变换

37.1 考虑两个惯性坐标系 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}'$,当 $t=t'=0$ 时,两坐标系重合.其中 $\mathscr{S}'$ 沿 x 方向相对 $\mathscr{S}$ 作速度为 v 的匀速运动,运动过程中保持坐标轴相互平行.令 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$,从 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ 的洛伦兹变换为

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1}$$

$$y' = y \tag{2}$$

$$z' = z \tag{3}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{4}$$

利用惯性系的等价性原理,写出从 $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ 的洛伦兹变换.

解 ☞ 对于惯性系中的观察者,变换方程的形式应保持一致.只需将 v 变为 $v' = -v$,同时交换变量与自变量,$\mathscr{S}'$ 中的观察者就得到了由 (x', y', z', t') 表示的 (x, y, z, t).所以,

$$x = \gamma'(x' - v't) = \gamma(x' + vt') \tag{5}$$

$$y = y' \tag{6}$$

$$z = z' \tag{7}$$

$$t = \gamma'\left(t' - \frac{v'x'}{c^2}\right) = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{8}$$

其中用到了

$$\gamma' \equiv \frac{1}{\sqrt{1-[(v')^2/c^2]}} = \frac{1}{\sqrt{1-[(-v)^2/c^2]}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \gamma$$

37.2 通过对洛伦兹变换作直接的代数运算获得题 37.1 的结果.

解 ☞ 通过求解题 37.1 中的(1)和(4)式,可得由 x' 和 t' 表示的 x 和 t.由(1)式求得

$$x = \frac{x'}{\gamma} - vt \tag{9}$$

由(4)式求得

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{vx}{c^2} \tag{10}$$

将(10)式代入(9)中,求得

$$x = \frac{x'}{\gamma} + \frac{vt'}{\gamma} + \frac{v^2x}{c^2}$$

解出 x 得

$$x = \frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(\frac{x' + vt'}{\gamma}\right) = \gamma(x' + vt') \tag{11}$$

将(11)式代入(10)式,求得

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{\gamma vx'}{c^2} + \frac{\gamma v^2 t'}{c^2} = \gamma\left[t'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{vx'}{c^2}\right] = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{12}$$

方程(11)和(12)即为题 37.1 中的(5)和(8)式;在 $y'z'$ 的表达式中只需左右调换即得 y, z 的表达式.

37.3 在题 37.1 中,当两坐标系原点 O' 和 O 重合时($t=t'=0$),在共同原点处的一盏灯点亮.$\mathscr{S}$ 中的观察者看到一个波前从 O 点以速度 c 扩散.证明,在相对 $\mathscr{S}$ 速度为 v 的坐标系 $\mathscr{S}'$ 中的观察者看到一个相似的波前从 O' 点扩散.

证 ☞ $\mathscr{S}$ 中的波前方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{1}$$

(1)式的洛伦兹变换为(题 37.1 中方程(5)~(8))

$$\left[\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right]^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2\left[\frac{t' + (vx'/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right]^2$$

化简得

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2 \tag{2}$$

方程(2)表示从 O' 以速度 c 扩散的球形波前.实际上,可以用另外的方法证此题.根据狭义相对论的解释,$\mathscr{S}$ 系及 $\mathscr{S}'$ 系中的观察者应看到同一类型的波.这就要求两个参照系内的坐标应满足特定的形式——洛伦兹变换.见题 37.5.

37.4 当惯性坐标系 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}'$ 重合时,在共同原点处发生一道闪电,此时两惯性系中的观察者分别位于扩散的球面光波中心处.实验发现,每个观察者测得的光速都为 c.若根据伽利略变换,$x' = x - vt$,则无法得出上述结论,因此需作修正,$x' = \gamma(x - vt)$,γ 为待求值.根据等价性原理,对于相反变换,$x = \gamma(x' - v't') = \gamma(x' + vt')$ 上式仍成立,此处用到了 $v' = -v$.但在一般情况下,t' 有可能不等于 t.若 x 和 x' 分别为球面波在 t 和 t' 时与坐标轴的交点:(a)求 x'/t' 的值,(b)求 x/t 的值;(c)利用(a)、(b)的结果消去变换方程中的 x 和 x' 并计算 γ.

解 ☞ 此题作了通常的假设,当 $v' = -v$ 时,$\gamma' = \gamma$.(a)t' 时刻,$\mathscr{S}'$ 中的观察者看到光波球面与正 x' 轴交于点 $x' = ct'$ 处,所以 $x'/t' = c$.(b)t 时刻,$\mathscr{S}$ 中的观察者看到光波球面与正 x 轴交于点 $x = ct$ 处,所以 $x/t = c$.

(c)因为(a)、(b)中的方程描写的是同时事件,我们利用 $x' = ct'$ 和 $x = ct$ 可得

$$ct' = \gamma(ct - vt) \tag{1}$$

$$ct = \gamma(ct' + vt') \tag{2}$$

(1)、(2)式相乘得

$$c^2tt' = \gamma^2(c^2 - v^2)tt'$$

求出 γ 得

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \tag{3}$$

37.5 根据题 37.4 中 γ 的表达式,用 t 和 x 表示出 t'.

解 ☞ 若把(3)式代入变换方程(题 37.4),可得到

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}(x - vt) \tag{4}$$

及

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}(x' + vt') \tag{5}$$

(4)(5)式为 O 和 O' 处观察者看到的任一交点的坐标.利用(4)式消去(5)式中的 x',则有

$$x = \frac{(x - vt)}{1 - (v^2/c^2)} + \frac{vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

解出 t' 得

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

上式即为 t' 的标准洛伦兹变换方程.

37.6 $\mathscr{S}$ 中的观察者看到在 $x = 100$ km, $y = 10$ km, $z = 1$ km, $t = 0.5$ ms 时,一盏电灯熄灭.试问,在沿共同的 xx' 轴相对 $\mathscr{S}$ 以速度 $-0.8c$ 运动的 $\mathscr{S}'$ 系中的观察者看到这一事件发生的坐标 x',y',z' 和 t' 为何值?

解 ☞ 根据洛伦兹变换,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{100\ \text{km} - (-0.8 \times 3 \times 10^5\ \text{km/s})(5 \times 10^{-4}\ \text{s})}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 367\ \text{km}$$

$$t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{5\times10^{-4}\text{s}-[(-0.8)(100\text{ km})]/(3\times10^5\text{ km/s})}{\sqrt{1-0.8^2}} = 1.28\text{ ms.}$$

$$y' = y = 10\text{ km}, z' = z = 1\text{ km}$$

37.7 在 $t'=0.4$ ms 时刻，在 $\mathcal{S}'$ 系中测得某粒子的位置为 $x'=10$ m, $y'=4$ m, $z'=6$ m,（注意此为同一事件）. 计算当 v 取下列不同值时，在 $\mathcal{S}$ 中对应的 x, y, z, t 的值. (a) $v=+500$ m/s, (b) $v=-500$ m/s, (c) $v=2\times10^8$ m/s.

解 ☞ 根据题 37.1 中的反向洛伦兹变换，

(a) $$x=\frac{10+(500)(4\times10^{-4})}{\sqrt{1-(500^2/c^2)}}\approx10+(500)(4\times10^{-4})=10.2(\text{m}), y=4\text{ m}, z=6\text{ m}$$

$$t=\frac{(4\times10^{-4})+[(500)(10)]/c^2}{\sqrt{1-(500^2/c^2)}}\approx4\times10^{-4}\text{ s}$$

(b) $$x=\frac{10-(500)(4\times10^{-4})}{\sqrt{1-(500^2/c^2)}}\approx10-(500)(4\times10^{-4})=9.8(\text{m}), y=4\text{ m}, z=6\text{ m}$$

$$t=\frac{(4\times10^{-4})-[(500)(10)]/c^2}{\sqrt{1-(500^2/c^2)}}\approx4\times10^{-4}\text{ s}$$

(c) $$x=\frac{10+(2\times10^8)(4\times10^{-4})}{\sqrt{1-(2/2.997925)^2}}=\frac{8.001\times10^4}{0.744943}=107.4\ (\text{km}), y=4\text{ m}, z=6\text{ m}$$

$$t=\frac{(4\times10^{-4})+[(2\times10^8)(10)]/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=5.37\times10^{-4}\text{ s}$$

37.8 在 $t=1$ ms 时刻（$\mathcal{S}$ 系中），$x=5$ km 处发生爆炸. 若对于 $\mathcal{S}'$ 中的观察者看见爆炸发生在 $x'=35.354$ km 处，则此事件发生的时间 t' 又为何值？

解 ☞ 根据关于 x' 的洛伦兹变换得

$$35.354\times10^3=\frac{(5\times10^3)-v(10^{-3})}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad v=-3\times10^7\text{ m/s}$$

代入关于 t' 的洛伦兹变换

$$t'=\frac{10^{-3}+[(3\times10^7)(5\times10^3)]/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=1.0067\text{ ms}$$

37.9 一艘静止长度为 100 m 的宇宙飞船飞过地球上一位观察者时所需时间为 4 μs, 求它相对于地球的速度.

解 ☞ 地球上的观察者测得此飞船的长度 $l=100\sqrt{1-(v^2/c^2)}$(m), 其中 v 为飞船相对他的速度，则他测得的飞船经过时间为 l/v, 则有

$$100\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}=4\times10^{-6}$$

求得 $v=0.083c$. 而对于飞船而言，观察者经过它的时间为

$$\Delta t=\frac{4\times10^{-6}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\quad(\text{s})$$

令 $\Delta t=100/v$(s), 求得 v 与上述值相同.

37.10 在 $t=t'=0$ 时刻，一艘宇宙飞船以相对速度 v 经过地球. 当地球上的时钟读数为 t_1 时，一艘更快的宇宙飞船以相对速度 $V>v$ 飞离地球，并当地球上的时钟显示 t_2 时刻时追上前一艘宇宙飞船，其中 $vt_2=V(t_2-t_1)$, 即 $t_2=Vt_1/(V-v)$. (a) t_1-0 是固有的时间间隔还是膨胀的时间间隔？(b)当地球上时钟读数为 t_1 时，较慢的宇宙飞船上的钟读数为何值？(c)此时地球离宇宙飞船有多远？(d) t_2-0 是固有的时间间隔还是膨胀的时间间隔？(e)当被较快的宇宙飞船追上时，前一艘飞船上的钟显示什么时刻？(f)在较慢飞船内的参考系中，后一艘飞船从起飞到追上前一艘飞船共需多长时间？(g)在上述参考系中，追赶过程有多远？

解 ☞ (a) t_1-0 是固有时间间隔，因为在固定于地球上的参考系内，两时刻发生的事件发生在同一地点. (b)在相对宇宙飞船静止的坐标系内，两时刻的事件发生在不同地点，所以从这个坐标系

内读到的时间段是膨胀的. 根据时间的洛伦兹变换, 宇宙飞船内时钟的读数为 $t'_1 = \gamma[t_1 - (v_0/c^2)] = \gamma t_1$. (c)地球相对宇宙飞船的速度为 $-v$, 所以对飞船而言, 地球后退的距离为 $|-v|t'_1 = \gamma v t_1$. (d) $t_2 - 0$ 为膨胀的时间段, 因为在地球上的坐标系内, 两时刻对应的事件发生在不同地点. (e)下列事件在飞船参考系内发生在同一地点, $t'=0$ 时刻, 地球经过飞船; $t = t'_2$ 时, 第二艘飞船又经过飞船. 根据时间差的洛伦兹变换, $\Delta t = \gamma\{\Delta t' + [(v\Delta x')/c^2]\}$, 而 $\Delta x' = 0$, 得到 $\Delta t = \gamma\Delta t'$. 因为 $\Delta t' = t'_2 - 0 = t'_2$, $\Delta t = t_2 - 0 = t_2$, 所以 $t'_2 = t_2/\gamma$, $t'_2 - 0$ 为固有时间段. (f)结合(b)和(e)的结果. 对于飞船参考系, 追及时间 $T'_p = t'_2 - t'_1 = (t_2/\gamma) - \gamma t_1$. (g)由(c)的结果得, 在飞船参考系内, 追及过程中, 第二艘飞船经过的路程为 $\gamma v t_1$

37.11 在题 37.10 中, 用(g)的结果除以(f)的结果得到第二艘飞船相对于第一艘飞船的速度. 将此速度值与利用速度的洛伦兹变换得到的结果比较.

解 ☞ 在飞船参考系内, 结合(f)和(g)的结果, 求得第二艘飞船的速度 V' 为

$$V' = \frac{\gamma v t_1}{(t_2/\gamma) - \gamma t_1} \tag{1}$$

在题 37.10 中得到 t_2 为

$$t_2 = \frac{V t_1}{V - v} \tag{2}$$

联立(1)、(2)两式得

$$V' = \frac{\gamma v t_1}{V t_1/[\gamma(V - v)] - \gamma t_1} = \frac{(V - v)v}{(V/\gamma^2) - (V - v)}$$

因为 $1/\gamma^2 = 1 - (v^2/c^2)$, 推得

$$V' = \frac{(V - v)v}{(-Vv^2/c^2) + v} = \frac{V - v}{1 - (Vv/c^2)}$$

比较发现, 此结果与洛伦兹速度变换相同(见题 37.26), 只是采用了不同符号表示物理量.

37.12 在 $\mathcal{S}'$ 系中校准的钟位于点(x', y', z'), 在某时刻此钟读数为 200 s, 一段时间后, 此钟读数为 300 s($\mathcal{S}'$ 系中两事件发生在同一地点). 当 v 取下列值时, 计算两事件在静止参考系 $\mathcal{S}$ 内的时间差: (a) $v = 2\times10^5$ m/s, (b) $v = 2\times10^8$ m/s.

解 ☞ (a) $\Delta t = \dfrac{100}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 100.0000223$ s, (b) $\Delta t = 134.2385$ s

在(a)中, 两时刻几乎相等, 而在(b)中, 发现 $\mathcal{S}'$ 中的钟走得比 $\mathcal{S}$ 中的钟慢.

37.13 在实验室中发射一束放射性粒子, 测得每个粒子的平均寿命为 20 ns, 之后便衰变为别的粒子. 若此放射性粒子静止时, 平均寿命为 7.5 ns. 试求发射粒子束的速度为多少?

解 ☞ 有时机械运动直接影响粒子的寿命, 由惯性时钟给出的粒子的固有寿命遵从时间膨胀关系

$$t_p = t_0\sqrt{1-(v/c)^2} \quad \text{即} \quad 0.75\times10^{-8} = (2\times10^{-8})\sqrt{1-(v/c)^2}$$

t_p 表示当实验室时钟显示 2×10^{-8}时, 运动时钟的读数值. 两边平方, 解出 $v = 0.927c = 2.78\times10^8$ m/s.

37.14 一种细菌在 20 天内个数翻倍, 现将 2 个这种细菌放在宇宙飞船内带离地球 1000 天(地球系中的时间), 在这段时间内, 飞船的速度为 $0.9950c$. 问当飞船返回地球时, 细菌变为多少个?

解 ☞ 在地球参考系中, 细菌的翻倍时间 $t_0 = t_p/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, 其中 $t_p = 20$ 天为固有翻倍时间, 所以 $t_0 = 20/\sqrt{1-0.9950^2} = 200$ 天. 1000 天相当于 5 个翻倍时间, 故细菌数目为 $2^6 = 64$.

37.15 惯性系 $\mathcal{S}'$中的观察者看到事件 1 发生在 $x'_1 = -L'/2$, $t'_1 = L'/2c$ 处, 事件 2 发生在 $x'_2 = L'/2$, $t'_2 = L'/2c$ 处, 即在 $\mathcal{S}'$ 系中 1, 2 为同时事件. 证明在另一相对 $\mathcal{S}'$ 以速度 V 沿 x'轴运动的惯性系 $\mathcal{S}''$ 中, 1, 2 事件不再为同时事件, $\Delta t = -(\gamma L'V)/c^2$, 其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-(V^2/c^2)}$.

证 ☞ 为简单起见,假设 $t''=t'=0$ 时刻,两惯性坐标系重合,$\mathscr{S}''$ 相对 $\mathscr{S}'$ 向右运动.求出变换方程为

$$x''=\gamma(x'-Vt') \tag{1}$$

$$t''=\gamma\left(t'-\frac{Vx'}{c^2}\right) \tag{2}$$

其中 $\gamma\equiv[1-(V^2/c^2)]^{-1/2}$.题中已知,事件1发生在 $x'_1=-L'/2, t'_1=L'/2c$ 处,事件2发生在 $x'_2=L'/2, t'_2=t'_1=L'/2c$ 处.由(2)式求得在运动坐标系内,事件1发生的时刻为

$$t''_1=\gamma\left[\frac{L'}{2c}-\frac{V(-L'/2)}{c^2}\right]=\frac{\gamma L'}{2c}\left(1+\frac{V}{c}\right)$$

事件2发生的时刻为

$$t''_2=\gamma\left[\frac{L'}{2c}-\frac{V(L'/2)}{c^2}\right]=\frac{\gamma L'}{2c}\left(1-\frac{V}{c}\right)$$

所以,$t''_2-t''_1=[(\gamma L')/2c][(-2V)/c]=-(\gamma L'V)/c^2$.在运动系内,事件2发生在事件1之前.

37.16 参照题37.15,(a)计算对于 $\mathscr{S}''$ 中的观察者,两事件之间的空间距离 $\Delta x''$ 为何值?(b)$\Delta x''$ 能否代表某物体的长度?并解释之.

解 ☞ (a)根据题37.15中的(1)式可得

$$\Delta x''\equiv x''_2-x''_1=\gamma(\Delta x'-V\Delta t')$$

其中 $\Delta x'\equiv x'_2-x'_1, \Delta t'\equiv t'_2-t'_1$.对于给定事件,$\Delta x'=L', \Delta t'=0$,所以 $\Delta x''=\gamma L'$.

(b)在(a)中求得的空间距离 $\Delta x''$ 不代表物体的长度,因为 x''_1 和 x''_2 不是同时测量的($t''_2\neq t''_1$).

37.17 某人在 $\mathscr{S}$ 系中 P_1(4000 m, −100 m, 200 m)点钉了一只钉,P_1 处时钟读数 $t=15\ \mu s$,与此同时——根据 P_2(3000 m, 500 m, 150 m)处校准时钟的读数——他的兄弟在 P_2 处也钉了一只钉(在 $\mathscr{S}$ 系中,两事件同时发生).若 $v=2\times10^8$ m/s,求在 $\mathscr{S}'$ 系中两事件发生的时刻分别为何值?

解 ☞ 利用题37.1中的(4)式

$$t'_1=\frac{(15\times10^{-6})-[(2\times10^8)(4000)]/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=8.187\ \mu s$$

$$t'_2=\frac{(15\times10^{-6})-[(2\times10^8)(3000)]/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=11.174\ \mu s$$

在 $\mathscr{S}'$ 系中,两事件不再同时发生.因此对于 $\mathscr{S}$ 系中的观察者,他认为 $\mathscr{S}'$ 系中已校准的时钟是不准的.

37.18 一名宇航员看到 t_1 时刻有一束太阳光子(太阳风的一部分)射过地球,之后,她又在 $t_2=t_1+\Delta t$ 时刻看到木星发射出一束无线电波.另外在从地球以速率 $|V|$ 飞往木星的火箭上的一名宇航员 O' 也看到了同样的事件.假设地球位于太阳到木星的直线内,且距木星 6.3×10^8 km 远.令 $|V|=0.50c, \Delta t=900$ s.计算在火箭上的宇航员 O' 看来,时间间隔 $\Delta t'$ 为何值?他是否会认为光子束导致无线电波的发射?

解 ☞ 设光子到达地球为事件1(在地球系 t_1 时刻),木星发射无线电波为事件2,发生时刻为 $t_2=t_1+\Delta t$.两事件的空间距离为 $\Delta x\equiv x_2-x_1$.从地球系 O 到火箭系 O' 的时间段变换方程为

$$\Delta t'=\gamma\left(\Delta t-\frac{V|\Delta x|}{c^2}\right)$$

利用题中数据得 $\gamma=2/\sqrt{3}$,所以

$$\Delta t'=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[900-\frac{0.5(6.3\times10^{11})}{3\times10^8}\right]=-173(\text{s})$$

说明在火箭系中,发射无线电波发生在光子束到达地球之前.所以,在火箭系中(或在其它任何参考系中),不是光子导致了无线电波的发射.

37.19 参照题37.18,是否存在另外的火箭系,满足两事件同时发生?若存在,此火箭相对地球的速度为多少?若不存在,说明理由.

解 ☞ 假设在速度为 V^* 的参照系内,两事件同时发生,即

$$\Delta t^* = \gamma^*\left(\Delta t - \frac{V^*\Delta x}{c^2}\right) = 0 \tag{1}$$

$\Delta x, \Delta t$ 为已知值,故可求得

$$\frac{V^*}{c} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{(3\times 10^8\ \mathrm{m/s})(900\ \mathrm{s})}{6.3\times 10^{11}\ \mathrm{m}} = \frac{3}{7}$$

为可能值.在速度$(3c/7)$从地球飞往木星的火箭系内,事件1和事件2同时发生.

37.20 参照题37.18,(a)假设光子束导致无线电波发射,求 Δt 的取值范围,(b)假设两事件相隔 $\Delta t = 60$ min,测得两事件时间间隔为固有值的观察者速度应为何值?并算出这一固有值.

解 ☞ (a)对于任意光子束可能引起的事件应满足,在所有参考系内,事件1和事件2的相隔时间为非负.参照题37.18中(1)式,应有任何 $V<c$, $\Delta t-[(V\Delta x)/c^2]$为正值,这就要求 $\Delta t \geqslant \Delta x/c$.光子束能引起的发射至少发生在光子束到达地球后$(6.3\times 10^{11}\ \mathrm{m})/(3\times 10^8\ \mathrm{m/s}) = 2.1\times 10^3$ s之后,即 $\Delta t \geqslant \Delta t_{\min} = 2100\ \mathrm{s} = 35.0$ min.(b)固有时间间隔为发生在同一给定地点的事件间隔.假设在某惯性系中(非"静止"坐标系)两事件的空间间隔为 $\Delta x \equiv x_2 - x_1$,时间间隔为 $\Delta t \equiv t_2 - t_1$.则能测到固有时间间隔的观察者 O' 应以恒定速度 V 在 t_1 时刻的 x_1 运动到 t_2 时刻的 x_2.由已知数据,可算出 $V = \Delta x/\Delta t = (6.3\times 10^{11}\ \mathrm{m})/(3600\ \mathrm{s}) = 1.75\times 10^8\ \mathrm{m/s} = 0.583c$.此时 $\sqrt{1-(V^2/c^2)} = 0.812$,固有时间间隔 $\Delta t' = \Delta t\ \sqrt{1-(V^2/c^2)} = (3600\ \mathrm{s})(0.812) = 2.92\times 10^3\ \mathrm{s} = 48.7$ min.任何一个相对 O' 运动的观察者 O'' 测出的时间间隔 $\Delta t''$ 均大于 $\Delta t'$.

37.21 当一艘宇宙飞船以水平速度 v 飞过地球表面时,飞船中的人拿出一根米尺,问当米尺从平行于飞船方向旋转到垂直于飞船方向时,此人能观察到什么现象?

解 ☞ 因为米尺与飞船中的人无相对运动,所以米尺长度不会改变,运动正常.但对于地球上的观察者,当米尺平行于飞船方向时,他测出米尺长度为$(1\ \mathrm{m})\sqrt{1-(v/c)^2}$,当米尺垂直于飞船方向时,米尺长度为1 m.

37.22 考虑在题37.1的坐标系 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}'$ 内,一块木板相对 $\mathscr{S}'$ 静止,中心在 $\mathscr{S}'$ 原点处.$\mathscr{S}'$ 中的观察者测得木板为正方形,边长为1 m.若在 $\mathscr{S}$ 中 $t=0$,两坐标系重合时,测得的木板形状和方向如何?假设在 $\mathscr{S}'$ 系中,木板各边各别平行于 x' 轴或 y' 轴.

解 ☞ 由洛伦兹变换得 $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$.若点 P 在 $\mathscr{S}$ 系中静止,则它在任何 t' 时刻的坐标为(x'_P, y'_P),而它在 $\mathscr{S}$ 系中 $t=0$ 时刻坐标为$(x_P, y_P) = [(x'_P/\gamma), y'_P]$.所以,图37-1(a)为木板在 $\mathscr{S}'$ 系内(任一 t' 时刻)的几何形状图37-1(b)为 $\mathscr{S}$ 系中 $t=0$ 时刻的几何形状.

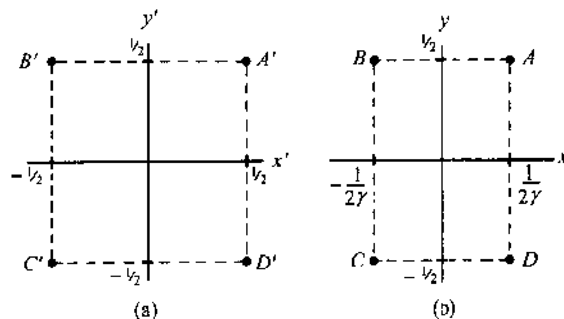


图 37-1

37.23 若在题37.22中,设在 $\mathscr{S}'$ 系中,木板各边与 x' 轴或 y' 的倾角为45°,结果又如何?

解 ☞ 见图37-2.

37.24 画在一艘宇宙飞船上的标志为圆内一条与竖直方向成45°的直线.当此宇宙飞船以相对速度 $0.95c$ 飞过另一艘宇宙飞船时,第二艘飞船上的观察者看到的标志上直线与

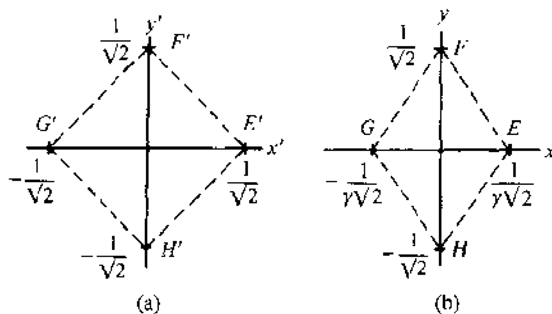


图 37-2

竖直方向夹角为何值?

解 ☞ 设 L 为在第一艘飞船上观察时直线的长度,则直线在水平方向及竖直方向的长度分别为 $L/\sqrt{2}$.在第二艘飞船上观察,水平方向长度缩短至 $(L/\sqrt{2})(\sqrt{1-(v^2/c^2)})$,竖直方向长度不变.所以

$$\tan\theta=\frac{\text{水平长度}}{\text{竖直长度}}=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},\tan\theta=\sqrt{1-0.95^2}=0.31,\theta=17.3°$$

37.25 O'系的 $x'y'$ 平面内有一个半径为 a' 的静止圆环,O'系相对惯性系 O 作速度为 V 的匀速运动.(a)证明,在 O 系中测量时,圆环成为一个椭圆环,长轴平行于 y 轴,长度为 $a=a'$,短轴长度 $b=a'\sqrt{1-(V^2/c^2)}$,(b)椭圆的离心率 $e\equiv\sqrt{1-(b/a)^2}$,推导出(a)中椭圆的离心率.

证 ☞ (a)为简单起见,假设圆环中心在 O' 系原点处,则圆方程为

$$(x')^2+(y')^2=(a')^2 \tag{1}$$

O 系中时刻 t 观察圆环,据洛伦兹变换 $x'=\gamma(x-Vt)$ 及 $y'=y$,(1)式变为

$$\gamma^2(x-Vt)^2+y^2=(a')^2,\ \frac{(x-Vt)^2}{(a'/\gamma)^2}+\frac{y^2}{(a')^2}=1 \tag{2}$$

(2)式为中心在 $x_c=Vt$,$y_c=0$ 处的标准椭圆方程,其长轴 $a=a'$,平行于 y 轴,短轴 $b=a'/\gamma=a'\sqrt{1-(V^2/c^2)}$,平行于 x 轴.

(b)根据离心率定义及(a)中结果,得到

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{a'}{a'\gamma}\right)^2}=\frac{|V|}{c}$$

37.26[c] 推导题 37.1 中从 $\mathscr{S}$ 系到 $\mathscr{S}'$ 系的径向速度变换公式.

解 ☞ 对洛伦兹坐标变换(1)和(4)求导得

$$\mathrm{d}x'=\frac{\mathrm{d}x-v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \mathrm{d}t'=\frac{\mathrm{d}t-(v/c^2)\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

两式相除得

$$u'_x=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}x-v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t-(v/c^2)\mathrm{d}x}=\frac{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)-v}{1-[(v/c^2)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)]}=\frac{u_x-v}{1-(v/c^2)u_x}$$

37.27[c] 在题 37.26 中求 y、z 方向的速度.

解 ☞ y 方向

$$\mathrm{d}y'=\mathrm{d}y,\mathrm{d}t'=\frac{\mathrm{d}t-(v/c^2)\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},u'_y=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{\mathrm{d}t-(v/c^2)\mathrm{d}x}$$

分子,分母同时除以 $\mathrm{d}t$,且考虑到 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u_x$,则有

$$u'_y=\frac{u_y\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-[(vu_x)/c^2)]},u'_z=\frac{u_z\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-[(vu_x)/c^2]}$$

37.28 火箭 A 向右飞行,火箭 B 向左飞行,相对地球的速度分别为 $0.8c$,$0.6c$.火箭 A 相对

火箭 B 的速度为多少?

解 ☞ 设 O、O' 分别为地球及火箭 B 上观察者.令 u_x 为火箭 A 相对地球的速度

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{0.8c - (-0.6c)}{1 - [(-0.6c)(0.8c)]/c^2} = 0.946c$$

此题也可利用其它参考系来求.例如,设 O 和 O' 分别为火箭 A 和火箭 B 上的观察者.令 u_x, u'_x 表示地球的速度,则有

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x}, 0.6c = \frac{-0.8c - v}{1 - (v/c^2)(-0.8c)}$$

解得 $v = -0.946c$,与上述结果相同.(负号是由于 v 表示 O' 相对于 O 的速度,是火箭 B 相对火箭 A 的速度.)

37.29 当速度取何值时,用伽利略变换求出的 u'_x 与洛伦兹变换所得的结果比较,误差为 2%?

解 ☞ 伽利略变换式为 $u'_{xG} = u_x - v$,而洛伦兹变换为

$$u'_{xR} = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{u'_{xG}}{1 - (v/c^2)u_x}, \frac{u'_{xR} - u'_{xG}}{u'_{xR}} = \frac{vu_x}{c^2}$$

当 vu_x 等于 $0.02c^2$ 时,用伽利略变换代替洛伦兹变换时,产生的误差为 2%.

37.30 当火箭以速度 v 经过地球时发射出一束光脉冲,问对于地球上的人来说,光脉冲的速度为何值?

解 ☞ 方法 1 c(根据狭义相对论假设 2)

方法 2 根据速度相加公式,观察到的速度为:(此处 $u = c$)

$$\frac{v + u}{1 + (uv/c^2)} = \frac{v + c}{1 + (v/c)} = \frac{(v + c)c}{c + v} = c$$

37.31 假设题 37.1 中参考系的运动速度 $v = 2 \times 10^8$ m/s,一粒电子相对 $\mathscr{S}'$ 系的速度为 u',其分量为

$$u'_x = 6 \times 10^7 \text{ m/s}, u'_y = 4 \times 10^7 \text{ m/s}, u'_z = 3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

求在 $\mathscr{S}$ 系中测量时,速度各分量为何值?速度大小 u 又为何值?

解 ☞ 根据题 37.26 及 37.27,$v \to -v$ 对应相反的变换,则有

$$u_x = \frac{(6 \times 10^7) + (2 \times 10^8)}{1 + [(6 \times 10^7)(2 \times 10^8)]/c^2} = 2.29 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$u_y = \frac{(4 \times 10^7)\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 + [(6 \times 10^7)(2 \times 10^8)]/c^2} = 2.63 \times 10^7 \text{ m/s}$$

同理得,$u_z = 1.97 \times 10^7$ m/s.所以

$$u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} = 2.32 \times 10^8 \text{ m/s}$$

37.32 静水中光速为 c/n,其中 $n \approx 1.33$(折射率).假设光射入以速度 $|V| \ll c$ 沿同一方向运动水中,证明在实验室中测到水中的光速为 $c/n + |V|(1 - 1/n^2)$.此结果于 19 世纪中期由法国物理学家菲佐(Fizeau)发现,只能用相对论才可解释之.

证 ☞ 令固定于水中的参考系为"静止"系.根据速度的洛伦兹变换,得到实验室速度 v_x 和"静止"系内速度 v'_x 的关系为

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + [(v'_x V)/c^2]} \tag{1}$$

(此处我们作了一般的假设,令"静止"坐标沿 x 轴正方向运动.)当水流动时,与水沿相同方向运动的光速为

$$v'_x = \frac{c}{n} \tag{2}$$

(应将"静水中的光速"理解为"光相对于水的速度".)根据(1)、(2)两式,在实验室中测出光速为

$$v_x = \frac{(c/n) + |V|}{1 + [(c|V|)/(nc^2)]}$$

因为 $|V| \ll c$,展开并省略有关项为

$$v_x = \left(\frac{c}{n} + |V|\right)\left[1 - \frac{|V|}{nc} + \left(\frac{|V|}{nc}\right)^2 - \cdots\right]$$

$$= \frac{c}{n} + |V| - \frac{|V|}{n^2} - \frac{|V|^2}{nc} + \frac{|V|^2}{n^3 c} + \cdots$$

$$\approx \frac{c}{n} + |V|\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

37.33　在"非静止"坐标系内一束光的速度分量为 v_x, v_y 和 v_z,即 $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$.根据洛伦兹速度变换,计算光在 O' 系内的速度,而 O' 以速度 V 相对 O 系沿 x 和 x' 轴方向运动,而 y 和 y' 轴相互平行.

解　☞ 根据题37.26和37.27给出的洛伦兹速度变换公式,求得在 O' 系中的光速的平方为

$$(v')^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2$$

$$= \left\{\frac{v_x - V}{1 - [(Vv_x)/c^2]}\right\}^2 + \left\{\frac{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}\, v_y}{1 - [(Vv_x)/c^2]}\right\}^2 + \left\{\frac{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}\, v_z}{1 - [(Vv_x)/c^2]}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{\{1 - [(Vv_x/c^2)]\}^2}\left[(v_x - V)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(v_y^2 + v_z^2)\right]$$

$$= \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^{-2}\left[v_x^2 - 2v_xV + V^2 + v_y^2 + v_z^2 - V^2\frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2}\right]$$

因为 $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$,所以

$$(v')^2 = \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^{-2}\left[c^2 - 2v_xV + V^2\left(1 - \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2}\right)\right]$$

由 $v = c$ 得 $1 - [(v_y^2 + v_z^2)/c^2] = v_x^2/c^2$,因此

$$(v')^2 = \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^{-2}\left(c^2 - 2v_xV + \frac{V^2v_x^2}{c^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1 - Vv_x}{c^2}\right)^{-2}c^2\left[1 - \frac{2Vv_x}{c^2} + \left(\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2\right]$$

$$= \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^{-2}c^2\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2 = c^2$$

即得 $v' = c$:在所有惯性系中,光速都为 c.

37.34　考虑三个惯性参考系 O, O' 和 O'',其中 O' 相对于 O 的速度为 V,O'' 相对于 O' 的速度为 V',两速度方向相同.写出 x, y, z, t 和 x', y', z', t' 的变换方程,以及 x', y', z', t' 和 x'', y'', z'', t'' 的变换方程.结合两类变换方程,得出 x, y, z, t 和 x'', y'', z'', t'' 之间的变换方程.

解　☞ 为简单起见,假设 x, x', x'' 三轴在运动过程中相互平行,O'' 系以速度 $V'\hat{x}'$ 相对 O' 系运动,O' 系以速度 $V\hat{x}$ 相对 O 系运动.从 O 系到 O' 系的洛伦兹变换为

$$x' = \gamma(x - Vt) \tag{1}$$

$$y' = y \tag{2}$$

$$z' = z \tag{3}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \tag{4}$$

其中 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (V^2/c^2)}$.从 O' 系到 O'' 系的洛伦兹变换为

$$x'' = \gamma'(x' - V't') \tag{5}$$

$$y'' = y' \tag{6}$$

$$z'' = z' \tag{7}$$

$$t'' = \gamma'\left(t' - \frac{V'x'}{c^2}\right) \tag{8}$$

其中 $\gamma' \equiv 1/\sqrt{1-[(V')^2/c^2]}$. 利用(1),(4)式消去(5),(8)式中的 x' 和 t',得

$$x'' = \gamma'\left[\gamma(x - Vt) - V'\gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)\right]$$

$$t'' = \gamma'\left[\gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) - \frac{V'\gamma(x - Vt)}{c^2}\right]$$

或写为

$$x'' = \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right)x - t\gamma\gamma'(V + V') \tag{9}$$

$$t'' = \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right)t - \frac{x}{c^2}\gamma\gamma'(V + V') \tag{10}$$

(9)式,(10)式,连同 $y'' = y$, $z'' = z$,便构成所求的用 (x, y, z, t) 表示 (x'', y'', z'', t'') 的方程组.

37.35 参见题 37.34,证明(9)、(10)两式等价于从 O 系到 O'' 系直接的洛伦兹变换,其中 O'' 系相对于 O 系的速度 V'' 等于

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + [(VV')/c^2]}$$

证 ☞ 根据题 37.34 中(9)、(10)两式,可看出:若作如下定义,

$$\gamma'' \equiv \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right) \tag{1}$$

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + [(VV')/c^2]} \tag{2}$$

则得到从 O 系到 O'' 系的标准变换形式

$$x'' = \gamma''(x - V''t) \tag{3}$$

$$y'' = y \tag{4}$$

$$z'' = z \tag{5}$$

$$t'' = \gamma''\left(t - \frac{V''x}{c^2}\right) \tag{6}$$

故只需证明定义(1),(2)是自洽的,也即为证 $\gamma'' = 1/\sqrt{1-[(V'')^2/c^2]}$. 下面我们通过证 $1/(\gamma'')^2 = 1 - [(V'')^2/c^2]$ 来获得. 根据(1)得

$$\frac{1}{(\gamma'')^2} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{\gamma'^2}\frac{1}{[1 + (VV'/c^2)]^2}$$

$$= \frac{[1 - V^2/c^2][1 - (V')^2/c^2]}{[1 + (VV'/c^2)]^2} = \frac{1 - [V^2 + (V')^2]/c^2 + V^2(V')^2/c^4}{[1 + (VV'/c^2)]^2}$$

$$= \frac{1 + (2VV')/c^2 + V^2(V')^2/c^4 - [V^2 + 2VV' + (V')^2]/c^2}{[1 + (VV'/c^2)]^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{V + V'}{1 + (VV'/c^2)}\right]^2 = 1 - \frac{(V'')^2}{c^2}$$

在最后一步中用了(2)式.

37.36 参见题 37.34 和 37.35,(a)证明题 37.35 中的(2)式符合题 37.26 的洛伦兹速度变换.(b) M、M' 和 M'' 是沿 x、x'、x'' 轴方向平放的米尺,分别静止在原点 O、O'、O'' 处. 画表说明在各个坐标系内观察到的每根米尺的长度.

解 ☞ (a) O'' 系相对 O' 系的速度 $v'_x = V'$, O' 系相对 O 系的速度为 V. 利用洛伦兹速度变换,得到 O'' 系相对于 O 系的速度 v_x 为

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + [(v'_x V)/c^2]} = \frac{V' + V}{1 + [(V'V)/c^2]}$$

此结果与题 37.35 中从 O 系到 O'' 系的速度变换式 V'' 一致.(b)见表 37-1.

表 37-1

观察表	米尺 M	M'	M''
O	1	$1/\gamma$	$1/\gamma''$
O'	$1/\gamma$	1	$1/\gamma'$
O''	$1/\gamma''$	$1/\gamma'$	1

37.37 在 O 和 O' 两惯性系中观察一个加速物体. 若 x 轴, x' 轴都与物体运动的轨迹共线, 且 O' 系相对 O 系的速度为 V, 方向沿 x 轴. 试证在两惯性中测得的加速度满足关系

$$a' = a\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2} \bigg/ \left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)^3$$

其中 v 为在 O 系中测得物体的瞬时速度.

解 ☞ 为了利用公式 $a' \equiv dv'/dt'$, $a \equiv dv/dt$, 需先利用洛伦兹速度变换

$$v' = \frac{v - V}{1 - [(vV)/c^2]} \tag{1}$$

因此问题只研究一维, 故可省略速度 v 和 v'(及加速度 a 和 a')的下标 x. 根据数学变换

$$a' \equiv \frac{dv'}{dt'} = \frac{dv'}{dv}\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dv'/dv}{dt'/dt}a \tag{2}$$

利用(1)式, 可求得

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{(1)(1 - vV/c^2) - (-V/c^2)(v - V)}{\{1 - [(vV)/c^2]\}^2} = \frac{1 - V^2/c^2}{\{1 - [(vV)/c^2]\}^2} \tag{3}$$

为消去 dt'/dt, 应利用洛伦兹时间变换,

$$t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \tag{4}$$

求得

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left[1 - \left(\frac{V}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right] = \gamma\left(1 - \frac{Vv}{c^2}\right) \tag{5}$$

将(3)式和(5)式代入(2)式, 即可得到所求的变换

$$a' = \frac{1 - (V^2/c^2)}{\{1 - [(vV)/c^2]\}^2}\frac{a}{\gamma\{1 - [(Vv)/c^2]\}} = \frac{[1 - (V^2/c^2)]^{3/2}}{\{1 - [(vV)/c^2]\}^3}a$$

37.38 在一艘以速率 $|v_s|$ 飞往地球的宇宙飞船内垂直速度方向有一根长杆. 当长杆一端发出光后, 此光脉冲将沿长杆运动, 直至被长杆另一端的镜面反射回去. 反射光脉冲由于高速机械运动又会闪光. 假设在宇宙飞船内测得此闪光的频率为 ν.

(a)若只考虑时间膨胀, 则在地球上的时钟测得闪光的周期为多少? 产生的光线也会到达地球, 由于在两次闪光之间, 宇宙飞船在飞往地球, 故第二次闪光到地球的距离比第一次短. 因此, 光线到达地球的周期会小于(a)中求得的周期. (b)对于地球上的观察者, 在两次闪光之间, 光线走过多少路程? (c)对于此观察者, 在两次闪光之间, 宇宙飞船飞过多少路程? (d)对于地球上的观察者, 两次闪光地点相距多远? (e)对于地球观察者, 闪光的频率为何值? (此结果即为运动光源的相对论多普勒效应.)

解 ☞ (a)闪光频率增加为 γ 倍, $\gamma = 1/\sqrt{1 - (|v_s|^2/c^2)}$, 而周期变为 γ/ν. (b)因为光传播的速度为 c, 所以地球上观察者测得在两次闪光之间, 光线经过的路程为 $c(\gamma/\nu) = \gamma(c/\nu)$. (c)因为宇宙飞船的飞行速度为 $|v_s|$, 所以地球观察者测得两次闪光之间, 飞船飞过的路程为: $|v_s|(\gamma/\nu) = \gamma(|v_s|/\nu)$. (d)利用(b)、(c)中求得的结果, 当飞船飞向地球的过程中, 地球观察者测得连续两次闪光发生的地点相距 $D = \gamma(c/\nu) - \gamma(|v_s|/\gamma) = (\gamma/\nu)(c - |v_s|)$. (e)对于地球上的观察者, 连续两次闪光到达地球的时间间隔等于距离 D 除以 c, 因此测得的频率为

$$\nu' = \frac{c}{D} = \nu\frac{c}{\gamma(c - |v_s|)} = \nu\sqrt{\frac{1 + (|v_s|/c)}{1 - (|v_s|/c)}} \tag{1}$$

37.39 若为远去的光源,求类似于题37.38的(1)式的结果.

解 ☞ 与题37.38作相同讨论,则只需将(1)式绝对值内的符号作修改,公式为

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+(v_s/c)}{1-(v_s/c)}} \tag{1}$$

其中 v_s 为光源速度,光源向观察者运动时,为正;光源离观察者远去时,为负.

37.40 钾元素内某一电子跃迁产生频率为 8.0×10^{14} Hz 的光,若此跃迁发生在遥远的星系内,测得到达地球的光线频率为 5.0×10^{14} Hz(红移),计算此星系相对地球的运动.

解 ☞ 将 $\nu'=5.0$ 和 $\nu=8.0$ 代入题37.39的(1)式求出 $v_s/c=-0.438$,此星系以 $0.438c$ 的速度远离地球.

37.41 在星际空间航行的一艘宇宙飞船与另一艘装有无线电发射仪的外太空探索器相遇.当探索器飞近时,宇宙飞船测出无线电波的频率为130 MHz;当探索器远去时,测出频率为60 MHz.求探索器内无线电波发射仪的固有频率为何值?两艘飞船的相对速度又为何值?

解 ☞ 当探索器飞近时,宇宙飞船测得的信号频率为

$$\nu_a = \nu_0\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}} \tag{1}$$

当探索器远去时,测得频率为

$$\nu_r = \nu_0\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}} \tag{2}$$

此处,v 为恒定的相对速度.(1),(2)两式相乘得,$\nu_a\nu_r=\nu_0^2$,所以 $\nu_0=\sqrt{\nu_a\nu_r}=\sqrt{(60)(130)}=88.3$ MHz.代入(1)式或(2)式,解得 $v=7c/19$.

37.42 参见题37.41,当两艘飞船相距最近时,宇宙飞船测得的信号频率为多少?

解 ☞ 此时,信号的波前不再挤压(如宇宙飞船和太空探索器之间距离减小时),也不再松弛(如两者距离增大时).影响频率变化的惟一因素就是时间膨胀.[见题37.38(a)]因此宇宙飞船测得信号的频率为 $\nu^*=\nu_0/\gamma=\nu_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}$.将 $\nu_0=88.3$ MHz 及 $v/c=7c/19$ 代入,求得 $\nu^*=82.1$ MHz.

37.43 图37-3所示为麦克耳孙干涉仪,若轻微倾斜的银镜 P 到每块平面镜距离者为 L.假设此装置放在静止的乙醚中,且以速度 V 沿镜 M_2 的方向运动.设牛顿物理学成立,可以运用伽利略变换.(a)若光速为 c,则光从 M_2 射到 P 的过程中,光相对 M_2 的速度为多少?(b)光从 P 射到 M_2,所需时间为多久?(c)在光反射时,光相对 P 的速度为多少?(d)从 M_2 反射到 P,光需多少时间?光完成从 P 射到 M_2 又反射回 P 的整个过程共需多久?

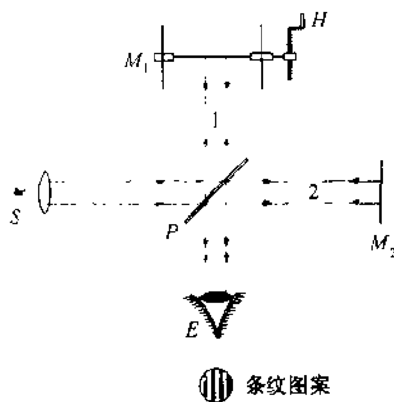


图37-3

解 ☞ (a)因为我们已假设光相对乙醚的速度为 c,且能够应用伽利略变换,则光从 P 射到 M_2 的过程中,相对干涉仪的速度为 $c-V$.

(b)从 P 射到 M_2,光所需时间为 $t_A=L/(c-V)$.

(c)光从 M_2 反射到 P 的过程中,相对干涉仪的速度为 $c+V$.

(d)光从 M_2 反射到 P,所需时间为 $t_B=L/(c+V)$.整个过程(光从 P 到 M_2 又到 P)所需时间为 t_2,

$$t_2 = t_A + t_B = \frac{L}{c-V}+\frac{L}{c+V}=\frac{2Lc}{c^2-V^2}$$

37.44　参见题 37.43，(a)证明光相对于 M_1 的速度为 $\sqrt{c^2-V^2}$，此也为反射时光相对于 P 的速度.(b)计算光从 P 射到 M_1 又返回 P 的整个过程所需要的时间.

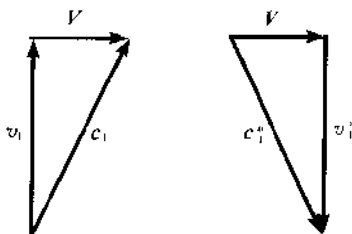


图 37-4

解　☞ (a)根据(伽利略)相对速度叠加图 37-4，光从 P 射到 M_1 时，光相对干涉仪的速度矢量为 v_1.因为干涉仪在乙醚以速度 V 运动，而 $v_1=c_1-V$，其中 c_1 为光相对于乙醚的速度；又因为 $|c_1|=c$ 且 v_1 垂直于 V，故 v_1 的大小为 $|v_1|=\sqrt{c^2-V^2}$.同样可得出 $|v_1^*|=\sqrt{c^2-V^2}$.

(b)因为整个过程为 $2L$，所以所需时间 $t_1=2L/\sqrt{c^2-V^2}$.

37.45　参见题 37.43 和题 37.44.(a)若 $|V|/c\ll1$，证明光在 P、M_1 之间来回与在 P，M_2 之间来回的时间差为 LV^2/c^3，(b)光在这段时间差内，能走多远？(c)假设光的波长为 λ，则(b)的结果相当于多少个波长？(d)假设 $L=10$ m，$\lambda=600$ nm，$|V|=3\times10^4$ m/s，取 $c=3\times10^8$ m/s，计算(c)的结果，(e)若将干涉仪转过 90°，条纹会移动多少？(麦克耳孙和莫雷实验能测到0.01个条纹的移动.)

解　☞ (a)两者的时间差为

$$t_2-t_1=\frac{2Lc}{c^2-V^2}-\frac{2L}{\sqrt{c^2-V^2}}=\frac{2L}{c}\left[\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]$$

$$=\frac{2L}{c}\left[\left(1+\frac{V^2}{c^2}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}+\cdots\right)\right]\approx\frac{LV^2}{c^3}$$

得证(b)此时间差 t_2-t_1 中，光走过距离 $d=c(t_2-t_1)=(LV^2)/c^2$.(c)这段路程 $c(t_2-t_1)$ 等于 $(LV^2)/(\lambda c^2)$ 个波长.(d)将 $L=10$ m，$\lambda=6\times10^{-7}$ m 及 $V=3\times10^4$ m/s 代入，得

$$\frac{d}{\lambda}=\frac{10}{6\times10^{-7}}\frac{(3\times10^4)^2}{(3\times10^8)^2}=\frac{1}{6}$$

(e)若将干涉仪旋转 90°，光程差异号，所以条纹移动为 $(2)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$ 条.

37.46[c]　证明电磁波方程，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$$

在洛伦兹变换下具有不变性.

证　☞ 若方程在新变量 x'，y'，z'，t' 的表达式中形式保持不变，则方程是不变式.要将电磁波方程用带撇的变量表示，我们先要利用洛伦兹变换得到以下各式：

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \frac{\partial x'}{\partial t}=-\frac{v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},\quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial x'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial z}=\frac{\partial y'}{\partial x}=\cdots=0$$

利用数学变换及上述结果得到

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial\phi}{\partial x'}+\frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial\phi}{\partial t'}$$

再对 x 求导，得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2}\right)-\frac{2v}{c^2-v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'\partial t'}$$

同样，可以得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=-\frac{v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial \phi}{\partial x'}+\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\frac{\partial \phi}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=\frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(v^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)-\frac{2vc^2}{c^2-v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2},\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$$

将上述结果代入电磁波方程可得

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}$$

所以,在洛伦兹变换下方程为不变式.注意:在伽利略变换下,波动方程不是不变式.

37.2 质能关系;相对论动力学

37.47 一个粒子以速度 v 运动,且 $v/c=0.9900$,求此粒子 m/m_0 的值.

解 ☞ 相对论质量 $m=m_0/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$,所以 $m/m_0=1/\sqrt{1-0.99^2}=7.1$.

37.48 一辆 2000 kg 的轿车车速为 15 m/s,在此速度下的质量比静止质量大多少?(提示:x 很小时,$1/\sqrt{1-x}\approx 1+\frac{1}{2}x$.)

解 ☞ $m=m_0[1-(v^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}}\approx m_0\left[1+\frac{1}{2}(v^2/c^2)\right]$,即 $(m-m_0)=\frac{1}{2}m_0(v^2/c^2)=\frac{1}{2}(2000)[15/(3.0\times10^8)]^2=2.5\times10^{-12}$(kg)

37.49 计算一个电子的静止能量,即电子静止质量 9.11×10^{-31} kg 对应的能量.

解 ☞ 静止能量 $=m_0c^2=(9.11\times10^{-31}\text{ kg})(3\times10^8\text{ m/s})^2=8.2\times10^{-14}$ J.而 1 MeV $=1.6\times10^{-13}$ J,静止能量 $=0.512$ MeV.

37.50 质子、中子、氘核的静止质量为

$$m_p=1.67261\times10^{-27}\text{ kg},\ m_n=1.67492\times10^{-27}\text{ kg},$$

$$m_d=3.34357\times10^{-27}\text{ kg}$$

氘核(重氢原子核)由一个质子和一个中子组成,则一个自由质子和一个自由中子由初始静止游离态形成一个氘核时,释放出多少能量?

解 ☞ 形成氘核的过程中,减少的静止质量为

$$(m_p+m_n)-m_d=(1.67261+1.67492-3.34357)\times10^{-27}$$
$$=3.96\times10^{-30}(\text{kg})$$

对应减少的静止能量为

$$\Delta E_0=3.96\times10^{-30}c^2=3.56\times10^{-13}\text{ J}=2.22\text{ MeV}$$

因此,根据能量守恒,周围环境得到的能量为 2.22 MeV.若要将氘核分离为游离态的一个质子和一个中子时,外界需提供同样数量的能量,即氘核的结合能.

37.51 求一个动能为 100 keV(1.6×10^{-14} J)的电子的质量及速度.

解 ☞ 动能 $K=mc^2-m_0c^2$,即 $1.6\times10^{-14}\text{J}=(m-m_0)(3\times10^8\text{ m/s})^2$,$m-m_0=1.78\times10^{-31}$ kg.题 37.49 给出 $m_0=9.11\times10^{-31}$ kg,所以 $m=(9.11+1.78)\times10^{-31}\text{ kg}=1.089\times10^{-30}$ kg.利用 $m=m_0/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ 求速度,$1-(v^2/c^2)=(m_0/m)^2=0.700$.所以 $v/c=0.548$,$v=1.64\times10^8$ m/s.

37.52 要使一个质子的质量为静止质量 1.67×10^{-27} kg 的两倍,则它的速度应为多少?要获得这一速度,需外加多大能量?

解 ☞ 根据质量公式,

$$m=m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\quad 2m_0=m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\quad 4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1;$$

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4},\qquad v=0.866c$$

$$\Delta W=(m-m_0)c^2=(2m_0-m_0)c^2=(1.67\times10^{-27}\text{kg})(3\times10^8\ \text{m/s})^2$$
$$=1.50\times10^{-10}\ \text{J}=938\ \text{MeV}$$

37.53 若使一个电子加速到 $0.95c$ 需外加多大的能量?

解 ☞ 根据相对论质量公式,

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=\frac{9.1\times10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1-0.95^2}}=29.1\times10^{-31}\text{kg}$$
$$\Delta W=(m-m_0)c^2=[(29.1-9.1)(10^{-31})](9\times10^{16})$$
$$=1.8\times10^{-31}(\text{J})=1.125(\text{MeV})$$

37.54 将一个 2 kg 的物体从地面提到高 30 cm 的桌子上,求由于势能的增加导致物体质量的增加值.

解 ☞ 利用 $\Delta E=(\Delta m)c^2$ 和 $\Delta E=mgh$,得到

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2}=\frac{mgh}{c^2}=\frac{(2\text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(0.3\text{m})}{(3\times10^8\text{m/s})^2}=6.5\times10^{-17}\text{kg}$$

37.55 一个质子的静止质量 $m_0=1.672614\times10^{-27}$ kg,当它下落过电势差 ΔV 后,得到实验室速度 $u=2\times10^8$ m/s. (a)计算 ΔV,(b)求质子的总能量值.

解 ☞ (a)质子的动能为

$$K=(m-m_0)c^2=\left[\frac{1}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}-1\right]m_0c^2=e\Delta V$$
$$\Delta V=\frac{[(1/0.744943)-1](1.672614\times10^{-27})(2.997925\times10^8)^2}{1.602\times10^{-19}}=321\text{MeV}$$

(b)质子的静止能量为 $m_0c^2=938.3$ MeV,故总能量为

$$E=938.3+321=1259.3(\text{MeV})$$

37.56 证明,当 v 远小于 c 时,可由 $\text{KE}=(m-m_0)c^2$ 推导出 $\text{KE}=\frac{1}{2}m_0v^2$.

证 ☞ $\text{KE}=(m-m_0)c^2=\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-m_0\right)c^2=m_0c^2[(1-v^2/c^2)^{-1/2}-1]$

令 $b=-v^2/c^2$,并将 $(1+b)^{-1/2}$ 展开至二阶,得

$$(1+b)^{-1/2}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)b+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}b^2+\cdots=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots$$
$$\text{KE}=m_0c^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)-1\right]=\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{3}{8}m_0v^2\frac{v^2}{c^2}+\cdots$$

当 v 远小于 c 时,$\frac{1}{2}m_0v^2$ 后的各项可忽略不计.

37.57 把 100 kg 铜($C=0.389$kJ/kg·K)的温度升高 100 ℃,求质量的增加量.

解 ☞ $\Delta E=mC\Delta T=(100)(0.389)(100)=3890(\text{kJ})$

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2}=4.33\times10^{-11}\ \text{kg}$$

37.58 假设 1 g 物质可以完全转化为能量,以 \$ 0.01 每 kW·h 计算,这些能量价值为多少?

解 ☞ 我们利用 $\Delta E=(\Delta m)c^2$,得

获得的能量 = (失去的质量)$c^2=(10^{-3}\text{kg})(3\times10^8\text{m/s})^2=9\times10^{13}\text{J}$

能量的价值 = $(9\times10^{13}\text{J})\left(\frac{1\text{kW}\cdot\text{h}}{3.6\times10^6\text{J}}\right)\left(\frac{\$0.01}{\text{kW}\cdot\text{h}}\right)=\$\,250000$

37.59 在 $\mathcal{S}'$ 系中有一个长方体容器,各边分别与坐标轴平行.若在 $\mathcal{S}'$ 系中测出容器内装满了密度为 ρ' 的液体.则若在 $\mathcal{S}$ 系中测量,液体的密度又为何值?

解 ☞ 由于沿 x 轴存在洛伦兹收缩,故在 $\mathscr{S}$ 系中容器的体积 V 会变小.因 y, z 方向没有影响,所以, $V = V'\sqrt{1-(v^2/c^2)}$.又因为液体在 $\mathscr{S}$ 系中以速度 v 运动存在动能,故液体的总质量会增大, $M = M'/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$.所以 $\rho = M/V = (M'/V')\{1/[1-(v^2/c^2)]\} = \rho'/[1-(v^2/c^2)]$

37.60 参见题 37.59,证明:$\mathscr{S}'$系和 $\mathscr{S}$系中的观察者测得的液体蒸发引起的质量减少率是一致的.

解 ☞ 假设 $\Delta M'$ 为在 $\mathscr{S}'$ 系中 $\Delta t'$ 时间内的蒸发质量,则在 $\mathscr{S}$ 系中对应有 $\Delta M = \Delta M'/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$;$\Delta t = \Delta t'/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$,其中 $\Delta t'$ 为固有时间段.容易得到$(\Delta M/\Delta t) = (\Delta M'/\Delta t')$.

37.61 我们所在星系的宽度约为 10^5l.y.,在其中穿行的粒子的最大能量为 10^{20}eV.求(a)假设此粒子为质子,它的相对论能量值,(b)质量增加系数,(c)在星系及质子所在的坐标系内观测,质子穿过此星系所需的时间.

解 ☞ (a)取 J 为单位,能量为$(10^{20}\text{eV})(1.6\times10^{-19}\text{J/eV}) = 16\text{J}$.

(b)在好的近似下,相对论质量由下式求得:

$$\text{KE} = 16\text{J} = (m - m_0)c^2 \approx mc^2, \quad m = \frac{16}{9\times10^{16}} = 1.78\times10^{-16}(\text{kg})$$

约为静止质量的 10^{11} 倍.

$$m = \gamma m_0, \quad \gamma = \frac{m}{m_0} = 1.06\times10^{11}$$

(c)质子看到星系在它运动的方向上收缩

$$L = \gamma^{-1}L^* = (0.94\times10^{-11})(10^5) = 0.94\times10^{-6}(\text{l.y.})$$

质子速度近似为 c, $t = L/c = 0.94\times10^{-6}$l.y.,约为 30s! 而在地球系中, $t^* = \gamma t = 10^5$l.y.

37.62 在狭义相对论中仍有孤立系统线性动量守恒;事实上,正是此原理导致质量不守恒.(a)推导动量与总能量的关系,(b)计算一个 1 MeV 电子的动量.

解 ☞ (a)我们从相对论质量公式入手: $m = m_0/\sqrt{1-(u^2/c^2)}$.将此式两边平方,再同乘以 $c^4[1-(u^2/c^2)]$,得到

$$m^2c^4 - m^2u^2c^2 = m_0^2c^4, (mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + (muc)^2$$

而 $mc^2 = E$,为总能量;$m_0c^2 = E_0$,为静止能量;$mu = p$,为动量矢量的大小.所求的关系式为

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2 \tag{1}$$

(1)式中动量单位取 MeV/c,对于原子,能量一般给出的单位为 eV 或 MeV.(见题 37.63).(b)电子的总能量为它的静止能量,0.511 MeV 加上它的动能,1 MeV,根据(1)式得 $1.511^2 = 0.511^2 + (pc)^2$,得 $pc = 1.42$ MeV, $p = 1.42$ MeV/c.

37.63 计算动量的一般单位与 MeV/c 之间的换算系数.

解 ☞ $1\text{MeV}/c = (1.6\times10^{-13}\text{J})/(3\times10^8\text{m/s}) = 5.33\times10^{-22}\text{kg}\cdot\text{m/s}$.

37.64 证明:在对称,完全非弹性碰撞过程中,系统的静止质量不守恒.

证 ☞ 设有两个完全相同的物体,静止质量分别为 m_0,以相同速率 u 相向运动并碰撞,连为一体.根据动量守恒,结合体应静止,能量为 M_0c^2.系统的初始能量为 $2\left[m_0c^2/\sqrt{1-(u^2/c^2)}\right]$,所以

$$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = M_0c^2, \text{即 } M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}$$

可以看到,系统最后的静止质量 M_0 大于初始时的静止质量 $2m_0$.

37.65 在牛顿力学中,存在关系 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$.其中 E 为在合力$\boldsymbol{F}$ 作用下以速度$\boldsymbol{v}$ 运动的粒子的总能量.证明,此关系在狭义相对论力学中仍成立.(假设在狭义相对论下,牛顿第二定律成立.)

解 ☞ 如题 37.62 所证,粒子的瞬时动量 $\boldsymbol{p}(t)$与瞬时能量 $E(t)$满足下述关系:

$$E^2 = c^2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + (m_0c^2)^2 \tag{1}$$

对(1)式求时间的导数得

$$2E\frac{dE}{dt}=2c^2\boldsymbol{p}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{2}$$

而 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\gamma m_0\boldsymbol{v}$ 且 $E=mc^2=\gamma m_0c^2$，所以 $(c^2\boldsymbol{p})/E=\boldsymbol{v}$．代入(2)式得

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{F}=d\boldsymbol{p}/dt$．

37.66　试证对于一个能量为 E，动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子，速度各分量为

$$v_x=\frac{\partial E}{\partial p_x},\quad v_y=\frac{\partial E}{\partial p_y},\ v_z=\frac{\partial E}{\partial p_z}$$

此关系式在相对论及牛顿力学中都成立．

证　☞ 用动量表示出能量值．有

$$E=\sqrt{c^2p^2+(m_0c^2)^2}=\sqrt{c^2(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+(m_0c^2)^2}$$

求关于 p_x 的导数，得到

$$\frac{\partial E}{\partial p_x}=\frac{1}{2}\frac{2c^2p_x}{\sqrt{c^2(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+(m_0c^2)^2}}=\frac{c^2p_x}{E}=\frac{c^2\gamma m_0v_x}{\gamma m_0c^2}=v_x$$

对于 y,z 分量，可由同样的方法求得．因为牛顿力学得到的结果即为相对论结果的低速情况，故上述结果对牛顿力学仍成立．当然也可以由 $E=p^2/(2m_0)=p_x^2/(2m_0)+p_y^2/(2m_0)+p_z^2/(2m_0)$ 推得，$\partial E/\partial p_x=p_x/m_0=v_x$，同理得到 y,z 分量．

37.67　经过指定点的一束质子速度为 $5.00\times10^7\text{m/s}$，单位长度所带电荷为 $2.00\times10^{-12}\text{C/m}$，以上各值均在实验室参考系下测得．一个孤立质子以相同的速度平行且相距光束 10 mm 处运动．实验室内的观察者测得的孤立质子上的电场力和磁场力分别为多少？

解　☞ 在实验室坐标下，电场 E 垂直光束向外．由于单位长度电荷为 $\lambda=2.00\times10^{-12}\text{C/m}$ 且质子束与质子间距 $r=0.0100\text{ m}$，求得电场大小为(题 25.43)

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0r}=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0r}=\frac{(2)(8.99\times10^9)(2.00\times10^{-12})}{1.00\times10^{-2}}=3.596(\text{N/C})$$

因此质子上电场力 $F_e=eE=(1.60\times10^{-19})(3.596)=5.57\times10^{-19}(\text{N})$，方向垂直光束向外．磁场线为以质子束为轴的圆．因为质子束产生的电流 $i=\lambda v_p=(2.00\times10^{-12})(5.00\times10^7)=100(\mu\text{A})$，质子所在位置的磁场强度为(题 28.90)

$$B=\frac{\mu_0i}{2\pi r}=\frac{(2\times10^{-7})(1.00\times10^{-4})}{1.00\times10^{-2}}=2.00(\text{nT})$$

因为质子的速度 v_p 垂直于 $\boldsymbol{B}$，故磁场力 $\boldsymbol{F}_m=e\boldsymbol{v}_p\times\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$F_m=ev_pB=(1.60\times10^{-19})(5.00\times10^7)(2.00\times10^{-9})=1.60\times10^{-20}(\text{N})$$

方向沿质子束方向．

37.68　参见题 37.67，求与质子一起运动的观察者测得的电场力和磁场力又为何值？

解　☞ 在相对质子静止的坐标系中，单位长度的电荷 $\lambda'=\lambda\sqrt{1-(v_p^2/c^2)}$，因为质子束中粒子在此坐标中也静止

$$\lambda'=(2.00\times10^{-12})\sqrt{1-\left(\frac{5.00\times10^7}{3.00\times10^8}\right)^2}=1.972\times10^{-12}(\text{C/m})$$

根据洛伦兹变换，运行间距不受影响，故质子束与质子的间距 $r'=r$．故在质子位置处的电场为

$$E'=\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0r'}=\frac{2\lambda'}{4\pi\varepsilon_0r}=\frac{2(8.99\times10^9)(1.972\times10^{-12})}{1.00\times10^{-2}}=3.546(\text{N/C})$$

因此质子上的电场力 $F'_e=eE'=(1.60\times10^{-19})(3.546)=5.67\times10^{-19}\text{N}$，垂直质子束向外．在静止坐标系中，磁场力显然为 0．

37.69　参见题 37.67 和题 37.68，求对于一个以速度 $1.00\times10^8\text{m/s}$ 沿质子束方向运动的观察者来说，质子上的电场力和磁场力为何值？

解 ☞ 在沿质子束方向速度 $V=1.00\times10^8$ m/s 的参考系中，各质子的（共用）速度 v''_p 根据洛伦兹速度变换得

$$v''_p=\frac{v_p-V}{1-[(v_pV)/c^2]}=\frac{(5.00\times10^7)-(1.00\times10^8)}{1-[(5.00\times10^7)(1.00\times10^8)]/(3.00\times10^8)^2}$$
$$=-5.294\times10^7(\mathrm{m/s})$$

由于洛伦兹收缩，单位长度的电荷 λ'' 大于相对质子静止的坐标系中的值 λ'，系数 $\gamma''=1/\sqrt{1-[(v_p'')^2/c^2]}$：

$$\lambda''=\frac{\lambda'}{\sqrt{1-[(v''_p)^2/c^2]}}=\frac{1.972\times10^{-12}}{\sqrt{1-[(5.294\times10^7)/(3.00\times10^8)]^2}}$$
$$=2.003\times10^{-12}(\mathrm{C/m})$$

因此垂直质子束向外，在 $r''=r$ 处，大小为

$$E''=\frac{2\lambda''}{4\pi\epsilon_0r''}=\frac{2(8.99\times10^9)(2.003\times10^{-12})}{1.00\times10^{-2}}=3.602(\mathrm{N/C})$$

所以，质子上的电场力为 $F''_e=eE''=(1.60\times10^{-19})(3.602)=5.76\times10^{-19}$(N)，垂直质子束向外．磁场线为以质子束为轴的圆，方向与(a)中方向相反，磁场大小 $B''=(\mu_0i'')/(2\pi r'')$，电流大小为

$$i''=\lambda''|v''_p|=(2.003\times10^{-12})(5.294\times10^7)=106\ (\mu\mathrm{A})$$

所以在相距 r''处磁场大小为

$$B''=\frac{\mu_0i''}{2\pi r''}=\frac{\mu_0i''}{2\pi r}=\frac{(2\times10^{-7})(1.06\times10^{-4})}{1.00\times10^{-2}}=2.120(\mathrm{nT})$$

最后求出 $F_m=ev''_pB''=(1.6\times10^{-19})(5.294\times10^7)(2.12\times10^{-9})=1.79\times10^{-20}$(N)，沿光束方向．

37.70 一大型回旋加速器能将氘核的动能增加到 450MeV．此时，氘核的速度很接近 c，质量也远大于静止质量．假设磁场值处处相等，这就要求 D 形环间振荡电势差的频率在氘核加速过程中逐渐减小．求最后的频率与初始频率的比值？氘核静止质量为 3.3×10^{-27}kg．

解 ☞ 对于在磁场中以相对论速度旋转的粒子，其相对论力，$\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$，仍能由洛伦兹公式正确给出

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\tag{1}$$

动量 $\boldsymbol{p}=\gamma m_0\boldsymbol{v}$，其中 $\gamma\equiv[1-(v^2/c^2)]^{-1/2}$．若粒子旋转时角速度为 $\boldsymbol{\omega}_c$，又因为 $\boldsymbol{p}$ 的大小恒定，得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}_c\times\boldsymbol{p}=\gamma m_0(\boldsymbol{\omega}_c\times\boldsymbol{v})\tag{2}$$

根据(1)、(2)两式，可以得出 ω_c 的大小为

$$\omega_c=\frac{qB}{\gamma m_0}=\frac{qB}{m}\tag{3}$$

其中 $m\equiv\gamma m_0$，为相对论质量．因为氘核初始时为非相对论性的，根据(3)式可得

$$\frac{\omega_{cf}}{\omega_{ci}}=\frac{\gamma_i}{\gamma_f}=\frac{1}{\gamma_f}\tag{4}$$

引入最后的动能 K_f，可以得到

$$\gamma_f=\frac{K_f+m_0c^2}{m_0c^2}\tag{5}$$

氘核的静止能量为

$$m_0c^2=\frac{(3.3\times10^{-27}\mathrm{kg})(3.00\times10^8\ \mathrm{m/s})^2}{1.60\times10^{-13}\mathrm{J/MeV}}=1.86\times10^3\mathrm{MeV}$$

将 $K_f=450$MeV 代入，由(4)和(5)式得

$$\frac{\omega_{cf}}{\omega_{ci}}=\frac{1}{\gamma_f}=\frac{1860}{450+1860}=0.81$$

第三十八章　光子与物质波

38.1　光子与光电效应

38.1　简要描述光子概念,写出光子能量、动量的表达式.

解　☞ "光子说"用量子的观点描述释放及吸收的电磁能($\mathscr{E}$),其中 $\mathscr{E}=h\nu$,即一个光子的能量.$\mathscr{E}$ 正比于它的频率 ν,比例常数 $h=6.6256\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$ 称为普朗克常量.可以证明(题 38.11)电磁能和动量(p)的关系为 $p=\mathscr{E}/c$,因为 $\mathscr{E}=h\nu$,则有 $p=h/\lambda$.

38.2　求波长为 526 nm 的一束光中光子的能量.

解　☞ $\mathscr{E}=h\nu=(hc)/\lambda=[(6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s})(3\times10^{8}\mathrm{m/s})]/(526\times10^{-9}\mathrm{m})=3.78\times10^{-17}\mathrm{J}$.因为 $1\ \mathrm{eV}=1.6\times10^{-19}\mathrm{J}$,所以 $\varepsilon=2.36\mathrm{eV}$.

若采用单位 hc,计算将更简单:

$$hc=(6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s})(3\times10^{8}\mathrm{m/s})(1.6\times10^{-19}\mathrm{J/eV})$$
$$=1.240\ \mathrm{eV\cdot nm}=1240\ \mathrm{MeV\cdot pm}=\cdots \qquad (1)$$

所以,$\mathscr{E}=(1240\mathrm{eV\cdot nm})/(526\ \mathrm{nm})=2.36\ \mathrm{eV}$.

38.3　计算能量为 10^{19} eV 的 γ 射线在真空中的波长.

解　☞ 根据题 38.2 中(1)式得

$$\lambda=\frac{hc}{\mathscr{E}}=\frac{1240\mathrm{eV\cdot nm}}{10^{19}\mathrm{eV}}=1.240\times10^{-25}\ \mathrm{m}$$

38.4　计算能量为 2eV 的光子的频率、真空波长,并用 J 表示其能量值.

解　☞ $\lambda=\dfrac{hc}{\mathscr{E}}=\dfrac{1240\mathrm{eV\cdot nm}}{2\mathrm{eV}}=620\ \mathrm{nm},\quad \nu=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{3\times10^{8}\ \mathrm{m/s}}{620\times10^{-9}\ \mathrm{m}}=480\ \mathrm{THz}$

$2\mathrm{eV}=3.2\times10^{-19}\mathrm{J}$

38.5　求从电力线路中发出的频率为 60 Hz 的电磁波光子的能量,单位取 J.并将结果与可见光的能量比较.

解　☞ 由 $\mathscr{E}=h\nu$ 得,$\mathscr{E}=(6.6\times10^{34})(60)=39.6\times10^{-33}(\mathrm{J})$.而可见光的频率范围为 $3.8\times10^{14}\sim7.7\times10^{14}$ Hz,对应能量值为 $25.1\times10^{-20}\sim50.8\times10^{-20}\mathrm{J}$.所以 60Hz 的光子的能量为可见光能量的 $1/10^{13}$.

38.6　证明:X 射线的波长 $\lambda=12.40/E$,其中能量 E 的单位为 keV,λ 的单位为 Å.

证　☞ 因为 1 nm = 10 Å,所以 $hc=1240\mathrm{eV\cdot nm}=12.40\mathrm{keV\cdot Å}$.

38.7　当光子能量约为 3.5eV 时,此光子会破坏皮肤分子的化学键导致晒伤,求这种光子的波长值.

解　☞ $\lambda=\dfrac{1240\mathrm{eV\cdot nm}}{3.5\mathrm{eV}}=354\ \mathrm{nm}$(紫外光)

38.8　一光源发出功率 100 W、波长 500 nm 的绿光,此光源每秒放出多少个光子?

解　☞ 功率乘以时间间隔等于释放的能量,即(100W)(1s)=100J.用 N 表示光子流,则有

$$N=\frac{100}{h\nu}=\frac{100\lambda}{hc}=\frac{100(500\times10^{-9})}{(6.6\times10^{-34})(3\times10^{8})}=25\times10^{19}(\text{个光子}/\mathrm{s})$$

38.9　一盏台灯照射桌面时光线波长为 412 nm,此电磁波振幅为 63.2V/m.求正常发光时,单位时间内打在单位面积上的光子数 N.

解　☞ 根据 $\mathscr{E}=(hc)/\lambda$ 及能量密度公式$(\varepsilon_0E_0^2)/2$,其中 E_0 为电磁场振幅(题 33.64),可以得到

$$N=\frac{\lambda\varepsilon_0E_0^2}{2h}=\frac{(412\times10^{-9})(8.85\times10^{-12})(63.2^2)}{2(6.63\times10^{-34})}$$

$$= 1.10 \times 10^{19}(\text{个光子}/\text{s}\cdot\text{m}^2).$$

38.10 某传感器开口的直径为 20 mm,现将此传感器打开 0.1 s 以接收 10 m 远处一盏 200W 的台灯放出的光.若台灯以波长 600 nm 的可见光的形式释放能量,一共有多少光子进入传感器?

解 ☞ 可见光光子的能量

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34})(3\times10^8)}{600\times10^{-9}} = 3.3\times10^{-19}(\text{J})$$

台灯功率为 200W,因此每秒内释放的光子数

$$n = \frac{200}{3.3\times10^{-19}} = 6.1\times10^{20}(\text{个光子}/\text{s})$$

光子呈球对称辐射,每秒内进入传感器的光子数等于 n 乘以通光面积与辐射球(半径为10 m)表面积的比值

$$(6.1\times10^{20})\frac{\pi(0.010)^2}{4\pi(10^2)} = 1.53\times10^{14}(\text{个光子}/\text{s})$$

所以在 0.1 s 内,进入传感器的光子数为$(0.1)(1.53\times10^{14}) = 1.53\times10^{13}$.

38.11 光子的动量与能量满足什么关系?

解 ☞ 由题 37.62 得,$\mathscr{E}^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$,又因为光子静质量为零,所以 $\mathscr{E} = pc$.

38.12 在自由空间运动的红光($\nu = 400\times10^{12}$ Hz)光子动量为多少?

解 ☞ 动量 $p = h/\lambda = (h\nu)/c$,所以

$$p = \frac{(6.6\times10^{-34})(400\times10^{12})}{3\times10^8} = 8.8\times10^{-28}(\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

38.13 电磁辐射波长为何值时,光线中光子的动量和一个电子以 2×10^5 m/s 的速度运动时的动量相当?

解 ☞ 由题意得,$(mv) = (h/\lambda)$,所以

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{(9.1\times10^{-31}\text{kg})(2\times10^5\text{m/s})} = 3.64\ \text{nm}$$

此波长属于 X 射线范围.

38.14 一束光子垂直射到真空中的一块能完全吸收光子的屏上,产生压强 p.证明,$p = I/c$,其中 I 为辐射度.

解 ☞ 动量的变化率等于作用力,即 $\Delta p/\Delta t = F$.单位面积的作用力 F/A 为压强,所以

$$p = \frac{1}{A}\frac{\Delta p}{\Delta t}$$

对于光子又有 $\mathscr{E} = cp$,则 $\Delta\mathscr{E} = c\Delta p$,

$$p = \frac{1}{Ac}\frac{\Delta\mathscr{E}}{\Delta t}$$

辐射度定义为单位时间内、单位面积上的能量,所以 $p = I/c$.

38.15 一束能流密度为 30 kW/m^2 的平行光垂直入射到面积 100 mm^2 能完全吸收光子的屏上.利用题 38.14 的结果,计算产生的压强和吸收屏上 1000 s 内得到的动量.

解 ☞ 易得压强

$$p = \frac{I}{c} = \frac{3\times10^4}{3\times10^8} = 10^{-4}(\text{Pa}) = \frac{F}{A} = \frac{(\Delta p/\Delta t)}{A}$$

$$\Delta p = pA\Delta t = (10^{-4})(10^{-4})(10^3) = 10^{-5}(\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

(可以制造一艘利用太阳压强工作的星际飞船)

38.16 求一个微波光子能产生的最大动量?

解 ☞ 微波频率最大为 3×10^{11}Hz,所以 $p = h/\lambda = (h\nu)/c$,

$$p = \frac{(6.6\times10^{-34})(3\times10^{11})}{3\times10^{8}} = 6.6\times10^{-31}(\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}})$$

38.17 红光($\lambda = 663$ nm)垂直入射到完全反射光子的屏上,若要产生 0.225lb 的作用力,则每秒需入射多少个红光光子?

解 ☞ 已知 $F = \Delta p/\Delta t$,在此题中 Δp 等于入射动量的两倍.设 N 为每秒的入射光子数,则 $F = N[(2h)/\lambda]$.而 0.225lbf = 1N,即 $F = 1$,所以

$$N = \frac{\lambda}{2h} = \frac{663\times10^{-9}}{2(6.63\times10^{-34})} = 5\times10^{26}(\text{光子}/\text{s})$$

38.18 用波长为 2000 Å 的紫外光照射镍板,为防止速度最大的光电子逸出镍板表面,需加多大的电势差?已知镍的逸出功为 5.00 eV.

解 ☞ 光子能量 $= \frac{hc}{\lambda} = \frac{12400\text{eV}\cdot\text{nm}}{200\ \text{nm}} = 6.20$ eV

根据光电效应方程,最快的电子具有能量为 6.20eV - 5.00 eV = 1.20eV.所以为防止其逸出,需要的遏止电势差为 1.20V.

38.19 金属钠的逸出功为 2.3 eV,能使光电子逸出钠的入射光最大波长为何值?

解 ☞ 考虑临界值,此时光子能量等于破坏金属对电子束缚的能量,即逸出功 $W_{\min}$.

$$W_{\min} = \frac{hc}{\lambda},\quad \lambda = \frac{1240\text{eV}\cdot\text{nm}}{2.3\text{eV}} = 540\ \text{nm}$$

38.20 若光电子的临界波长为 680 nm,求金属钠的逸出功

解 ☞ 逸出功 $= W_{\min} = h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{1240\text{eV}\cdot\text{nm}}{680\text{nm}} = 1.83$eV

38.21 若用可见光照射逸出功为 4.4eV 的铜板表面,是否有光电子逸出?

解 ☞ 与题 38.19 同理

$$\text{临界}\ \lambda = \frac{hc}{W_{\min}} = \frac{1240\text{eV}\cdot\text{nm}}{4.4\text{eV}} = 282\ \text{nm}$$

因此可见光(400～700 nm)不能使光电子逸出铜表面.

38.22 波长为 600 nm 的光射向逸出功为 2eV 的金属,求(a)光子的能量,(b)光电子的最大动能,(c)遏止电势差.

解 ☞ (a) $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\text{eV}\cdot\text{nm}}{600\ \text{nm}} = 2.07$eV

(b) $K_{\max} = E - W_{\min} = 2.07 - 2 = 0.07$eV

(c) $eV_s = K_{\max} = 0.07$eV, $V_s = 0.07$V

38.23 要使一个束缚电子脱离金属表面至少需要 4.2eV 的能量,当用单一频率的紫外线照射此金属时,有动能范围为 0～2.6eV 的电子逸出.入射光子的能量为何值?

解 ☞ WF = 4.2eV　$\text{KE}_{\max} = 2.6$eV　$E = \text{WF} + \text{KE}_{\max} = 4.2 + 2.6 = 6.8$(eV)

38.24 一个光子将 4.0eV 的能量都传递给一个电子,使其以 1.1eV 的动能逸出金属表面,此金属的逸出功 $W_{\min}$为多大?

解 ☞ $W_{\min} = h\nu - K_{\max} = 4.0 - 1.1 = 2.9$(eV)

38.25 计算当波长为 2000Å 的紫外光照射钋金属表面时逸出光电子的最大动能 KE.若要阻止光电子逸出,所需的遏止电势差为多大?已知钋的光电子的临界波长为 4400 Å.

解 ☞ 逸出功 $= W_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{12400\text{eV}\cdot\text{Å}}{4400\ \text{Å}} = 2.82$eV

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \text{KE}_{\max} = \frac{12400}{2000} - 2.82 = 6.20 - 2.82 = 3.38(\text{eV})$$

遏止电势差应恰大于电子的最大动能 $\text{KE}_{\max}$所以 $V = 3.38$V.

38.26 当波长 $\lambda_1 = 550$ nm 的光照射某金属表面产生光电效应时,所需的遏止电势差 $V_{s1} = 0.19$V.若改用波长 $\lambda_2 = 190$ nm 的光照射此金属,计算(a)遏止电势差 V_{s2},(b)此金属的逸出功,(c)此金属表面处的临界频率.

解 ☞ (a)因为 $eV - KE_{max} - h\nu - W_{min}$,对于特定金属,$W_{min}$为常数,所以可得到 $e(V_{s2} - V_{s1}) = h(\nu_2 - \nu_1)$,故

$$V_{s2} = V_{s1} + \frac{h}{e}(\nu_2 - \nu_1) = V_{s1} + \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

$$= 0.19 + 1240\left(\frac{1}{190} - \frac{1}{550}\right) = 4.47(\mathrm{V})$$

(b) $W_{min} = \frac{hc}{\lambda_1} - eV_{s1} = \frac{1240}{550} - 0.19 = 2.07(\mathrm{eV})$

(c) $h\nu_t = W_{min}$, $\nu_t = \frac{W_{min}}{h} = \frac{(2.07)(1.602\times10^{-19})}{6.63\times10^{-34}} = 498(\mathrm{THz})$

38.27 氢原子吸收一个波长为 60 nm 的光子产生光电效应,求逸出电子的最大动能.已知 H 的结合能为 13.6eV.

解 ☞ 结合能即为使电子脱离原子束缚的最小能量,所以

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - 13.6\ \mathrm{eV} = \frac{1240\ \mathrm{eV\cdot nm}}{60\ \mathrm{nm}} - 13.6\mathrm{eV} = 7.1\mathrm{eV}$$

38.2 康普顿散射;X射线;电子对的产生与湮没

38.28 一个 3.64 nm 的光子沿 $+x$ 方向与一个以 2×10^5m/s 速度沿 $-x$ 方向运动的电子发生完全弹性正碰,求碰撞后光子、电子的运动情况.

解 ☞ 根据动量守恒定理,碰撞前的动量 = 碰撞后的动量,$\frac{h}{\lambda_0} - mv_0 = \frac{h}{\lambda} - mv$. 由题 38.13 得,$h/\lambda_0 = mv_0$,则 $h/\lambda = mv$,而完全弹性碰撞又满足:碰前 KE = 碰后 KE,$\frac{hc}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{hc}{\lambda} + \frac{1}{2}mv^2$. 考虑到 $h/\lambda_0 = mv_0$, $h/\lambda = mv$,可得到

$$v_0\left(c + \frac{1}{2}v_0\right) = v\left(c + \frac{1}{2}v\right)$$

所以 $v = v_0$,电子以初始速度反向运动.因为 $h/\lambda = mv = mv_0$,光子也以初始波长反向运动.

38.29 康普顿方程可写为 $\lambda' - \lambda = [h/(m_0c)](1 - \cos\phi)$. 其中 $h/(m_0c)$ 称为康普顿波长,表示 $\phi = 90°$时的波长改变值.计算下列粒子间散射时的康普顿波长:(a)电子,(b)质子.电子发生散射时,若入射光波长为(c)500 nm(可见光),(d)0.050 nm(0.5 Å 的 X 射线)时,波长改变的百分比分别为何值?

解 ☞ 将电子静质量(9.1×10^{-31} kg)和质子静质量(1.67×10^{-27} kg)分别代入 h/mc,求出康普顿波长为(a)0.024Å,(b)1.32×10^{-15}m. 对于电子:(0.024/5000)(100) = 4.8×10^{-4}%;对于 0.5 Å 的 X 射线:(0.024/0.500)(100) = 4.8%.

38.30 一个光子($\lambda = 0.400$ nm)与一静止的电子发生碰撞后,以与入射方向成 150°反冲.求碰撞后光子的速度和波长.

解 ☞ 真空中光子的速度恒为光速 c,根据康普顿方程可得到碰撞后的波长

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

$$= 4\times10^{-10}\mathrm{m} + \frac{6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{(9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg})(3\times10^8\mathrm{ms})}(1 - \cos150°)$$

$$= 4\times10^{-10}\mathrm{m} + (2.43\times10^{-12}\mathrm{m})(1 + 0.866) = 0.4045\ \mathrm{nm}$$

38.31 一束 0.2 MeV 的光子被碳质靶中的电子散射.(a)入射光子的波长为多少?(b)散射角为90°的光子波长为何值?(c)与入射方向成 60°角的方向上散射光子的能量又为何值?

解 ☞ (a) $\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240\mathrm{MeV\cdot fm}}{0.2\mathrm{MeV}} = 6200\mathrm{fm}$

(b) $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta) = 6200 + (2430)(1 - 0) = 8630(\mathrm{fm})$

(c) $\frac{hc}{\lambda'}=\frac{hc}{\lambda+[h/(m_e c)](1-\cos\theta)}=\frac{1240}{6200+(2430)\left(1-\frac{1}{2}\right)}=0.168(\mathrm{MeV})$

38.32 光子反冲($\phi=180°$)时,验证康普顿方程(题 38.29)仍成立.

证 ☞ 设电子的初始速度为零,根据动量守恒得

$$\frac{h}{\lambda}=P-\frac{h}{\lambda'},\text{即 } P=h\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)$$

再根据能量守恒得

$$\frac{hc}{\lambda}+E_0=\frac{hc}{\lambda'}+E,\text{即 } E=E_0+hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)$$

将上述电子末动量和末能量的表达式代入动量-能量方程,可以得到

$$\left[E_0+hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)\right]^2=E_0^2+\left[hc\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\right]^2$$

$$2E_0hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)-2h^2c^2\frac{1}{\lambda\lambda'}=2h^2c^2\frac{1}{\lambda\lambda'},\qquad E_0(\lambda'-\lambda)=2hc$$

由此 $\lambda'-\lambda=(2hc)/E_0=(2h)/(m_e c)$即为 $\cos\phi=-1$ 时的康普顿方程.

38.33 一光子打到一个静止的自由电子上被反冲回来,若电子碰撞后的速度为 αc, $\alpha\ll 1$. 证明,电子的动能是光子初始能量的 α 倍.

证 ☞ 因为 $v=\alpha c$,且 $\alpha\ll 1$,所以电子是非相对论性的.根据动量守恒解得 $h/\lambda+h/\lambda'=mv$;两边同乘以 c,$(hc)/\lambda+(hc)/\lambda'=mvc=(mv^2)/\alpha$.而能量方程为$(hc)/\lambda-(hc)/\lambda'=(mv^2)/2$ 两式相加得,$(hc)/\lambda=E_\gamma=(mv^2)/4+(mv^2)/(2\alpha)$.因为 $\alpha\ll 1$,$(mv^2)/4$ 可忽略,则$(mv^2)/2=\alpha E_\gamma$.

38.34 波长 $\lambda=0.5$ nm的一个光子与一个自由电子发生正碰后反冲.若电子初始时为静止,求碰撞后电子的速度为多大?

解 ☞ 假设散射电子是非相对论性的,则由动量守恒得 $h/\lambda=m_0v_x-h/\lambda'$.已知 $\lambda=0.5$ nm,而在 180°方向上散射光子 $\lambda'=0.5\text{ nm}+(2h)/(m_0c)=0.5048$ nm,所以 $v_x=(h/m_0)/(1/\lambda+1/\lambda')=[(6.63\times10^{-34})/(9.1\times10^{-31})](3.98\times10^9)=2.9\times10^6(\mathrm{m/s})$.

38.35 沿 x 轴方向运动的光子$\lambda=0.5$ nm,当它与一个静止自由电子碰撞后沿 y 轴方向散射.求碰撞后电子在 x、y 方向的速度分量.

解 ☞ 根据动量守恒,x 方向有 $h/\lambda=m_0v_x$,y 方向有 $h/\lambda'+m_0v_y=0$.利用康普顿散射方程,$\phi=90°$时,$\lambda'=\lambda+0.024$ Å$=5.0$ Å$+0.024$Å$=5.024$Å.由上述结果及电子的静止质量 m_0 可解出 $v_x=+1.46\times10^6$ m/s, $v_y=-1.46\times10^6$m/s.电子是非相对论性的.

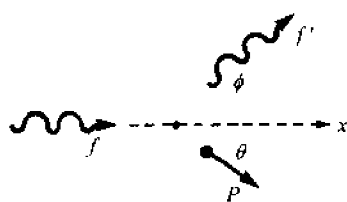


图 38-1

38.36 由电子的能量、动量相对论表达式推导出康普顿方程.

解 ☞ 如图 38-1 所示

x 方向动量守恒:$\frac{hf}{c}=\frac{hf'}{c}\cos\phi+P\cos\theta$　　(1)

y 方向动量守恒:$0=\frac{hf'}{c}\sin\phi-P\sin\theta$　　(2)

能量守恒:$hf+m_0c^2=hf'+(P^2c^2+m_0^2c^4)^{1/2}$　(3)

(Ⅰ)由(1)解出 $P\cos\theta$,由(2)解出 $P\sin\theta$,平方相加得 $h^2f^2-2h^2ff'\cos\phi+h^2f'^2=c^2P^2$.(Ⅱ)将(3)式两边平方得 $h^2f^2+h^2f'^2-2h^2ff'+2hm_0c^2(f-f')=c^2P^2$.(Ⅲ)两式相减:$(f-f')/ff'=[h/(m_0c^2)](1-\cos\phi)$.(Ⅳ)而 $f=c/\lambda$,所以:$(f-f')/(ff')=(\lambda'-\lambda)/c$.(Ⅴ)因此,$\lambda'-\lambda=[h/(m_0c)](1-\cos\phi)$.

38.37 在逆向光电效应中,用加速电子轰击钨靶时产生 X 射线光子.若 X 射线仪的加速电压为 60 kV,此辐射的最短波长为何值?

解 ☞ 因为钨的逸出功远小于加速电势能,可以认为每个电子的全部动能都转化为一个光子的最大能量

$$eV = \frac{hc}{\lambda_{\min}},\quad \lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = \frac{1240\text{keV}\cdot\text{pm}}{60\text{keV}} = 20.7\text{pm}$$

38.38　一个电子打入 X 射线管前的能量为 30 keV，假设此电子和一个巨型原子碰撞时能量全部损失，求产生 X 射线光子的波长

解 ☞ $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24\text{keV}\cdot\text{nm}}{\lambda}, \lambda = \frac{1.24}{30} = 0.0413(\text{nm}) = 0.413(\text{Å})$

38.39　计算在钴 X 射线管内，由 50 keV 的电子轰击产生的 X 射线的截止波长(Å).

解 ☞ 最小波长即截止波长，所以

$$\lambda_c = \frac{hc}{eV} = \frac{12.4\text{keV}\cdot\text{Å}}{50\ \text{keV}} = 0.248\text{Å}$$

38.40　在钴 X 射线管中，由 10 keV 的电子轰击产生的 X 射线截止波长为 1.18Å，估算普朗克常数.

解 ☞ $h = \frac{eV\lambda}{c} = \frac{(1.6\times10^{-19})(10000)(1.18\times10^{-10})}{3\times10^8} = 6.3\times10^{-34}(\text{J}\cdot\text{s})$

38.41　计算面心立方晶格结构物质产生 X 射线衍射的光栅间距.

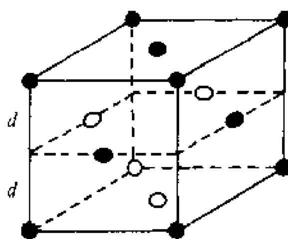


图 38-2

解 ☞ 图 38-2 为一个晶胞，边长为 $2d$，d 为所要求的光栅间距. 每个顶角处的分子为 8 个晶胞共有，面心处的分子为 2 个晶胞共有，所以在每一个晶胞中，有分子数为 $\frac{1}{8}(8)+\frac{1}{2}(6)=4$. 那么

$$\rho \equiv \text{物质密度} = \text{晶胞密度}$$

$$= \frac{(\text{每个晶胞分子数})(\text{每个分子的质量})}{\text{晶胞体积}} = \frac{4(M/N_A)}{(2d)^3}$$

其中 $M\equiv$分子量，$N_A\equiv$阿伏伽德罗常数. 解得 $d = [M/(2N_A\rho)]^{1/3}$.

38.42　已知 KCl 的分子量为 74.6kg/kmol，密度为 1980 kg/m^3，计算它的光栅间距 d.

解 ☞ 由题 38.41 中的公式得

$$d = \sqrt[3]{\frac{74.6}{(2)(6.02\times10^{26})(1980)}} = 3.14\times10^{-10}(\text{m}) = 3.14(\text{Å})$$

38.43　在 18℃ 时，石膏的光栅间距为 7.600Å，它常用于产生长波 X 射线. 若产生一级布拉格反射的偏向角为 51°35′，求钠光的 $K\alpha$ 系特征谱线的波长.

解 ☞ 对于布拉格反射

$$n\lambda = 2d\sin\theta,(1)(\lambda) = 2(7.600)(\sin51°35') = (15.200)(0.7835) = 11.9(\text{Å}).$$

38.44　某矿物盐的光栅间距约为 2.8Å，产生某特定谱线的二级布拉格反射角为 30°，求反射的辐射线波长.

解 ☞ $n=2$ 时，由布拉格反射公式得

$$n\lambda = 2d\sin\theta,\quad 2\lambda = (2)(2.8)(\sin30°), \lambda = 1.4(\text{Å})$$

38.45　波长为 1.5Å 的 X 射线入射到光栅间距 d 为 2.8Å 的 NaCl 晶体上，求此晶格能产生的最大衍射级.

解 ☞ $\sin\theta = (n\lambda)/(2d)$. 等式右项值不能大于 1，$n=3$ 时，$\sin\theta = [(3)(1.5)]/5.6<1$；$n=4$ 时，$\sin\theta = [(4)(1.5)]/5.6>1$. 最大衍射级为 3.

38.46　波长 1.2Å 的 X 射线打到 $d=2.2$Å 的晶体上，产生的 100 级条纹中，第二次条纹的衍射角为多大?

解 ☞ 特定散射角的布拉格反射公式为 $\sin\theta = (n\lambda)/(2d) = [(2)(1.2)]/4.4, \theta = 33°$.

38.47　铝产生软 X 射线的衰减系数为 1.73/cm，求一块 1.156 cm 厚的铝板的 X 射线发射

率.

解 ☞ 由指数衰减方程得

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad \frac{I}{I_0} = e^{-1.73(1.156)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{2.718^2} = 0.135$$

即发射率为 13.5%.

38.48 一束单色 X 射线经过一块厚 5 mm 的铝板后,强度减少了 $\frac{1}{2}$;若铝板厚度为 15 mm,则强度将减少多少?

解 ☞ $\frac{I_1}{I_0} = e^{-\mu x}$, $\frac{1}{2} = e^{-5\mu}$, $\frac{I_2}{I_0} = e^{-15\mu} = (e^{-5\mu})^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$(剩余比例)

$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$(减少比例)

38.49 证明:当一正电子和负电子(都为静止)湮没产生两个光子时,每个光子都具有康普顿波长(题 38.29).

证 ☞ 湮没前的全部能量为 $2m_ec^2$;湮没后为 $2[(hc)/\lambda]$(由动量守恒得光子能量相等).再根据能量守恒

$$2m_ec^2 = 2\frac{hc}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{h}{m_ec} = 2430\text{fm}$$

38.50 证明:产生正负电子对的光子的临界波长为 $\frac{1}{2}$ 康普顿波长.

证 ☞ 入射光子至少具有能产生零动能电子对的能量,(不计反冲核的动能),则

$$\frac{hc}{\lambda} \geqslant 2m_ec^2, \text{即 } \lambda \leqslant \frac{h}{2m_ec} = 1215 \text{ fm}$$

38.51 正-负电子对湮没后产生两个沿相反方向运动的 1 MeV 的光子.求正、负电子的功能.

解 ☞ 两个沿相反方向运动的光子具有相同的能量和动量.根据动量守恒,正、负电子具有相等、反向的动量,因而它们的动能相等.由能量守恒得 $2\text{MeV} = 2(m_0c^2) + 2\text{KE} = 2(0.51)\text{MeV} + 2\text{KE}$,每个电子的 KE = 0.49MeV.

38.3 德布罗意波和不确定性原理

38.52 一粒质子被 1000V 的电势差加速后,德布罗意波长是多少?

解 ☞ $\lambda = h/(mv)$,而 $m \approx m_0$(非相对论性),v 则由 $(mv^2)/2 = 1000e$ 得出.代入公式求得 $\lambda = 9.1 \times 10^{-13}$ m.

38.53 求质量为 1.67×10^{-27} kg,速度为 2200 m/s 的高温中子的德布罗意波长.

解 ☞ 根据德布罗意波长公式,

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.67 \times 10^{-27}(2200)} = 0.18(\text{nm})$$

38.54 求速度为 2×10^6 m/s 的下述粒子的德布罗意波长值(a)电子,(b)质子,(c)0.2 kg 的球.

解 ☞ 根据德布罗意波长定义

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{m(2 \times 10^6 \text{ m/s})} = \frac{3.3 \times 10^{-40} \text{ m}\cdot\text{kg}}{m}$$

将各粒子质量值 m 代入上式,得电子的德布罗意波长为 3.6×10^{-10}m,质子的德布罗意波长为 2×10^{-13}m,0.2 kg 的球的德布罗意波长为 1.65×10^{-39} m.

38.55 一个电子由静止落入电势差为 100 V 的加速电场后,德布罗意波长为多少?

解 ☞ 电子的速度仍远小于 c,故相对论效应可忽略.电子得到的动能 KE 为 $\frac{1}{2}mv^2$,等于失去的电势能 PE = Vq.所以

$$v=\sqrt{\frac{2Vq}{m}}=\sqrt{2\frac{(100\text{V})(1.6\times10^{-19}\text{C})}{9.1\times10^{-31}\text{kg}}}=5.9\times10^{6}\ \text{m/s}$$

则 $\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}}{(9.1\times10^{-31}\text{kg})(5.9\times10^{6}\ \text{m/s})}=0.123\ \text{nm}$

38.56 若一个电子的德布罗意波长为1Å,求它的速度和动能.

解 ☞ $\lambda=\frac{h}{mv}$ $10^{-10}=\frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}v}$, $v=\frac{6.63\times10^{-34}\times10^{10}}{9.11\times10^{-31}}=7.28\times10^{6}(\text{m/s})$

$$\text{KE}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(9.11\times10^{-31})(7.28\times10^{6})^2=2.41\times10^{-17}(\text{J})=151(\text{eV})$$

38.57 将一束电子流射入间距为d的衍射光栅,电子的速度为400 m/s. 若在与入射电子流成25°的方向上出现衍射极大,则d应取何值?

解 ☞ 第一极大处$\lambda=d\sin\theta=d\sin25°$. 由德布罗意关系得$h/(mv)=\lambda=(6.63\times10^{-34})/(9.1\times10^{-31}\times400)$, $\lambda=1.82\ \mu\text{m}$. 所以$d=\lambda/(\sin25°)=4.3\ \mu\text{m}$. 若为$n$级极大,则$n\lambda=d\sin\theta$, $d=n(4.3\ \mu\text{m})$.

38.58 岩盐形成边长$a=5.63$ Å的立方晶格结构. 一束电子如图38-3(a)所示射入岩盐. (a)求图中虚线表示的晶面间距为何值? (b)若入射电子都被这些晶面反射回去,问入射电子的加速电势差至少为何值?

解 ☞ (a)根据图38-3(b)中的几何关系,

$$\frac{d}{a}=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\text{所以 } d=\frac{a}{\sqrt{5}}=2.518\text{Å}$$

(b)由布拉格公式$n\lambda=2d\sin\theta$得,最大波长$\lambda=2(2.518\times10^{-10})(2/5^{1/2})=4.5(\text{Å})$. 它对应的能量$E=h^2/(2m\lambda^2)=1.2\times10^{-18}\text{J}=7.44\text{eV}$,故电势差为7.44V.

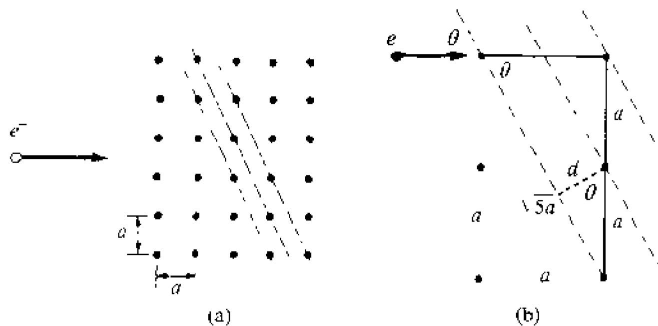


图 38-3

38.59 高温时,金属中一个自由电子的平均动能为$(3kT)/2$. (a)温度为何值时,电子的平均德布罗意波长为0.5 nm? (b)若改为一个能量为$(3kT)/2$,质量为4 m_p的氦原子结果又如何?

解 ☞ 上述两种情况下都有:$(mv^2)/2=p^2(2m)=(3kT)/2$. 令$p=h/\lambda$,得$T=h^2/(3k\lambda^2m)$,代入得$T=4.25\times10^{-26}/m$.将电子质量,氦原子质量$(4\times1.67\times10^{-27}\text{kg})$代入,求出$T_e=46600\text{K}$, $T_{He}=6.3\text{K}$.

38.60 如图38-4所示,一束电子射向晶格常数为b的晶体. 当电子束的德布罗意波长取何值时,电子将被反射回来? 此时电子的动能为多少? 实验发现,此电子束不能沿图示的方向穿过晶体,估算电子的能量,用eV表示. $b=2\times10^{-10}$m.

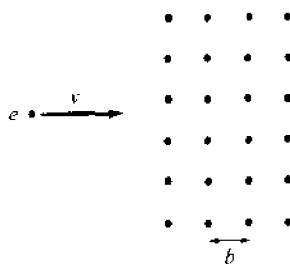


图 38-4

解 ☞ 当$2b=n\lambda$时,连续晶面反射加强,发生强反射,所以$\lambda=(2b)/n$. 对于非相对论性电子,$E_n=(p_n^2)/(2m)=h^2/(2m\lambda_n^2)=$

$(n^2h^2)/(8b^2m)$，得到 $E_n=9.4n^2\text{eV}$.

38.61　原子核半径的数量级为 10^{-15} m. 现假设将一个质子限制在一根长 2×10^{-15} m 的窄管中，此质子在管中产生的谐振德布罗意波长为多少？最大波长对应的动量为多少？不考虑相对论效应，对应的能量又为多少？（用 eV 表示.）

解　☞ 这是个简单的驻波问题. 根据对称边界条件，允许的 λ 值为 $\lambda_n=(2L)/n=[(4\times10^{-15})/n]$m；因为 $\lambda_n=h/p_n$，故 $p_n=(nh)/2L=n(1.66\times10^{-19})$. 非相对论动能 $=E_n=p_n^2/(2m)=n^2(8.2\times10^{-12}\text{J})$，即 $n^2(51\ \text{MeV})$. $n=1$ 时对应的波长最长.

38.62　不考虑相对论效应求得的电子德布罗意波长误差为 5%，此电子的能量为何值？

解　☞ 非相对论情况下，德布罗意波长

$$\lambda_{nr}=\frac{hc}{pc}=\frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2K}}$$

相对论情况下，

$$(K+m_0c^2)^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2，即\ pc=\left[2m_0c^2K\left(1+\frac{K}{2m_0c^2}\right)\right]^{1/2}$$

德布罗意波长

$$\lambda_r=\frac{hc}{pc}=\frac{hc}{\{2m_0c^2K[1+K/(2m_0c^2)]\}^{1/2}}$$

由题意得，

$$\lambda_{nr}-\lambda_r=0.05\lambda_r；\lambda_{nr}/\lambda_r=1.05$$

$$\frac{\lambda_{nr}}{\lambda_r}=\sqrt{1+\frac{K}{2m_0c^2}}，\quad 1.05=\sqrt{1+\frac{K}{2(0.511\text{MeV})}}$$

解得，$K=0.105$MeV.

38.63　证明当粒子的能量远大于它的静止能量时，此粒子的德布罗意波长约等于具有相同能量值的光子的德布罗意波长.

证　☞ $E^2=p^2c^2+E_0^2$，$p=\frac{E}{c}\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\approx\frac{E}{c}$，若 $E\gg E_0$，则 $\lambda=\frac{h}{p}\approx\frac{hc}{E}$. 而光子，$E=h\nu=(hc)/\lambda_r$，得 $\lambda_r=(hc)/E=\lambda$.

38.64　将一个电子限定在长为 L 的试管中，若此试管内一半区域电势能为零，另一半区域为 10eV. 设电子总能量 $E=15$eV，求它在 10 eV 区域和 0eV 区域的德布罗意波长之比，并沿试管方向画出波函数 Ψ 的图像.

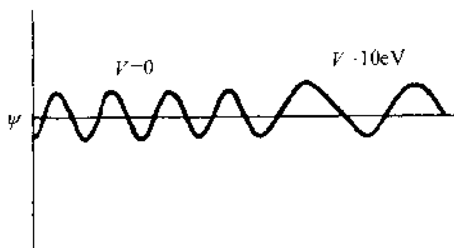


图 38-5

解　☞ 波函数图像如图 38-5 所示. $\lambda=h/p=h/(2mK)^{1/2}$，$K$ 为电子动能. $\lambda_1/\lambda_2=(K_2/K_1)^{1/2}=(15/5)^{1/2}=1.73$.

38.65　将一个质量为 m 的粒子限定在长为 L 的一维直线区域内. 由物质波概念证明此粒子的能量是离散的，并写出这些能量值.

解　☞ 设粒子被限定在 $x=0$ 到 $x=L$ 的直线区域内，则在此区域外找到粒子的概率为零. 而 Ψ 的平方表示在某一位置处找到粒子的概率，所以当 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant L$ 时，波函数 $\psi=0$. 当给定区域内的波函数 ψ 满足在 $x=0$ 和 $x=L$ 时 ψ 的波长为零时，满足连续性条件. 因此，从 $x=0$ 到 $x=L$ 恰有整数个半波时为可能的波长，即 $L=(n\lambda)/2$，其中 n 为整数，称为量子数，取值 $n=1,2,3,\cdots$ 根据德布罗意关系 $\lambda=h/p$ 求得粒子动量为离散值

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{nh}{2L}$$

因为粒子在区域内不受力的作用，故势能为常数，令它为零. 因此，粒子的能量只有动能，且为离散值

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{[(nh)/(2L)]^2}{2m}$$

即 $E_n = n^2\dfrac{h^2}{8mL^2}$, $n = 1,2,3,\cdots$此题说明了物质概率解释的一个基本观点,即具有边界的体系的能量只能取离散值,且不取零值.

38.66 若某粒子位置的不确定度等于德布罗意波长,证明此粒子速度的不确定度大于或等于速度的 $1/(4\pi)$倍.

证 ☞ 利用海森堡不确定性原理,$\Delta x = \lambda = h/(mv_x)$,

$$\Delta x\Delta(mv_x) \geqslant \frac{h}{4\pi}, \quad \frac{h}{mv_x}\Delta(mv_x) \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

因为 m 为常数

$$\frac{h}{mv_x}(m\Delta v_x) \geqslant \frac{h}{4\pi}, \quad \frac{h}{v_x}\Delta v_x \geqslant \frac{h}{4\pi}, \quad \Delta v_x \geqslant \frac{1}{4\pi}v_x$$

38.67 若电子处于某激发态的时间的不确定度为 10^{-7}s,则此激发态能量的不确定度至少为何值?(单位用 J 表示.)

解 ☞ 设此激发态能量为 W,则

$$\Delta W\Delta t \geqslant \frac{h}{4\pi} \quad (\Delta W)(10^{-7}) \geqslant \frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi}$$

$$\Delta W \geqslant \frac{6.63\times10^{-27}}{4\pi} \geqslant 0.528\times10^{-27}\text{J}$$

38.68 一只质量为 50 g 的高尔夫球以 80 m/s 的速度作水平运动,根据海森堡不确定性原理,当速度的不确定度为 0.01m/s 时,此球位置的不确定度为何值?(质量的不确定度忽略.)

解 ☞ $\Delta x\Delta(mv_x) \geqslant \frac{h}{4\pi}$,因为 m 为常数

$$(\Delta x)(m\Delta v_x) \geqslant \frac{h}{4\pi}, \quad (\Delta x)(0.050)(0.01) \geqslant \frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi},$$

$$\Delta x \geqslant 1.06\times10^{-31}\text{m}$$

不确定原理对于宏观物体的位置测量无限制.

38.69 某原子核半径为 5×10^{-15}m,假设核内质子位置的不确定度为 5×10^{-15} m,则质子动量的最小不确定度为何值?能量的最小不确定度又为何值?(单位:eV.)

解 ☞ 由 $\Delta x\Delta p = h/(4\pi)$得 $\Delta p = h/[4\pi(5\times10^{-15})] = 1.05\times10^{-20}$kg·m/s.考虑到 $\Delta p = m_0 v$, $v = \Delta p/(1.67\times10^{-27}) = 6.3\times10^6$(m/s),质子是非相对论性的.则 $E = p^2/(2m)$, $\mathrm{d}E = (2p\mathrm{d}p)/2m$; $p \geqslant \Delta p$,所以 $\Delta E \geqslant \Delta p^2/m = 6.6\times10^{-14}$J,即 412keV.

38.70 若普朗克常数 $h' = 660$J·s,求质量为 100 kg,速度为 5 m/s 的足球运动员的德布罗意波长为多少?假设他的动量的不确定度等于他的动量,则他对面的运动员看来,此人位置不确定度的最小值是多少?

解 ☞ $\lambda = h'/(mv) = 660/[100(5)] = 1.32$(m).根据不确定性原理,$\Delta p\Delta x = h'/4\pi$,所以 $\Delta x = 660/[4\pi(500)] = 10$(cm).

38.71 根据 $\Delta p\Delta x \geqslant h/(4\pi)$,证明作圆周运动的粒子满足 $\Delta L\Delta\theta \geqslant h/(4\pi)$ 其中 ΔL 为角动量的不确定度,$\Delta\theta$ 为角度的不确定度.

证 ☞ 因为粒子作圆周运动,故应在切向方向利用不确定性原理,

$$\Delta p_s\Delta s \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

其中 s 取圆周长方向.角动量与线动量的关系为

$$L = mvR = p_s R$$

因此,$\Delta p_s = \Delta L/R$.角位移与弧长的关系为 $\theta = s/R$,因此,$\Delta s = R\Delta\theta$.所以

$$\Delta p_s\Delta s = (\Delta L/R)(R\Delta\theta) = \Delta L\Delta\theta \geqslant h/(4\pi)$$

第三十九章　近代物理;原子;原子核;固体电子学

39.1　原子与分子

39.1　钠原子发出波长为 589.6 nm 的黄色光线.求发出该光线的两能级的能量差.

解　☞ $\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{589.6\ \text{nm}} = 2.1\text{eV}$

39.2　某种分子的振动能级图上,有二个能级间的能量差为 0.0141 eV.求该分子从其中一个能级跃迁到另一能级发出谱线的长度.

解　☞ $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$,　$\lambda = \frac{1.240\text{eV}\cdot\mu\text{m}}{0.0141\text{eV}} = 88\ \mu\text{m}$

39.3　当多电子原子的内层电子跃迁到较低能级的状态时发出 X 射线.如果两能级的跃迁发出 0.5Å 的 X 射线,求它们之间的能量差.

解　☞ $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4\ \text{keV}\cdot\text{Å}}{0.5\ \text{Å}} = 24.8\text{keV}$

39.4　里德伯常数 R(氢原子)的值为 $1.097\times10^7\ \text{m}^{-1}$,求巴耳末系第一条线的波长.

解　☞ 巴耳末系的第一条谱线来自氢原子中从 $n=3$ 的能级到 $n=2$ 的能级的电子跃迁.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_B^2} - \frac{1}{n_A^2}\right) = (1.097\times10^7)\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1.097(0.1389)\times10^7$$

$$\lambda = 656.3\ \text{nm}$$

39.5　已知氢原子的电离能为 13.6 eV,求莱曼系第一条谱线的波长.

解　☞ 氢原子中量子数为 n 的能级能量为

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\text{eV}$$

莱曼系的第一条谱线是电子从 $n=2$ 跃迁到 $n=1$ 的状态造成的.光子的能量为

$$E = E_2 - E_1 = \frac{13.6}{2^2} + \frac{13.6}{1^2},\quad E = E_2 - E_1 = -\frac{13.6}{4} - 13.6 = 10.2(\text{eV})$$

现在运用普朗克公式求

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{10.2\ \text{eV}} = 122\ \text{nm}$$

39.6　如果氢原子的电离能为 13.6 eV,求量子数 $n=3$ 时该能级的能量是多少?

解　☞ H 在该量子态的能量为

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\ \text{eV},\text{当}\ n = 3,\quad E_3 = -\frac{13.6}{3^2} = -1.51(\text{eV})$$

39.7　巴耳末系系限的波长是氢原子中的电子从 $n=\infty$ 的状态跃迁到 $n=2$ 的状态发出的.求该谱线的波长.

解　☞ $E_n = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}$,　$E_2 = \frac{-13.6\text{eV}}{2^2} = -3.4\text{eV}, E_\infty = 0$

$\Delta E = E_\infty - E_2 = 0 - (-3.4\text{eV}) = 3.4\text{eV}$

根据 $\Delta E = (hc)/\lambda$ 求出相应的波长,结果为 365 nm.

39.8　若氢原子被轰击,原子被激发到较高的能级.当它又回到较低的能级时就会发出光.求氢原子从较高的能级跃迁到 $n=1$ 的态时发出的三条最长的谱线的波长

解　☞ 三个跃迁分别为

$$n = 2 \to n = 1,\qquad \Delta E_{2,1} = -3.4 - (-13.6) = 10.2(\text{eV})$$

$$n=3\to n=1,\quad \Delta E_{3,1}=-1.5-(-13.6)=12.1(\mathrm{eV})$$
$$n=4\to n=1,\quad \Delta E_{4,1}=-0.85-(-13.6)=12.75(\mathrm{eV})$$

利用 $\Delta E=hf=(hc)/\lambda$ 求出相应的波长.例如对于从 $n=2$ 到 $n=1$ 的跃迁,

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E_{2,1}}=\frac{1240\ \mathrm{eV\cdot nm}}{10.2\ \mathrm{eV}}=122\ \mathrm{nm}\quad(与\ 39.5\ 题一致)$$

利用相同的方法分别求出其它的波长分别为 102 nm 和 97 nm.这是莱曼系的前三条谱线.

39.9 要使稳定的氢原子电离则用来照射的最长波长应为多少?

解 ☞ 激发光子必须具有一定的能量使之被原子吸收后使原子从 $n=1$ 的能级跃迁到 $n=\infty$ 的能级.由于 $E_\infty-E_1=13.6$ eV,利用 $E_\infty-E_1=(hc)/\lambda$ 求得波长为 91 nm.波长比该值小的光不能使电子从原子上电离而只能增加电子的动能.

39.10 (a)计算有两个电子电离的锂离子的前三个能级,电离能是多少? (b)求 K 系前三条光谱线的波长($n_l=1;n_h=2,3,4$).

解 ☞ (a)$Z=3$,玻尔能量公式写成

$$E_n=-\frac{122.40\mathrm{eV}}{n^2}\tag{1}$$

所以 $E_1=-122.40$ eV(电离势为 122.40 V)且

$$E_2=-30.60\ \mathrm{eV},\quad E_3=-13.60\ \mathrm{eV},\quad E_4=-7.65\ \mathrm{eV}$$

(b)根据(1)式,锂离子($Z=3$)的波长是相应氢原子波长(39.8 题)的 $\frac{1}{9}$:$\lambda_1=13.5$ nm, $\lambda_2=11.3$ nm, $\lambda_3=10.8$ nm.

39.11 使氦原子电离一个电子(原子中的两个电子被移去一个)后的能级为 $E_n=(-54.4/n^2)$eV.画出该系统的能级图.

解 ☞ 见图 39-1.

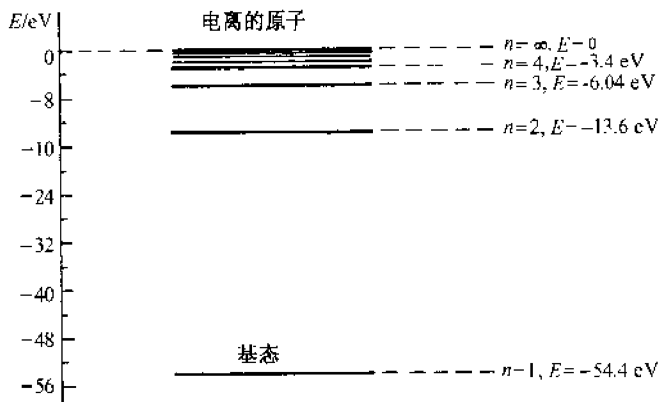


图 39-1

39.12 假设可以在铜蒸气中使$_{29}$Cu 失去 28 个电子.(a)计算剩下电子的前三个能级.(b)求光谱中 $n_l=1;n_h=2,3,4$ 的光线的波长以及最后一个电子的电离势.

解 ☞ (a)$Z=29$,所以所求的能量是相应$_1$H 能量的 $29^2=841$ 倍:

$$E_1=841(-13.60)=-11.438(\mathrm{keV})$$
$$E_2=\frac{E_1}{4}=-2.859\mathrm{keV},\quad E_3=\frac{E_1}{9}=-1.271\ \mathrm{keV}$$

(b)运用 $\Delta E=E_n-E_1=(hc)/\lambda=(12.40\mathrm{keV\cdot Å})/\lambda$,

$$\lambda_1=1.44\ \mathrm{Å},\quad \lambda_2=1.22\ \mathrm{Å},\quad \lambda_3=1.15\ \mathrm{Å},\quad \lambda_\infty=1.08\ \mathrm{Å}$$

这些波长位于 X 射线的范围.电离势是 λ_∞ 所对应的电离电压.因为

$$\frac{hc}{\lambda_\infty}=\frac{12.40\ \mathrm{keV\cdot Å}}{1.08\ \mathrm{Å}}=11.5\ \mathrm{keV}$$

所以电离势为 11.5keV.

39.13　一个电子绕带正电 Ze 的核运动.求电子速度与轨道半径的关系.

解　☞ 库仑力等于(电子质量)(向心加速度),

$$\frac{k(e)(Ze)}{r^2}=\frac{mv^2}{r},\quad 即\quad v^2=\frac{kZe^2}{mr},\quad 其中\ k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

在上式中我们假设核是静止的且质量无限大.

39.14　求 39.13 题中电子的总能量与轨道的半径的关系.

解　☞ 电子的势能为

$$U=qV=(-e)V=-e\frac{k(Ze)}{r}=-\frac{kZe^2}{r}$$

电子的动能由 39.13 题得

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{kZe^2}{mr}=\frac{kZe^2}{2r}$$

总能量为

$$E=K+U=\frac{kZe^2}{2r}-\frac{kZe^2}{r}=-\frac{kZe^2}{2r}=\frac{1}{2}U$$

39.15　由玻尔假设即轨道角动量 $L=mvr$ 等于一个整数乘以 $h/(2\pi)$ 推导出轨道半径,速度和能量的量子化.

解　☞

$$mv_nr_n=\frac{nh}{2\pi}\tag{1}$$

即

$$m^2v_n^2r_n^2=\frac{n^2h^2}{4\pi^2}\tag{2}$$

由 39.13 题 $v_n^2=(kZe^2)/(mr_n)$ 消去(1)中的 v_n^2, $mkZe^2r_n=(n^2h^2)/(4\pi^2)$.所以

$$r_n=\frac{n^2h^2}{4\pi^2mkZe^2}\tag{3}$$

$$v_n=\left(\frac{4\pi^2k^2Z^2e^4}{n^2h^2}\right)^{1/2}=\frac{2\pi kZe^2}{nh}\tag{4}$$

由 39.14 题

$$E_n=-\frac{kZe^2}{2r_n}=-\frac{2\pi^2mk^2Z^2e^4}{n^2h^2}=-\frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2n^2h^2}\tag{5}$$

用氢原子$(Z=1)n=1$的值表示,其值以零为下标

$$r_n=\frac{n^2r_0}{Z},\qquad r_0=\frac{h^2}{4\pi^2mke^2}\tag{6}$$

$$v_n=v_0\frac{Z}{n},\qquad v_0=\frac{2\pi ke^2}{h}=\frac{e^2}{2h\varepsilon_0}\tag{7}$$

$$E_n=-\frac{Z^2}{n^2}E_0,\qquad E_0=\frac{-me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}=-hcR_\infty\tag{8}$$

其中 R_∞ 是质量为无限大的核的里德伯常数.

39.16　求氢原子的第三电子轨道的半径 r.

解　☞ 由 39.15 题的公式(3), $k=1/4\pi\varepsilon_0$,

$$r_n=\frac{\varepsilon_0n^2h^2}{\pi me^2}=\frac{(8.85\times10^{-12})(3^2)(6.63\times10^{-34})^2}{\pi(9.11\times10^{-31})(1.60\times10^{-19})^2}=0.478(\text{nm})$$

39.17　求氦原子电离一个电子后的第二玻尔轨道半径以及该轨道中电子的速度.

解　☞ 根据 39.15 题的(3)式, He^+ 中玻尔轨道的半径为

$$r_n=\frac{\varepsilon_0n^2h^2}{\pi me^2Z}$$

对于氦原子的第二个轨道, $Z=2$, $n=2$.

$$r_2 = \frac{(8.85\times10^{-12})(2^2)(6.63\times10^{-34})^2}{\pi(9.11\times10^{-31})(1.60\times10^{-19})^2(2)} = 0.106(\mathrm{nm})$$

利用玻尔条件 $mvr = (nh)/(2\pi)$ 求速度 v

$$mvr_2 = \frac{2h}{2\pi}$$

$$v = \frac{h}{\pi m r_2} = \frac{6.63\times10^{-34}}{\pi(9.11\times10^{-31})(1.06\times10^{-10})} = 2.19\times10^6(\mathrm{m/s})$$

39.18 几个基本量组成的值 $e^2/(2\varepsilon_0 hc)\equiv\alpha$ 叫作精细结构常数.证明 α 是一个无量纲的数,大小为 $\frac{1}{137}$.

证 ☞ 单位为

$$\alpha = \left[\frac{\mathrm{C}^2}{(\mathrm{F/m})(\mathrm{J\cdot s})(\mathrm{m/s})}\right] = \left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{F\cdot J}}\right] = \left[\frac{\mathrm{C/F}}{\mathrm{J/C}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}}\right] = [1]$$

数值为

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2(8.85432\times10^{-12})(6.6262\times10^{-34})(2.997925\times10^8)}{(1.6021\times10^{-19})^2} = 137.05$$

39.19 用精细结构常数表示 H 基态电子速度.

解 ☞ 由 39.18 题和 39.15 题的(7)式,$v_0 = \alpha c$.

39.20 对于氢原子证明当 $n\gg1$ 时从 n 能级跃迁到 $n-1$ 能级发出光子的频率等于 n 态上的转动频率.

证 ☞ n 态的转动频率(见 39.15 题)

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{(2\pi ke^2)/(nh)}{(2\pi n^2h^2)/(4\pi^2kme^2)} = \frac{4\pi^2k^2me^4}{n^3h^3}$$

发出光子的频率为

$$\nu = c\frac{1}{\lambda} = cR_\infty\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] = cR_\infty\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

当 $n\gg1$,

$$\nu \approx cR_\infty\frac{2n}{n^2n^2} = c\,\frac{2\pi^2k^2e^4m}{h^3c}\,\frac{2}{n^3} = \frac{4\pi^2k^2me^4}{n^3h^3}$$

这与上面求出的转动频率相等.[根据经典理论,转动电荷的辐射频率等于其转动频率.]

39.21 一束电子从静止经过 12.75V 的电压加速后轰击氢气(单原子分子)将会发出哪几种光线?

解 ☞ 如果一个原子吸收 12.75 eV 的能量,它将从基态($n=1$)跃迁到第三激发态($n=4$).所以当它又回到基态时可能发出莱曼系的前三条光线,巴耳末系的前两条光线以及帕邢系的第一条光线.

39.22 一系列波长从 1000 Å 到 10 000 Å 的连续辐射通过单原子氢气.然后观察该辐射的光谱,会发现什么结果?

解 ☞ 在波长在 1000 Å 到 10 000Å 范围内,能被氢原子吸收的是莱曼系中波长为 1215 Å 和 1025.7 Å 的两条光,整个巴耳末系以及帕邢系中除前四条光以外的所有光.因为气体主要处在基态,光谱中主要是莱曼系线.被吸收了.

39.23 运用 $^1_1$H 的约化质量求(a)最小玻尔轨道的半径.(b)第五玻尔轨道的半径.

解 ☞ 当核的质量 M 认为是有限值时,39.15 题的等式中电子质量 m 应该用约化质量代换.

$$m' = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+(m/M)}$$

r_1^0 表示理想半径,$r_{1\mathrm{H}}$ 表示氢原子的真实第一半径(见 39.15 题)

(a) $r_{1\mathrm{H}} = \left(1+\frac{m}{M}\right)r_1^0 = \left(1+\frac{1}{1836}\right)(0.5293) = 0.5296(\text{Å})$

(b) $r_5 = 25r_{1\mathrm{H}} = 13.24\text{Å}$

39.24 求图 39-2 中两个轨道上电子的速率和角动量.

解 ☞ (a)总角动量 L_n 取决于量子数 n，所以

$$L_1 = 1\left(\frac{h}{2\pi}\right) = 1.055\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

但由图 39-2 以及对质心的定义，

$$L_1 = mv_1r_1^0 + MV_1(r_{1H} - r_1^0) = mv_1r_{1H} = mv_1\left(1+\frac{m}{M}\right)r_1^0$$

$$v_1 = \frac{L_1}{m[1+(m/M)]r_1^0} = \frac{h/2\pi}{m[1+(m/M)][(\varepsilon_0h^2)/(\pi me^2)]} = \frac{v_1^0}{1+(m/M)}$$

$$= \frac{c/137.0}{1+(1/1836)} = 2189\ \text{km/s}$$

(b) $L_5 = 5L_1 = 5.277\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$,　$v_5 = \frac{v_1}{5} = 437.8\ \text{km/s}$

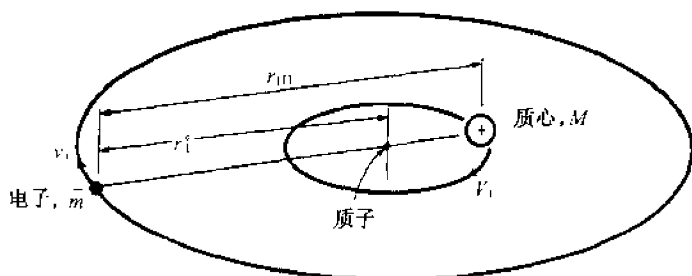


图 39-2

39.25　求 ${}_1^1$H 中用约化质量修正后前四个能级的能量值.

解 ☞ $E_1 = \frac{m'}{m}E_1^0 = \frac{E_1^0}{1+(m/M)} = -\frac{13.60}{1+(1/1836)} = -13.598(\text{eV})$

$$E_2 = \frac{E_1}{4} = -3.3995(\text{eV}),\ E_3 = \frac{E_1}{9} = -1.5109\text{eV},\ E_4 = \frac{E_1}{16} = -0.8499\text{eV}$$

39.26　如果氘与氢 H_α 线的波长分别为 6561.01Å 和 6562.80 Å，求两原子质量的比值.

解 ☞ 用原子的约化质量表示，里德伯公式写成

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R_\infty Z^2}{1+(m/M)}\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right)$$

所以，$\lambda_H/\lambda_D = [1+(m/M_H)]/[1+(m/M_D)] \approx 1+(m/M_H) - m/M_D$ 即 $0.0002728 = m/M_H - m/M_D = [(M_D - M_H)/M_D](m/M_H)$. 已知 $m/M_H = 1/1836$，所以 $0.5009 = 1-\frac{M_H}{M_D}$，即 $\frac{M_H}{M_D} = 0.499$

39.27　一个电子和其反粒子(正电子)能组成一个束缚系统，称为电子偶素. 该电子偶素的电离势为多大？

解 ☞ 正电子的质量与电子相同且带电量与质子相等. 根据约化质量，由玻尔理论得到正电子与氢原子有相同的能级. 该题中 $m' = m^2/2m = m/2$，由于能级与质量成正比，电偶极子的能级是氢原子的一半. 故电离势等于 $\frac{1}{2}(13.6\text{V}) = 6.8\text{V}$.

39.28　估算钨原子从 $n=2$ 跃迁到 $n=1$ 发出 X 射线的波长. 实验得到的结果为 0.021 nm. ($Z=74$.)

解 ☞ 由类氢离子的能量公式 $E_n = (-13.6Z^2)/n^2$ 估算 $n=1$ 和 2 时的能量. 因为钨的质量数 $Z=74$，所以 $E_2 - E_1 = \frac{3}{4}(7.5\times10^4) = 5.59\times10^4(\text{eV})$，$(hc)/\lambda = E_2 - E_1$，求得 $\lambda = 0.022$ nm.

39.29　估算铅原子 $n=1$ 上的电子被电离需多大的能量. 获得该能量需要多大波长的 X 射

线？($Z=82$.)

解 ☞ 由 $Z=82$ 和 $E_n=(-13.6Z^2)/n^2$ 求得 $n=1$ 上电子的结合能为 91 keV. 对应的 X 射线波长 $\lambda=1240/(91\times10^3)=0.0136$(nm).

39.30 摩塞利(Moseley)定律说明 X 射线 K_α 线的频率的平方根与元素的原子量 Z 成正比. 根据类氢离子的能级判断这一结果.

解 ☞ $(hc)/\lambda=E_2-E_1=(\text{常数})Z^2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$, $c/\lambda=f$, 故 $f^{1/2}$ 与 Z 成正比.

39.31 用波长为 1.37 nm 的 X 射线激发原子从而发出光电子. 如果光电子的能量为 83eV, 求发出光电子的能级的能量.

解 ☞ 由 $E=(hc)/\lambda$ 求得 X 射线的能量 $=1240/1.37=905$(eV). 电子的结合能为 $905-83=822$(eV), 电子能级为 -822eV.

39.32 假设电子没有自旋也就没有自旋量子数. 列举遵循泡利不相容原理的前三个单价元素的 Z.

解 ☞ 在 $n=1$ 上只有一个电子($n=1, l=0, m_l=0$). 在 $n=2$ 上有 4 个电子($n=2, l=0, m_l=0$; $n=2, l=1, m_l=0, \pm1$). 第 6 个电子在 $n=3$ 能级上. 前三个单价元素 Z 为 1, 2, 6. $n=3$ 的能级上有 9 个电子($n=3, l=0, m_l=0$; $l=1, m_l=0, \pm1$; $l=2, m_l=0, \pm1, \pm2$)所以该假设中 $Z=15$ 是第四个单价元素.

39.33 一个氮分子中的两个氮原子像被一根弹簧相连的两个质量相同的物体. 氮分子的固有振动频率为 7×10^{13}Hz. 求可能会出现的振动状态的能量差. 为了获得这么大的能量, 电子减少的电势差是多大?

解 ☞ 量子化的简谐振动能量为$\left(n+\frac{1}{2}\right)hf_0$, 能量差为 $hf_0=(6.63\times10^{-34})(7\times10^{13})=4.64\times10^{-20}(J)=0.29$(eV) 所以, $V=0.29$V.

39.34 CO 分子的两个原子像弹簧振子的拉伸和压缩一样, 固有频率为 6.5×10^{13}Hz. 该分子的振动能量是多大(以 eV 为单位)?

解 ☞ 能量$=\left(n+\frac{1}{2}\right)hf_0=\left(n+\frac{1}{2}\right)(6.63\times10^{-34})(6.5\times10^{13})=\left(n-\frac{1}{2}\right)(4.31\times10^{-20})$J

$$=0.27\left(n-\frac{1}{2}\right)\text{eV}.$$

39.35 与 H_2 分子中两原子间振动对应的等效劲度系数为 570 N/m. 求该分子的振动能量是多大? 室温下的热能约为$\frac{1}{40}$eV. 求热能与二振动能级间的能量差的比值.

解 ☞ 运用劲度系数为 k 的简谐振动的频率公式. 由于两原子都在运动, 约化质量 $\mu=m/2$. 所以频率公式为 $2\pi f_c=(k/\mu)^{1/2}=(2k/m)^{\frac{1}{2}}$, $f_c=1.32\times10^{14}$Hz, $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)hf_c=\left(n+\frac{1}{2}\right)(8.7\times10^{-20})J=\left(n+\frac{1}{2}\right)(0.55)$eV. 所求的比值为 $0.025/0.55=0.046$.

39.36 N_2 分子中两核间的距离为 1.12Å. 求该分子关于其中心的转动惯量及该分子的转动能级? 在哪一能级上(j 为何值)转动能等于热能, 约为$\frac{1}{40}$eV?

解 ☞ $I=\sum mr^2=2[14(1.67\times10^{27})](0.56\times10^{-10})^2=1.47\times10^{-46}(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$. 量子化的转动动能公式为 $E=[h^2/(8\pi^2I)]j(j+1)=3.8\times10^{-23}j(j+1)\text{J}=2.4\times10^{-4}j(j+1)$eV. 由 $2.4\times10^{-4}j(j+1)=1/40$, 得 $j=10$.

39.37 试比较双原子分子中的振动和转动能级.

解 ☞ 根据 39.35 题和 39.36 题, 转动能级差 $\Delta E\approx1$eV, 而由 39.36 题, 振动能级差 $\Delta E\approx10^{-3}$eV(当 j 值较小时).

39.2 原子核与放射性

39.38 求$^{23}_{11}$Na 核的中子数.

解 ☞ $A-Z=23-11=12$.

39.39 求(a)^{3}He,(b)^{12}C,和(c)^{206}Pb 中有多少质子,中子和电子.

解 ☞ (a)He 的原子数为 2,所以氦核中有 2 个质子.因为该同位素的质量数为 3,故质子数和中子数之和为 3;所以有 1 个中子.原子中的电子数等于其原子数,都等于 2.(b)碳的原子数为 6,所以核中有 6 个质子.核中的中子数等于 12-6=6.电子数等于原子数,都为 6.(c)铅的原子数为 82;所以铅核中有 82 个质子,铅原子中有 82 个电子.中子数为 206-82=124.

39.40 碳有两种同位素.自然界中有 98.89% 的碳 12 和 1.11% 的碳 13.求碳的平均原子量.(^{12}C 的原子量为 12.)

解 ☞ $平均原子量=\dfrac{0.9889(12)+0.0111(13)}{1.000}=12.011$

39.41 碳核的半径约为 3×10^{-15}m 质量为 12u.求该核的平均密度.该密度是水密度的多少倍?

解 ☞ $\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{m}{(4\pi r^3)/3}=\dfrac{(12\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{kg/u})}{4\pi(3\times10^{-15}\text{m})^3/3}=1.8\times10^{17}\text{ kg/m}^3$

$\dfrac{\rho}{\rho_水}=\dfrac{1.8\times10^{17}}{1000}=1.8\times10^{14}$

39.42 最大的核有多大?

解 ☞ 在液滴模型中若半径以 fm 为单位,则半径与质量数的关系为 $r=1.2\sqrt[3]{A}$.由于最大的核的质量数 A 是比 240 略大的值,$\sqrt[3]{240}=6.2$,所以 $r\approx7.4\text{fm}=10^{-14}$ m.

39.43 一个 α 粒子(He^{2+})与一个相距 80fm 的金核(^{79}Au)逐渐远离.假设金核和 α 粒子都是点电荷,求斥力的最大值.

解 ☞ He^{2+}带电量为 $2e$.^{79}Au 核上的电量为 $79e$.由库仑定律得

$$F=k\frac{Q_1Q_2}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(2)(79)(1.6\times10^{-19})^2}{(8\times10^{-14})^2}=5.7(\text{N})$$

39.44 证明如果两个电荷和速度相同而质量不同的离子经过一个均匀磁场,则轨迹半径与质量成正比.(这被称为质量透镜.)当半径的变化为 Δr 时求 Δm 的表达式.

证 ☞ $mv^2/r=qvB$,所以 $r\propto m$;$\Delta m=(qB/v)\Delta r$.

39.45 求质子在磁场为 1T 的回旋加速器中的转动频率.质子的质量为 1.67×10^{-27}kg.

解 ☞ $\nu=\omega/(2\pi)=v/(2\pi r)$.又由 $r=(mv)/qB$ 得

$$\nu=\frac{Bq}{2\pi m}=\frac{1(1.60\times10^{-19})}{2\pi(1.67\times10^{-27})}=15.3\text{MHz}$$

39.46 一个质子同步加速器的磁场为 1.1T.求当加速质子的速度达到 $0.800c$ 时,转动半径为多大?

解 ☞ 当速度为 $0.800c$ 时应该运用相对质量.

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}=\frac{1.67\times10^{-27}}{\sqrt{1-[(0.800c)^2/c^2]}}$$

$$=\frac{1.67\times10^{-27}}{\sqrt{1-0.64}}=\frac{1.67\times10^{-27}}{0.6}=2.78\times10^{-27}(\text{kg})$$

$\dfrac{mv^2}{r}=qvB,\ r=\dfrac{mv}{qB}=\dfrac{2.78\times10^{-27}(0.8\times3\times10^8)}{1.60\times10^{-19}(1.1)}=3.79(\text{m})$

39.47 证明 1u(原子质量单位)等效于 931.5MeV 的能量.($1\text{u}=1.6605\times10^{-27}$ kg.)

证 ☞ $E=mc^2=(1.6605\times10^{-27})(2.998\times10^8)^2\text{J}=14.924\times10^{-11}\text{J}=$

$\dfrac{14.924\times10^{-1}\text{J}}{1.6022\times10^{-23}\text{J/MeV}}=931.5\text{MeV}$

39.48 求^{12}C的束缚能.

解 ☞ 一个^{12}C原子由6个质子、6个电子和6个中子构成.未结合的质子和电子的质量等于6个^{1}H原子的质量(如果我们忽略较小的质子电子对的结合能).把^{12}C看成由6个^{1}H和6个中子构成,质量守恒计算如下:6个^{1}H原子的质量$=6\times1.0078\text{u}=6.0468\text{u}$,6个中子的质量$=6\times1.0087\text{u}=6.0522\text{u}$,构成粒子的总质量$=12.0990\text{u}$,^{12}C的质量$=12.0000\text{u}$,构成^{12}C时减少的质量$=0.0990\text{u}$,结合能$=(931\times0.0990)\text{MeV}=92\text{MeV}$.

39.49 计算(a)$^{16}_{8}$O的结合能以及(b)每个核子的结合能.中性$^{16}_{8}$O的质量为$M_0=15.994915\text{u}$.

解 ☞ (a)结合能$=(ZM_H+Nm_n)-M_0=8(1.007825)+8(1.008665)-15.994915=+0.137005$即127.62MeV.(b)$\dfrac{127.62}{16}=7.98(\text{MeV}/\text{核子})$.

39.50 ^{238}U中每个核子的结合能约为7.5MeV.而质量一半的核的结合能为8.5MeV.如果一个^{238}U核被分成体积相同的两部分,该过程中放出多少能量?

解 ☞ 共有238个核子.当核裂解时每个核放出$8.5-7.5=1.0(\text{MeV})$的能量.放出的总能量约为238MeV.

39.51 在一个特定的裂解反应中,一个$^{235}_{92}$U核俘获一个慢速中子;裂解产物为三个中子,一个$^{142}_{57}$La以及一个$_Z$X.求Z.

解 ☞ 因为电荷守恒,所以$Z=92-57=35$.

39.52 当一个^{235}U原子在反应装置中裂变时大约放出200MeV的能量.假设一个使用铀-235效率为20%的反应装置输出功率为700MW.(a)该反应装置一天消耗多少铀原子?(b)求每天该装置消耗铀的质量.

解 ☞ (a)每次裂变得到$200\text{MeV}=(200\times10^6)(1.6\times10^{-19})$J的能量.仅有20%被有效利用,所以每次裂变产生的能量为$(200\times10^6)(1.6\times10^{-19})(0.20)\text{J}=6.4\times10^{-12}$J.因为该反应装置的输出为$700\times10^6$J/s,每秒裂变的次数为

$$\text{裂变次数/s}=\frac{7\times10^8\text{J/s}}{6.4\times10^{-12}\text{J}}=1.1\times10^{20}\text{s}^{-1}$$

$$\text{裂变次数/天}=(86400\text{s/d})(1.1\times10^{20}\text{s}^{-1})=9.5\times10^{24}\text{d}^{-1}$$

(b)在235kg铀-235中有6.02×10^{26}个原子.故一天消耗铀-235的质量为

$$\text{质量}=\left(\frac{9.5\times10^{24}}{6.02\times10^{26}}\right)(235\text{kg})=3.7\text{ kg}$$

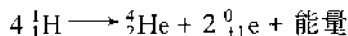
39.53 铀-238($^{238}_{92}$U)是放射性元素,衰变时连续放出$\alpha,\beta,\beta,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\beta,\beta,\alpha,\beta,\beta$和$\alpha$粒子($\beta$表示$e^-$)后形成稳定状态.求最终形成稳定的核.

解 ☞ 原来的核放出8个α粒子和6个β粒子.因为α粒子带电量为$+2e$,当放出一个α粒子,Z减少2.一个β粒子带电量为$-1e$,放出一个β粒子原子核的电量增加到$(Z+1)e$.最终的核

$$Z=92+6-(2)(8)=82,\quad A=238-(6)(0)-(8)(4)=206$$

得到的稳定的核为$^{206}_{82}$Pb.

39.54 太阳中发生下列裂变反应并供应反应的能量:



$$4\,^1_1\text{H}\longrightarrow\,^4_2\text{He}+2\,^0_{+1}\text{e}+\text{能量}$$

其中,$^0_{+1}$e是正电子.消耗1kg的氢原子释放多少能量?^{1}H,^{4}He和$_{+1}^0$e的质量分别为1.007825u,4.002604u和0.000549u,其中前两个值中包含了电子的质量.

解 ☞ 4个质子是反应物,其能量等于4倍的氢原子(^{1}H)的质量减去4个电子的质量.

反应物的质量$=(4)(1.007825\text{u})-4m_e=4.031300\text{u}-4m_e$

其中m_e是电子(正电子)的质量.反应生成物具有复合质量,

生成物质量 = (氦核的质量) + $2m_e$ = $(4.002604\text{u} - 2m_e) + 2m_e = 4.002604\text{u}$

质量亏损 = (反应物的质量) − (生成物质量) = $(4.0313\text{u} - 4m_e) - 4.0026\text{u}$

代入 $m_e = 0.000549\text{u}$,亏损质量为 0.0265u. 1 kg 的 ^1H 中含有 6.02×10^{26}个原子,每 4 个原子发生裂变反应时质量亏损 0.0265u. 故 1 kg ^1H 裂变反应时亏损

质量亏损 = $(0.0265\text{u})(6\times10^{26}/4)\text{u} = 4.0\times10^{24}\text{u} = (4.0\times10^{24}\text{u})(1.66\times10^{-27}\ \text{kg/u}) = 0.0066\ \text{kg}$

由爱因斯坦能量方程,

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 = (0.0066\ \text{kg})(3\times10^8\ \text{m/s})^2 = 6.0\times10^{14}\text{J}$$

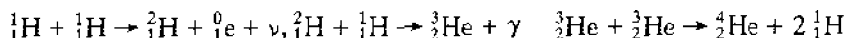
39.55 求核反应 $^4_2\text{He} + ^{14}_7\text{N} \rightarrow ^{17}_8\text{O} + ^1_1\text{H}$ 的 Q 值($Q = \Delta m_0 = \Delta\text{KE}$). 中性原子 ^4_2He, $^{14}_7\text{N}$ 和 $^{17}_8\text{O}$ 的静止质量分别为 4.002603u, 14.003074u 和 16.999133u.

解 ☞ 在反应式的两边加上 9 个电子的质量,运用已知原子质量和 ^1_1H 原子的质量, 1.007825u.

$$Q = (4.002603 + 14.003074) - (16.999133 + 1.007825) = -0.00128(u)$$
$$= -1.19(\text{MeV})$$

该反应是吸热反应($Q<0$);反应中损失 1.19 MeV 动能. 显然,只有当子弹(α 粒子, ^4_2He)至少具有 1.19MeV 的动能(在质心坐标系中测得)该反应才能发生.

39.56 质子质子循环发生的核反应被认为是恒星能量的一种可能来源.



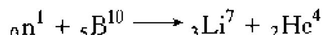
$$^1_1\text{H} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^2_1\text{H} + ^0_1\text{e} + \nu,\ ^2_1\text{H} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^3_2\text{He} + \gamma \quad ^3_2\text{He} + ^3_2\text{He} \rightarrow ^4_2\text{He} + 2\,^1_1\text{H}$$

这些反应总的结果是 4 个质子(^1_1H)化合生成 1 个 α 粒子(^4_2He), 2 个正电子(^0_1e), 2 个 γ 射线光子和 2 个中微子(ν). 求该循环反应的 Q 值. 氦原子的静止质量为 4.002603u.

解 ☞ 整个反应为 $4\,^1_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + 2\,^0_1\text{e} + 2\gamma + 2\nu$,若在右边再加上两个电子,我们可以使用中性原子的质量. 已知 γ 和 ν 的静止质量为零,我们得到

$$Q = 4M_\text{H} - (M_\text{He} + 4m_e) = 4.031300\text{u} - (4.002603 + 0.002196)\text{u}$$
$$= 0.0265\text{u} = 24.69\text{MeV}$$

39.57 人们常让中子在充满 B^{10}F_3 气体的容器中[与盖革(Geiger)计数器类似]被硼-10 核所俘获并观察中子的行为. 反应式为



$$_0\text{n}^1 + {}_5\text{B}^{10} \longrightarrow {}_3\text{Li}^7 + {}_2\text{He}^4$$

如果已知中子, 硼-10, 锂-7 和氦-4 的原子质量分别为 1.00866u, 10.01294u, 7.01600u 和 4.00260u, 求该反应释放的能量.

解 ☞ 我们有 $_0\text{n}^1 + {}_5\text{B}^{10} \longrightarrow {}_3\text{Li}^7 + 2\text{He}^4$

$$1.00866 + 10.01294 \longrightarrow 7.01600 + 4.00260,\ 11.02160 \longrightarrow 11.01860$$

$$11.02160 - 11.01860 = 0.00300(\text{u})\ \text{释放出能量}\ 0.00300\times931 = 2.79(\text{MeV})$$

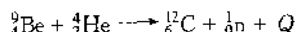
39.58 求反应 $^{14}{}_7\text{N}(\text{d},\alpha)^{12}{}_6\text{C}$ 的 Q 值.

解 ☞ $^{14}{}_7\text{N}$ 的质量为 14.00307u, ^2_1H 的质量为 2.01410u, 总质量为 16.01717u. $^{12}_6\text{C}$ 的质量为 12.000000u, ^4_2He 的质量为 4.002603u, 总质量为 16.002603u.

$$\text{质量亏损} = (16.01717 - 16.002603)\text{u} = 0.01457\text{u}$$
$$Q = (0.01457\text{u})(931.48\text{MeV/u}) = 13.6\text{MeV}$$

39.59 求 ^9_4Be 的 (α, n) 反应中放出的能量, ^9_4Be 的质量为 9.012183u.

解 ☞ 核反应方程为



$$^9_4\text{Be} + ^4_2\text{He} \longrightarrow ^{12}_6\text{C} + ^1_0\text{n} + Q$$

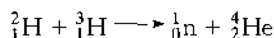
根据标准来源,质量为

^9_4Be: 9.012183u, $^{12}_6\text{C}$: 12.000000u

^4_2He: $\dfrac{4.002603\text{u}}{13.014786\text{u}}$, ^1_0n: $\dfrac{1.008665\text{u}}{13.008665\text{u}}$

质量共减少 $13.014786 - 13.008665 = 0.006121(\text{u})$, $Q = (0.006121)(931) = 5.70(\text{MeV})$

39.60 计算下列反应的 Q 值

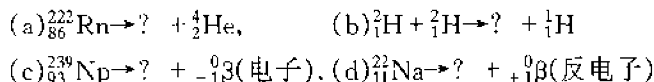


$${}_{1}^{2}H + {}_{1}^{3}H \longrightarrow {}_{0}^{1}n + {}_{2}^{4}He$$

中性原子${}_{1}^{2}H$，${}_{1}^{3}H$和${}_{2}^{4}He$的静止质量分别为2.014102u，3.016049u和4.002603u.

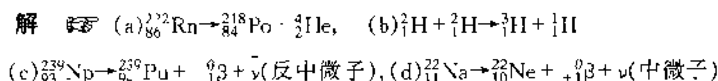
解 ☞ 在反应式的两边加上两个电子质量就可以用原子量进行计算.中子的静止质量为1.008665u，所以Q =（反应物的静止质量）-（生成物的静止质量）=（2.014102 + 3.016049）-（1.008665 + 4.002603）= 0.018883(u) = 17.6(MeV)这种反应称为放热反应($Q>0$)，反应中放出17.6 MeV的动能.

39.61 用正确的符号取代问号，完成下列核反应方程式并使之平衡.



(a)${}_{86}^{222}Rn \rightarrow ? + {}_{2}^{4}He$，　　(b)${}_{1}^{2}H + {}_{1}^{2}H \rightarrow ? + {}_{1}^{1}H$

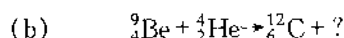
(c)${}_{93}^{239}Np \rightarrow ? + {}_{-1}^{0}\beta$(电子)，(d)${}_{11}^{22}Na \rightarrow ? + {}_{+1}^{0}\beta$(反电子)



解 ☞ (a)${}_{86}^{222}Rn \rightarrow {}_{84}^{218}Po + {}_{2}^{4}He$，　(b)${}_{1}^{2}H + {}_{1}^{2}H \rightarrow {}_{1}^{3}H + {}_{1}^{1}H$

(c)${}_{93}^{239}Np \rightarrow {}_{94}^{239}Pu + {}_{-1}^{0}\beta + \bar{\nu}$(反中微子)，(d)${}_{11}^{22}Na \rightarrow {}_{10}^{22}Ne + {}_{+1}^{0}\beta + \nu$(中微子)

39.62 完成下列核反应方程：(a)　${}_{7}^{14}N + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{8}^{17}O + ?$



(b)　${}_{4}^{9}Be + {}_{2}^{4}He \rightarrow {}_{6}^{12}C + ?$



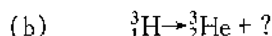
(c)　${}_{4}^{9}Be(p, \alpha)?$

解 ☞ (a)左下标的和为7 + 2 = 9.右边第一个产物的下标为8，所以第二个产物的下标(静电荷)为1.左侧上标的和为14 + 4 = 18.右边第一个产物的上标为17，所以第二个产物的上标(质量数)为1.核带电为1且质量数为1的粒子是质子，${}_{1}^{1}H$.

(b)反应生成的第二个粒子的核带电量(下标)为(4 + 2) - 6 = 0.粒子的质量数(上标)为(9 + 4) - 12 = 1.所以生成的粒子为中子，${}_{0}^{1}n$.

(c)反应物${}_{4}^{9}Be$和${}_{1}^{1}H$的核带电量之和为5质量数之和为10.除了α粒子，另一个产物的带电量为5 - 2 = 3，质量为10 - 4 = 6.这是${}_{3}^{6}Li$.

39.63 完成下列核反应方程式：(a)　${}_{15}^{30}P \rightarrow {}_{14}^{30}Si + ?$



(b)　${}_{1}^{3}H \rightarrow {}_{2}^{3}He + ?$



(c)　${}_{20}^{43}Ca(\alpha, ?){}_{21}^{46}Sc$

解 ☞ (a)生成第二个粒子的核带电量为15 - 14 = +1.质量数为30 - 30 = 0.所以该粒子为反电子，${}_{+1}^{0}e$.

(b)第二个粒子的核带电量为1 - 2 = -1.质量数为3 - 3 = 0.所以该粒子为β粒子(一个电子)，${}_{-1}^{0}e$.

(c)反应物${}_{20}^{43}Ca$和${}_{2}^{4}He$的总核带电量为22总质量数为47.生成粒子的电量为22 - 21 = 1，质量数为47 - 46 = 1.所以该粒子为质子，在括号中应填p.

39.64 定义下列与辐射有关的量：γ射线；α和β射线；X射线；贝克勒尔(becquerel)；伦琴(roentgen)；拉德(rad)；雷姆(rem)和同位素.

解 ☞ γ射线是电磁辐射的一种形式，通过波长很短，由处于激发态的核发出.

α粒子即氦核.β粒子是由辐射核放出的电子.X射线是高能量的电磁光子，通常由高能量的电子很快减速或者由电子跃迁到原子中空的内壳层产生.贝克勒尔(Bq)是一种放射性单位，等于每秒内有一个核衰变.伦琴是一个辐射剂量的单位，等于在干燥空气中引起每1.293×10^{-6}kg空气产生0.333 nc电离电荷，所对应的X或γ辐射.拉德是一个辐射吸收剂量单位，等于1 g吸收材料吸收100erg(10^{-5}J)的能量的剂量.雷姆是人体伦琴当量的单位.一雷姆等于一拉德乘以相对生物剂量(RBE).同位素是Z相同而A不同的原子.

39.65[c] 导出辐射衰变的统计规律.

解 ☞ 设开始时有N_0个不稳定的核，经过时间t后有$N(t)$个核未发生衰变.［当实验被重复多次时$N(t)$是所观察到核的平均数.］考虑在有限时间间隔$(t, t+\Delta t)$内发生的情况.由于$N(t)$个核中每个核衰变的可能性为$\lambda\Delta t$，则发生衰变的数目为$N(t)\times(\lambda\Delta t)$.［类似于："如果掷1000个骰子，显示5的骰子个数为$1000\left(\frac{1}{6}\right)$."］所以我们有

$$N(t+\Delta t)-N(t)=N(t)\times(\lambda\Delta t)$$

即

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=-\lambda N(t)$$

当 $\Delta t\to 0$ 时

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N$$

积分,

$$\int_{N_0}^{N}\frac{dN}{N}=-\lambda\int_0^t dt,\ \ln\frac{N}{N_0}=-\lambda t,\quad N=N_0e^{-\lambda t}$$

N_0 一般很大,这时未衰变的核的数目可认为是实际观察到的数目.

39.66[c]　证明一个不稳定核的平均存在时间为 $\overline{T}=1/\lambda$.

证　☞ 由题 39.65,生存时间为 t 的核(在 t 到 $t+dt$ 内发生衰变的核)的比例为

$$\frac{N(t)\times(\lambda dt)}{N_0}=e^{-\lambda t}\lambda dt,\quad \overline{T}=\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}\lambda dt=\frac{1}{\lambda}$$

39.67　镭的半周期为 1620a(年).1 g 镭样品中在 1 s 内有多少镭原子发生衰变?镭原子重为 226 kg/kmol.

解　☞ 1 g 样品为(0.001/226)kmol 所以含原子个数

$$N=\left(\frac{0.001}{226}\text{kmol}\right)(6.02\times10^{26}\text{ 个 /kmol})=2.66\times10^{21}\text{ 个}$$

衰变系数为

$$\lambda=\frac{0.693}{T_{1/2}}=\frac{0.693}{(1620\text{a})(3.16\times10^{7}\text{s/a})}=1.35\times10^{-11}\text{s}^{-1}$$

$$\Delta N=\lambda N\Delta t=(1.35\times10^{-11}\text{s}^{-1})(2.66\times10^{21})(1\text{s})=3.6\times10^{10}$$

是 1 g 镭每秒衰变的个数.由上述结果形成对放射性强度单位居里(Ci)的定义:

$$1\text{Ci}=3.7\times10^{10}\text{ 次衰变 /s}$$

39.68　在药品中常用钴-60(^{60}Co)作为放射源.它的半周期为 5.25a.则经过多长时间一个新样品的活性减至(a)原来值的$\frac{1}{8}$,(b)原来值的$\frac{1}{3}$?

解　☞ 活性正比于未衰变原子的数目($\Delta N/\Delta t=\lambda N$) (a)在每个半衰期中剩下样品有一半发生衰变.因为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,则样品衰变至原来的八分之一需三个半衰期即 15.75a.(b)由于所提供的物体每隔 5.25a 减少原来的一半,我们可以作出如图 39-3 所示的示意图.根据该图知经过 8.3a 样品衰减为原来的 0.33.

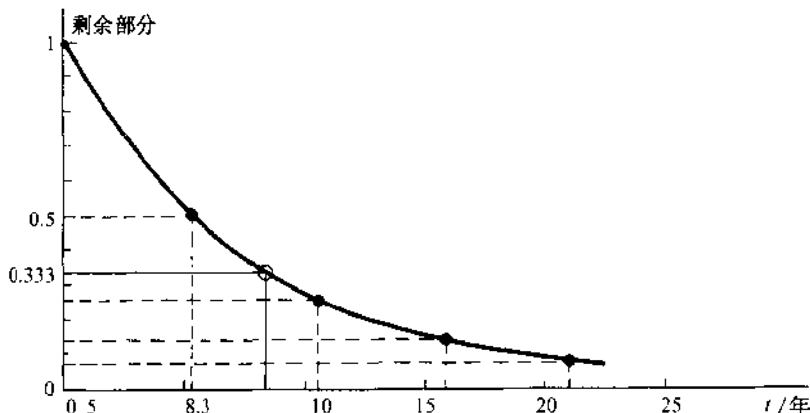
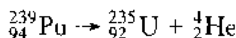


图 39-3

39.69　钚的半衰期为 24 000a,发生的衰变反应为



$$^{239}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow ^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

如果钚被存贮 73200a 则还剩下原来的几分之几?

解 ☞ $\frac{73200}{24000} \approx 3$ 个半衰期, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$(剩余 Pu 的比例)

39.70 ^{215}At 的半衰期为 100 μs. 如果该元素的样品开始时为 6 mg, 求其(a)开始时, (b)200 μs后的活性.

解 ☞ (a)放射性原子开始的数目为

$$N_0 = \frac{(6 \times 10^{-3}\mathrm{g})}{215\mathrm{g/mol}}(6.03 \times 10^{23}\ 个/\mathrm{mol}) = 1.68 \times 10^{19}\ 个$$

^{215}At 的衰变常数为

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{100 \times 10^{-6}} = 6930\mathrm{s}^{-1}$$

所以开始时的活性为 $A_0 = \lambda N_0 = (6930)(1.68 \times 10^{19}) = 1.16 \times 10^{23}(\mathrm{Bq})$

(b)当 $t = 2T_{1/2}$, $A = A_0 e^{-\lambda t} = (1.16 \times 10^{23})\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2.9 \times 10^{22}(\mathrm{Bq})$

39.71[c] 一放射性核以每秒 n 个的速率产生(用中子轰击靶得到), 求(a)当数目为 N_0 的 t 秒后核的数目和(b)这些放射性核的最大数目.

解 ☞ (a)原子数目 N 在以速率 n 增加的同时又以速率 λN 衰减. 所以总的增长速率为 $dN/dt = n - \lambda N$. 分离变量并积分得到

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{n - \lambda N} = \int_0^t dt, \frac{1}{\lambda}\ln\frac{n - \lambda N_0}{n - \lambda N} = t, N = \frac{n}{\lambda} + \left(N_0 - \frac{n}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$$

(b)由(a)的结论得 $N(t)$ 开始时为 N_0, 当 $N_0 > n/\lambda$ 时最终减少为 n/λ, 当 $N_0 < n/\lambda$ 时最终增加为 n/λ. 故核的最大数目为 N_0 和 n/λ 中较大的一个. 假设这里的 n/λ 和 N_0 都很大, 否则放射性衰变的规律和(a)的结论在一些时候会无效.

39.72[c] 一个 X 分裂成一个放射性物质 Y. 已知开始时 X 和 Y 的数目分别为 N_{x_0} 和 N_{y_0}, 求 N_y.

解 ☞ X 衰减的速率为 $dN_x/dt = -\lambda_x N_x = -\lambda_x N_{x_0} e^{-\lambda_x t}$. 由于每衰减一个 X 核就生成一个 Y 核, 所以每秒 Y 形成的速率为 $\lambda_x N_x$. 但在 Y 形成的同时又以 $\lambda_y N_y$ 的速率衰减. 所以 Y 核每秒净增加为

$$\frac{dN_y}{dt} = \lambda_x N_x - \lambda_y N_y = \lambda_x N_{x_0} e^{-\lambda_x t} - \lambda_y N_y$$

把 $\lambda_y N_y$ 移项, 两边乘以 $e^{\lambda_y t}$ 并对该式积分

$$e^{\lambda_y t} dN_y + \lambda_y N_y e^{\lambda_y t} dt = \lambda_x N_{x_0} e^{(\lambda_y - \lambda_x)t} dt, \quad N_y e^{\lambda_y t} = \frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x} e^{(\lambda_y - \lambda_x)t} + C$$

当 $t = 0$, $N_y = N_{y_0}$, 从而解得

$$C = N_{y_0} - \frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}, \quad N_y = \left(N_{y_0} - \frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}\right)e^{-\lambda_y t} + \left(\frac{\lambda_x N_{x_0}}{\lambda_y - \lambda_x}\right)e^{-\lambda_x t}$$

39.73 一束 γ 射线的照射面积为 2 cm^2 且每秒有 7×10^8 个质子通过. 每个质子的能量为 1.25 MeV. 质子束穿过 0.75 cm 厚的人体($\rho = 0.95\ \mathrm{g/cm}^3$)强度减少 5%. 求每秒照到人体上的平均剂量(以 rad 为单位).

解 ☞ 所求剂量为每千克肌肉所吸收的能量.

每秒吸收 γ 射线的数目 $= (7 \times 10^8 \mathrm{s}^{-1})(0.05) = 3.5 \times 10^7 \mathrm{s}^{-1}$

每秒吸收的能量 $= (3.5 \times 10^7 \mathrm{s}^{-1})(1.25\ \mathrm{MeV}) = 4.4 \times 10^7 \mathrm{MeV/s}$

吸收这一能量所需肌肉的质量为

$$质量 = \rho V = (0.95\ \mathrm{g/cm}^3)[(2\ \mathrm{cm}^2)(0.75\ \mathrm{cm})] = 1.43\ \mathrm{g}$$

所以我们有

$$剂量/秒 = \frac{每秒吸收的能量}{质量}$$

$$= \frac{(4.4\times10^7\ \text{MeV/s})(1.6\times10^{-13}\ \text{J/MeV})}{1.43\times10^{-3}\ \text{kg}}\times\frac{100\ \text{rad}}{1\ \text{J/kg}}$$

$$= 0.49\ \text{rad/s}$$

39.74 一束α粒子穿过人体使每千克人体存贮0.2 J的能量.这些粒子的相对生物剂量RBE为12rem/rad,求分别以rad和rem为单位的放射剂量.

解 ☞ 以rad为单位的剂量 $=\left(\frac{吸收的能量}{质量}\right)\times\left(\frac{100\text{rad}}{\text{J/kg}}\right)=(0.2\ \text{J/kg})\left(\frac{100\text{rad}}{\text{J/kg}}\right)=20\text{rad}$

以rem为单位的剂量=(RBE)×(以rad为单位的剂量)=(12)(20)=240(rem)

39.75 简短解释下列粒子物理中的名词:π介子,μ子,中微子;反粒子,重子和轻子.

解 ☞ π介子可带正电可带负电也可以不带电.一个π^+或π^-介子的质量是电子质量的273倍.一个中性π介子质量是电子质量的264倍.一个μ子的质量是电子质量的207倍.它形成于π^+或π^-介子的衰变,可带正电也可带负电.它的行为就像一个质量很大的电子.中微子是静止质量几乎为零的中性粒子.它产生于β衰变和π^+或π^-介子衰变.目前已经发现6种中微子,其中三种为反中微子.反粒子是对应于各个领域粒子的反物质,反粒子所带的电荷和其它某些属性与原粒子异号.例如,反电子是电子的反粒子.粒子和反粒子发生碰撞,两者发生湮没.重子是具有较强核力的粒子(如质子,中子,π介子).轻子指不具有较强核力的粒子(如电子,μ子,中微子).

39.3 固体电子学

39.76 简明地定义:半导体,p型半导体;n型半导体和声子.

解 ☞ 半导体是指在室温下有一部分电子能够导电的材料.当半导体的温度升高时其导电性增强.如果在该材料中加入受主或施主杂质,则可供导电的电子数目大大增加.p型半导体材料指在半导体材料中加入受主杂质,不能提供足够电子与相邻主原子形成共价键.因缺少电子形成的空穴像正电荷那样从一个原子"跳"到另一个原子.n型半导体材料指在半导体材料中加入施主杂质,比与相邻原子形成共价键所需的电子多一个.在室温下,该多出的电子通常位于导带.

声子是材料中量子化的振动(声)波,所带能量为$h\nu$,其中h是普朗克常数,ν是频率.

39.77 计算银中的自由载流子的数密度.假设每个原子提供一个载流子.银的密度为$10.5\times10^3\ \text{kg/m}^3$,原子量为107.8.

解 ☞ $n=(6.02\times10^{26}个载流子/\text{kmol})\left(\frac{1\text{kmol}}{107.8\text{kg}}\right)(10.5\times10^3\ \text{kg/m}^3)$

$=5.85\times10^{28}个载流子/\text{m}^3$.

39.78 根据39.77题,当横截面积为1.0mm^2的银导线中通过1.5A的电流时,求电子的平均运动速度.

解 ☞ 根据公式 $\Delta q=(v_d\Delta t)Ane$,有

$$v_d=\frac{I}{Ane}=\frac{1.5\text{A}}{(1.0\times10^{-6}\text{m}^2)(5.85\times10^{28}\text{m}^{-3})(1.6\times10^{-19}\text{C})}=0.16\ \text{mm/s}$$

39.79 诸如银之类的金属中的传导电子可被加热到像限制在金属晶格中的气体.用λ和$\bar{v}$分别表示电子的平均自由程和平均热运动速度.求该金属电导率的表达式.

解 ☞ 研究金属中一圆柱形体积,长为l(沿x方向)横截面积为A.如果加一纵向的电场E,则盒子中一个自由电子与晶格发生连续碰撞间隔期间的恒定加速度为$a_x=(eE)/m_e$.碰撞之间所需的平均时间为$\bar{t}=\lambda/\bar{v}$.所以电子获得的(平均)漂移速度为

$$v_x=v_d=a_x\bar{t}=\frac{eE\lambda}{m_e\bar{v}}$$

但$v_d=I/(Ane)$(39.78题);故得到欧姆定律,$J\equiv I/A=\sigma E$

$$\sigma=\frac{ne^2\lambda}{m_e\bar{v}} \tag{1}$$

39.80 根据题 39.77 和 39.79 求 0℃ 银的电导率. 取电子气中平均自由程为 25 nm.

解 ☞ 假设电子气是理想气体且不计平均速率和瞬时速率之间的区别. 则 $\frac{1}{2}m_e\bar{v}^2=\frac{3}{2}kT$. $m_e\bar{v}=\sqrt{3m_ekT}$, 所以 39.79 题中(1)式写成

$$\sigma=\frac{ne^2\lambda}{\sqrt{3m_ekT}}\approx\frac{(6\times10^{28})(1.6\times10^{-19})(25\times10^{-9})}{\sqrt{3(10^{-30})(1.38\times10^{-23})(273)}}$$

$$\approx\frac{4\times10^{-17}}{10^{-25}}=4\times10^{8}(\text{S/m})$$

39.81 一根银导线的正方形截面边长为 1 mm, 当导线中通以 1.5 A 的电流并将其置于 0.1T 的匀强磁场中, 求银导线截面上霍尔电压的大小.

解 ☞ 设导线沿 x 方向且磁场方向沿 z 方向. 霍尔效应中 B_z 产生的洛伦兹力等于感应电场 E_y 产生的电场力, 则

$$eE_y=ev_xB_z \tag{1}$$

其中 v_x 是载流子沿导线方向的运动速度. 由 39.78 题

$$v_x=\frac{I}{Ane}=\frac{I}{l^2ne} \tag{2}$$

霍尔电压的导出公式为

$$E_x=\frac{V_H}{l} \tag{3}$$

把(2)和(3)代入(1)得到

$$V_H=\frac{IB_z}{nel}=\frac{(1.5\text{A})(0.1\text{T})}{(5.85\times10^{28}\text{ m}^{-3})(1.6\times10^{-19}\text{C})(1\times10^{-3}\text{ m})}=1.6\times10^{-8}\text{V}$$

39.82 检验 39.81 题结果的单位.

解 ☞ $1\text{T}=1\text{Wb/m}^2=1\text{V}\cdot\text{s/m}^2$, $1\text{C}=1\text{A}\cdot\text{s}$

39.83 定义下列电子学名词: 整流器; 热离子二极管; 半导体二极管; 三极管; 放大系数和电压放大倍数, 晶体管.

解 ☞ 整流器是一种把交流电变成直流电的装置. 热离子二极管是指装有发射电子的阴极和挡板的真空管. 半导体二极管是一个只允许电流沿一个方向流动的 pn 结. 三极管是指含有一个发射极, 一个基极和一个集电极的真空管. 三极管的放大系数 μ 是集电极电压的增加与基极电压增加的比值:

$$\mu=\frac{\Delta V_p}{-\Delta V_g}\quad(I_p\text{ 保持恒定})$$

三极管像一个放大器, 其电压放大倍数等于负载电阻两端变化的电压与基极变化电压的比:

$$\text{电压放大倍数}=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R_L\Delta i_p}{\Delta V_g}$$

其中 R_L 是负载电阻, Δi_p 和 ΔV_g 分别是集电极电流的变化和基极电压的变化.

晶体管是由三层半导体制成的, 分别为: 发射区、基区和集电区. 基区很薄且与发射区和集电区类型相反.

39.84 三极管集电极上接的负载电阻 R_L 为 12 kΩ. 当基极电压 V_g 在 −2.96V 与 −2.88V 之间变化时集电极上电流 I_p 从 0.57 变到 0.81mA. 求该三极管的电压放大倍数.

解 ☞ $\Delta V_L=R_L\Delta i_p=(12000)[(0.81-0.57)\times10^{-3}]=2.88(\text{V})$,

$\Delta V_g=-2.96+2.88=-0.08(\text{V})$

$$\text{所以电压放大倍数}=\frac{\Delta V_L}{-\Delta V_g}=\frac{2.88}{0.08}=36$$

39.85 在图 39-4 中的半导体电路中基极电流为 35 μA. 求电阻 R_b 的值?

解 ☞ $V=I_bR_b$, $9=35\times10^{-6}R_b$, $R_b=257\text{k}\Omega$

39.86 在三极管中当基极电压从 −1.8V 变到 −3V 时, 集电极电压增加了 24V, 从而使得集

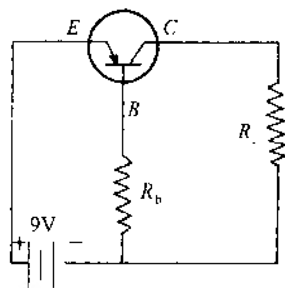


图 39-4

电极上保持电流不变.求该三极管的放大系数.

解 ☞ $\mu = \frac{\Delta V_p}{-\Delta V_g} = \frac{24}{-[-3-(-1.8)]}$

$= \frac{24}{1.2} = 20$

39.87 在一个 npn 型的半导体回路中集电极电流为 15 mA.如果 95% 的电子到达集电极,求基极电流.

解 ☞ 先求发射极电流

$$I_c = 0.95I = 15\text{mA}, I = 15.79\text{mA},$$

所以基极电流为

$$I_b = I - I_c = 15.79 - 15 = 0.79(\text{mA})$$

解 ☞　　解 ☞　　解 ☞　　解 ☞

证 ☞　　证 ☞　　证 ☞　　证 ☞